ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Преподаватель

Иванилова Татьяна Николаевна

Высказывания и операции над ними

Определение

Под **высказыванием** понимают языковое предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно

Логические значения высказываний:

«истина» (И, 1, t)

«ложь» (Л, 0, f)

Примеры:

1. Париж – столица Англии
2. Шесть делится на два
3. Сколько будет 7*7?
4. $7 * x = 21$

Укажите высказывания и их логические значения

Высказывание, представляющее собой одно утверждение, называют **простым** (элементарным).

Высказывания, которые получаются из простых с помощью грамматических связок:

«не», «и», «или», «если ..., то ...», «тогда и только тогда, когда»

принято называть **сложными** (составными)

Пример

Карась не рыба

Это простое или сложное высказывание?

Все высказывания будем рассматривать с точностью до их логического значения

Пример

«В Красноярске есть педагогический вуз»

«Два – простое число»

Эти высказывания для нас одинаковые (оба истинны)

Элементарные высказывания будем обозначать латинскими буквами:

A, B, C, …

x, y, z, …

Логическое значение высказывания определяется **функцией истинности**, которая принимает значения в двухэлементном множестве {0; 1}

$$\lambda(A)=\begin{cases}1, & \text{если высказывание } A - \text{истинно}\\ 0, & \text{если высказывание } A - \text{ложно}\end{cases}$$

Определение

Отрицанием высказывания А называется новое высказывание, которое является истинным, если А – ложно, и ложным, если А – истинно

Обозначение $\neg A,\ \overline{A}$

Читается: «не А», «Неверно, что А»

Определение

Отрицанием высказывания А называется новое высказывание, которое является истинным, если А – ложно, и ложным, если А – истинно

Таблица истинности

A	$\neg A$
1	0
0	1

Определение

Конъюнкцией двух высказываний A, B называется новое высказывание, которое является истинным в единственном случае, если оба высказывания A, B – истинны

Обозначени $A \wedge B,\ A \& B$

Читается: «A и B»

Определение

Конъюнкцией двух высказываний A, B называется новое высказывание, которое является истинным в единственном случае, если оба высказывания A, B – истинны

Таблица истинности

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Конъюнкция: логическое умножение АВ

Таблица истинности

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Определение

Дизъюнкцией двух высказываний A, B называется новое высказывание, которое является ложным в единственном случае, если оба высказывания A, B – ложны

Обозначение: $A \vee B$

Читается: «A или B»

Определение

Дизъюнкцией двух высказываний А, В называется новое высказывание, которое является ложным в единственном случае, если оба высказывания А, В – ложны

Таблица истинности

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Определение

Импликацией двух высказываний А, В называется новое высказывание, которое является ложным в единственном случае, если первое высказывание А - истинно, а второе высказывание В – ложно

Импликация

Обозначение $A \to B$

Читается: «если А, то В»
«из А следует В»
«А имплицирует В»

А – посылка

В – заключение

Определение

Импликацией двух высказываний А, В называется новое высказывание, которое является ложным в единственном случае, если первое высказывание А - истинно, а второе высказывание В – ложно

Таблица истинности

A	B	$A \to B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Определение

Эквивалентностью двух высказываний А, В называется новое высказывание, которое является истинным, если высказывания А, В имеют одинаковые логические значения, и ложным – в остальных случаях

Эквивалентность

Обозначение: A~B, $A \leftrightarrow B$

Читается:

- «А тогда и только тогда, когда В»
- «для того, чтобы А, необходимо и достаточно, чтобы В»
- «А эквивалентно В»

Определение

Эквивалентностью двух высказываний A, B называется новое высказывание, которое является истинным, если высказывания A, B имеют одинаковые логические значения, и ложным – в остальных случаях

Таблица истинности

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Разделительное «или»

Обозначение: $A \oplus B$

Читается:

- «А не эквивалентно В»
- Операция “XOR”

Определение

Разделительное «или» для двух высказываний A, B это новое высказывание, которое истинно, если высказывания A, B имеют разные логические значения, и ложно – в остальных случаях.

$$A \oplus B = \overline{(A \leftrightarrow B)}$$

Дополнительные связки

Штрих Шеффера

$$A \mid B = \overline{A} \vee \overline{B}$$

Стрелка Пирса(функция Вебба)

$$A \downarrow B = \overline{A} \wedge \overline{B}$$

Таблицы истинности

- Составляются для любой формулы логики высказываний
- Если в формуле n переменных, то в таблице строк 2^n
- Пусть дана формула $F(x_1,x_2,\dots,x_n)$

Список переменных формулы $<x_1,x_2,\dots,x_n>$

Оценки списка переменных $<0,0,\dots,0>$, $<0,1,\dots,1>$, $<1,1,0,\dots,1>$, $<1,1,\dots,1>$ и т.п.

- Для формулы, которая содержит две переменные, таких наборов значений переменных всего четыре: (0,0), (0,1), (1,0), (1,1).
- Если формула содержит три переменные, то возможных наборов значений переменных восемь:
- (0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1),
- (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1).
- Количество наборов для формулы с четырьмя переменными равно шестнадцати и т.д.

Основные законы алгебры логики

Закон	Для И	Для ИЛИ
Коммутативность	$A \wedge B \equiv B \wedge A$	$A \vee B \equiv B \vee A$
Дистрибутивность	$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
Идемпотентность	$A \wedge A \equiv A$	$A \vee A \equiv A$
Ассоциативность	$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
Закон де Моргана	$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
Закон расщепления	$A \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$	$A \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$
Закон поглощения	$A \wedge (A \vee B) \equiv A$	$A \vee (A \wedge B) \equiv A$
Снятие двойного отрицания	$\neg\neg A \equiv A$	

Выражение одних логических связок через другие:

- $A \supset B \equiv \neg A \vee B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$
- $A \sim B \equiv (A \supset B) \wedge (B \supset A) \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A) \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
- $A \vee B \equiv \neg A \supset B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$
- $A \wedge B \equiv \neg(A \supset \neg B) \equiv (\neg(\neg A \vee \neg B))$
- $A \oplus B \equiv \neg\ (A \sim B) = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

Тавтология

- Некоторые формулы принимают значение “истина” при любых значениях истинности входящих в них переменных. Например, формула $A \vee \overline{A}$
- Такие формулы называются тождественно истинными формулами или тавтологиями.
- Высказывания, которые формализуются тавтологиями, называются логически истинными высказываниями.

Тождественная ложь

В качестве другого примера рассмотрим формулу А & $\bar{A}$, которой соответствует, например, высказывание "Катя самая высокая девочка в классе, и в классе есть девочки выше Кати". Очевидно, что эта формула ложна, так как либо А, либо $\bar{A}$ обязательно ложно.

Такие формулы называются тождественно ложными формулами или противоречиями.

Высказывания, которые формализуются противоречиями, называются логически ложными высказываниями.

Тождественная ложь

- $(\overline{x \vee y}) \wedge (x \wedge \bar{y})$

Переменные		Промежуточные логические формулы				Формула
x	y	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\bar{y}$	$x \cdot \bar{y}$	$\overline{x \vee y} \cdot (x \cdot \bar{y})$
0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0

При всех наборах значений переменных x и y формула принимает значение 0, то есть является тождественно ложной.

Выполнимая формула

- $(\overline{x \vee \bar{y}}) \vee (\bar{x} \wedge z)$

Переменные			Промежуточные логические формулы					Формула
x	y	z	$\bar{y}$	$x \vee \bar{y}$	$\overline{x \vee \bar{y}}$	$\bar{x}$	$\bar{x} \cdot z$	$\overline{x \vee \bar{y}} \vee \bar{x} \cdot z$
0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0	0

Формула в некоторых случаях принимает значение 1, а в некоторых — 0, то есть является выполнимой.