Методы теории массового обслуживания

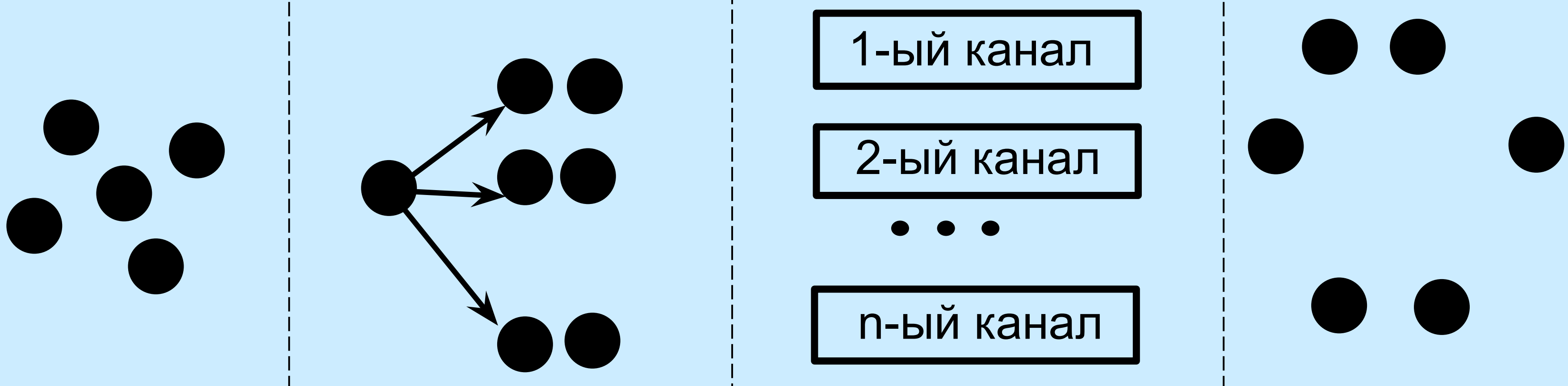
Методы теории массового обслуживания

входящий поток заявок

очередь на обслуживание

каналы обслуживания

обслуженные заявки



- Покупатели
- Ремонтируемая техника
- Звонки
- …
- Вызовы абонентов
- Объемы АСР

- Кассы
- Ремонтные мастерские
- Телефонные станции
- …
- ЦОВ 112
- АС машины

Предмет теории массового обслуживания - установление зависимости между характером потока заявок, числом каналов, их производительностью, правилами работы СМО и успешностью (эффективностью) обслуживания.

Когда СМО неэффективна?

- СМО **не справляется** с заявками, образуются огромные очереди, часть заявок уходит необслуженными (например, заправка на АЗС в час пик, очередь на эскалатор или в лифт в многоэтажном здании)
- СМО **простаивает**, заявок мало, а каналов много, их производительность избыточна (например, огромный торговый центр в малолюдном месте, мощный автосервис в месте, где мало машин)

Методы теории массового обслуживания

Эффективность

с точки зрения владельцев СМО

с точки зрения клиентов СМО

максимальная загрузка каналов, выжать полную прибыль

↓

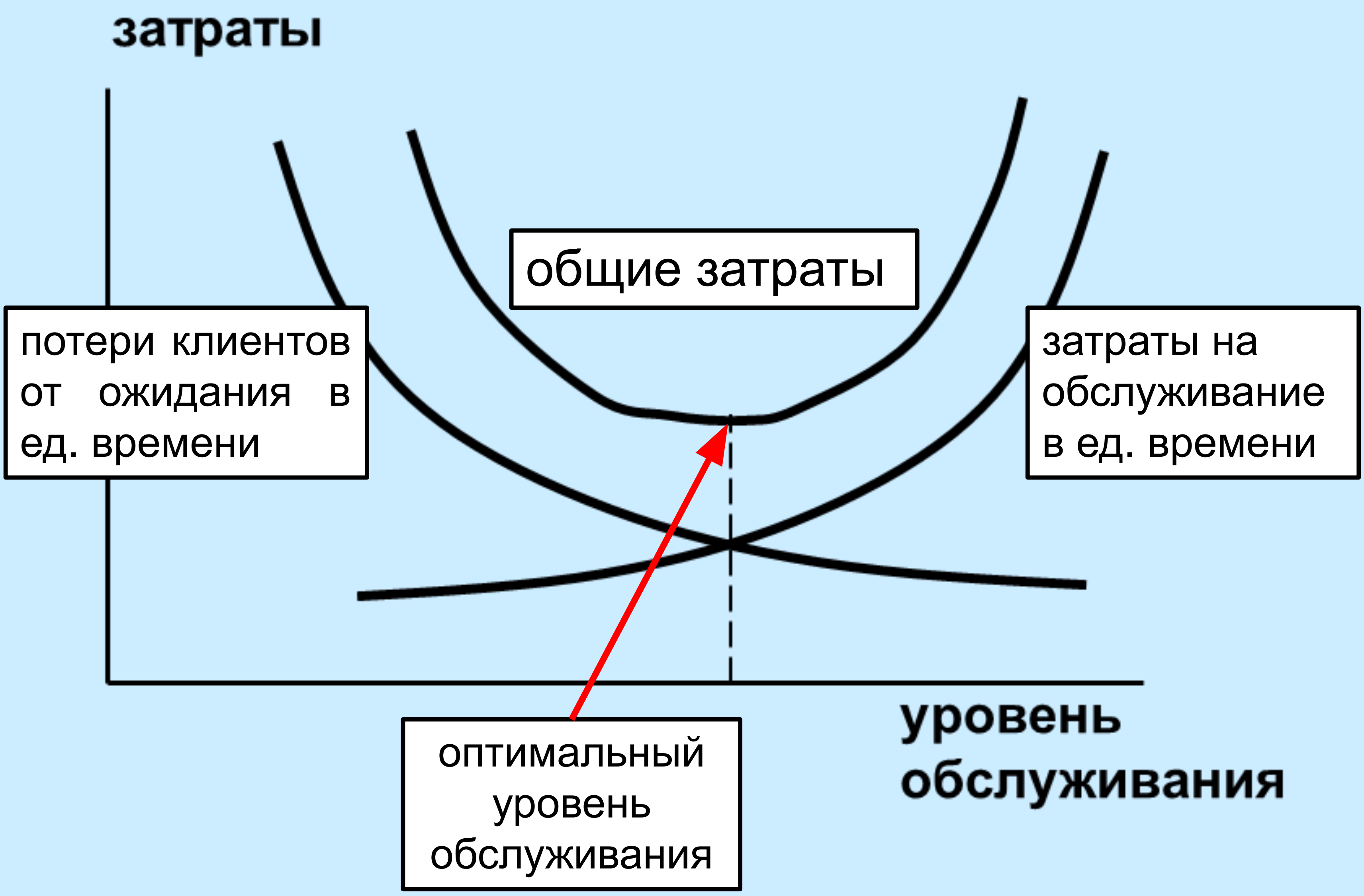
минимальное количество высокопроизводительных каналов

минимальные очередь и время обслуживания

↓

максимальное количество каналов с высоким качеством обслуживания

Методы теории массового обслуживания



Классификация СМО

СМО с отказами

- заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает «отказ», покидает СМО и в дальнейшем процессе обслуживания не участвует

Системы с ожиданием (с очередью)

- заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, становится в очередь и ожидает, пока не освободится один из каналов

Системы с неограниченным ожиданием

- заявка, поступившая когда нет свободных каналов, становится в очередь и ждет сколько нужно освобождения канала, который примет ее к обслуживанию

Системы с ограниченным ожиданием

- заявка, поступившая когда нет свободных каналов, становится в очередь и ждет определенное время (мест в очереди) освобождения канала, который примет ее к обслуживанию

Методы теории массового обслуживания

Показатели эффективности СМО

среднее количество заявок, которое может обслужить СМО в единицу времени (**для кофейных аппаратов**)

средний процент заявок, получающих отказ и покидающих СМО необслуженными (**клиенты в переполненной парикмахерской**)

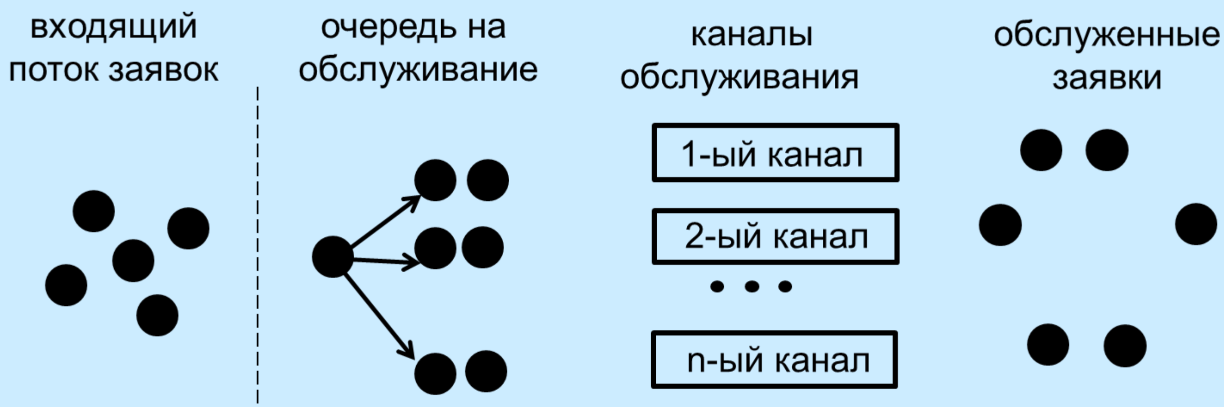
среднее время ожидания в очереди (**больной в скорой медицинской помощи**)

среднее количество заявок, находящихся в очереди (**автомашины на площадке АЗС**)

средний доход, приносимый СМО в единицу времени (**для всех**)

вероятность того, что поступившая заявка немедленно будет принята к обслуживанию (**боевой дрон противника в полосе ПВО**)

Методы теории массового обслуживания



Случайный характер потока заявок

+

Случайное время обслуживания

Очереди нет, система не простаивает

Очередь есть, заявки **ждут**

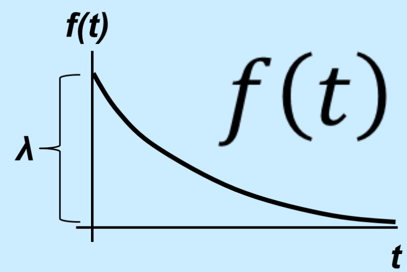
Очередь есть, заявки **уходят**

Очереди нет, система **простаивает**

Методы теории массового обслуживания

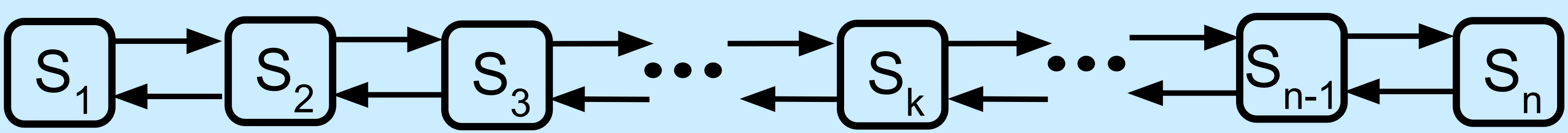
Случайный характер потока заявок	Случайное время обслуживания
Пуассоновский (количество заявок в настоящий момент не зависит от количества заявок в прошлом, заявки поступают по одной), количество заявок зависит только от длины промежутка времени	Показательное (оставшееся время обслуживание не зависит от того, сколько уже длилось обслуживание)

$$P_m = \frac{a^m}{m!} \cdot e^a$$



$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$$

гибель-размножение

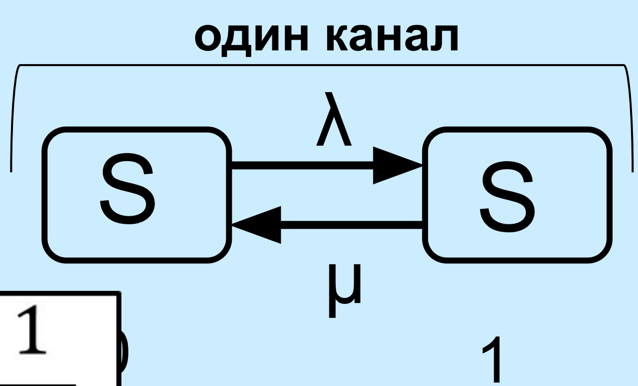


Одноканальная СМО с отказами

Абсолютная пропускная способность - среднее число заявок, которое может обслужить система за единицу времени ***A***

Относительная пропускная способность СМО – отношение среднего числа заявок, обслуживаемых системой в единицу времени, к среднему числу поступающих за это время заявок ***q***

S_0 – канал свободен
S_1 – канал занят

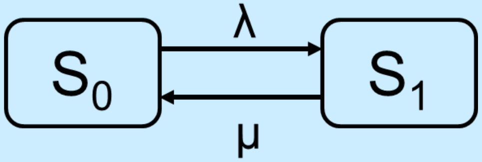


λ – интенсивность потока заявок
μ – интенсивность потока обслуживаний

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{t_{\text{заяв}}}} \qquad \boxed{\mu = \frac{1}{t_{\text{об}}}}$$

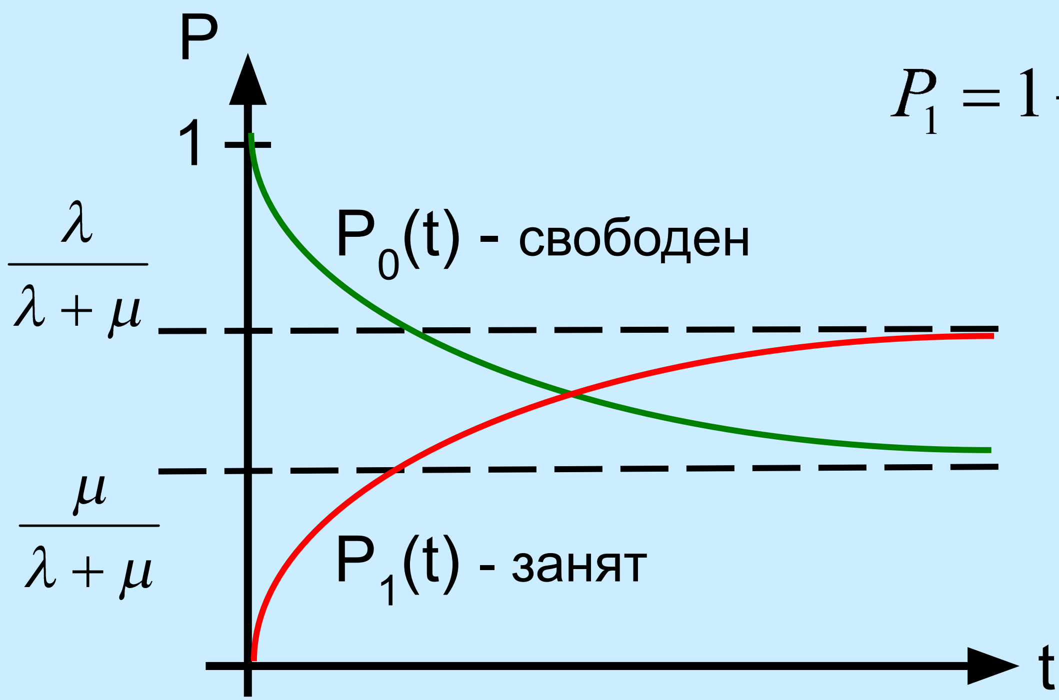
$$\frac{dP_0}{dt} = -\lambda P_0 + \mu P_1 \qquad \frac{dP_1}{dt} = \lambda P_0 - \mu P_1 \qquad P_0+P_1=1$$

Методы теории массового обслуживания



$$P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{(\lambda+\mu)t}$$

$$P_1 = 1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{(\lambda+\mu)t}$$



При t$\to\infty$ $$P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

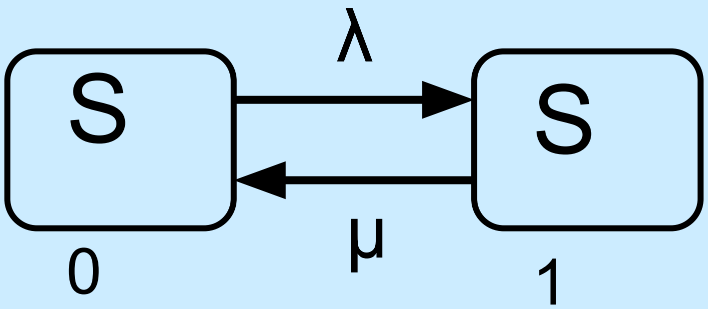
$$P_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

$$q = P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \qquad A = \lambda q = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}$$

$$P_{отк} = P_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} =$$

$$= 1 - q$$

Методы теории массового обслуживания



СМО – телефонная линия

- интенсивность потока вызовов – λ=0,8 выз/мин
- средняя продолжительность разговора – $t_{об}$=2 мин

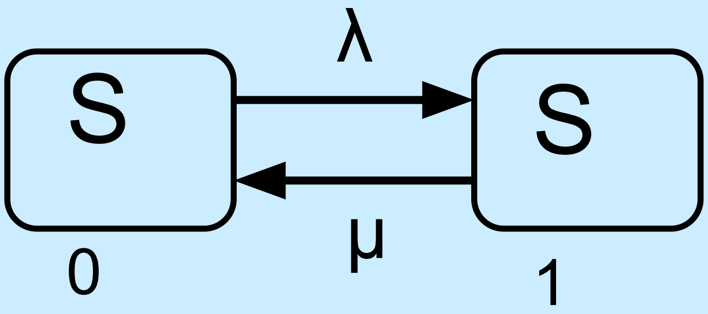
Интенсивность обслуживания $$\mu = \frac{1}{t_{об}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Относительная пропускная способность $$q = \frac{0{,}5}{0{,}8 + 0{,}5} = 0{,}38$$

Вывод: в установившемся режиме система будет обслуживать около 38% вызовов

Абсолютная пропускная способность $$A = 0{,}8 \cdot 0{,}38 = 0{,}30$$

Вывод: система способна осуществить в среднем 0,3 разговора в мин



Вероятность отказа $P_{отк}=0{,}62$

Вывод: 62% вызова будет получать отказ

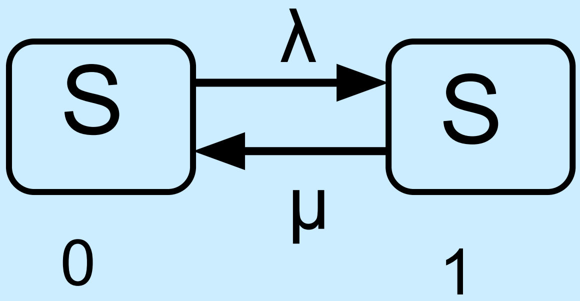
В идеале (при неслучайном характере заявок и обслуживаний) пропускная способность равна $\frac{1}{t_{об}} = 0{,}5$

В реальности (при случайном характере заявок и обслуживаний) пропускная способность равна $A = 0{,}30$ т.е. в 1,7 раза меньше. Случайность осложняет работу!

Задание 22: Привести пример одноканальной СМО с отказами и рассчитать её параметры:

P_0 , P_1 , q , A , $P_{отк}$

Методы теории массового обслуживания



Вар.1

СМО – это … $t_{заяв}=2$; $t_{об}=2$

Вар.2

СМО – это … $t_{заяв}=1$; $t_{об}=2$

Вар.3

СМО – это … $t_{заяв}=2$; $t_{об}=1$

Вар.4

СМО – это … $t_{заяв}=3$; $t_{об}=4$

Вар.5

СМО – это … $t_{заяв}=4$; $t_{об}=3$

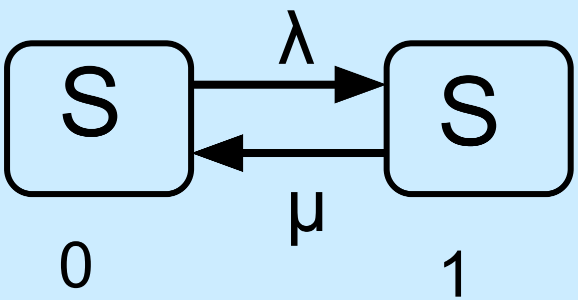
Вар.6

СМО – это … $t_{заяв}=5$; $t_{об}=1$

Вар.7

СМО – это … $t_{заяв}=2$; $t_{об}=4$

Методы теории массового обслуживания



Вар.8

СМО – это … $t_{заяв}=3;\ t_{об}=2$

Вар.9

СМО – это … $t_{заяв}=4;\ t_{об}=8$

Вар.10

СМО – это … $t_{заяв}=5;\ t_{об}=5$

Вар.11

СМО – это … $t_{заяв}=6;\ t_{об}=1$

Вар.12

СМО – это … $t_{заяв}=1;\ t_{об}=6$

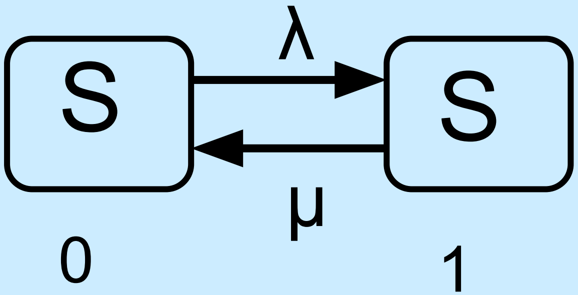
Вар.13

СМО – это … $t_{заяв}=9;\ t_{об}=1$

Вар.14

СМО – это … $t_{заяв}=1;\ t_{об}=9$

Методы теории массового обслуживания



Вар.15

СМО – это … $t_{заяв}=23;\ t_{об}=2$

Вар.16

СМО – это … $t_{заяв}=2;\ t_{об}=23$

Вар.17

СМО – это … $t_{заяв}=7;\ t_{об}=7{,}01$

Вар.18

СМО – это … $t_{заяв}=6{,}01;\ t_{об}=6$

Вар.19

СМО – это … $t_{заяв}=1;\ t_{об}=1{,}1$

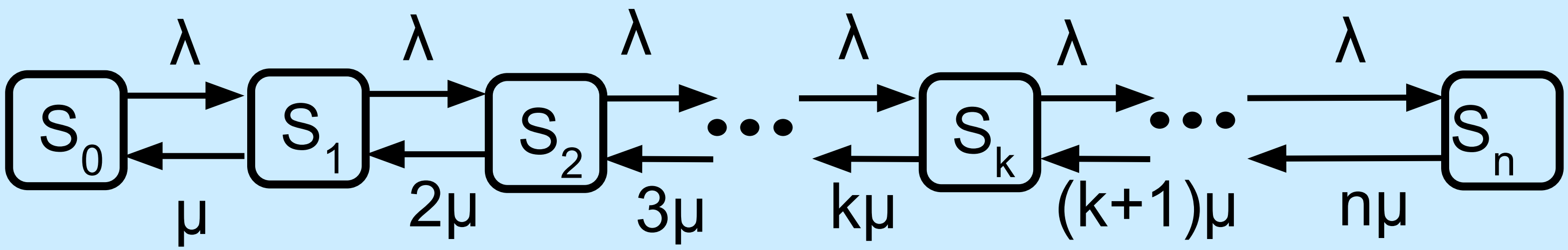
Вар.20

СМО – это … $t_{заяв}=9{,}01;\ t_{об}=9$

Вар.21

СМО – это … $t_{заяв}=1;\ t_{об}=1$

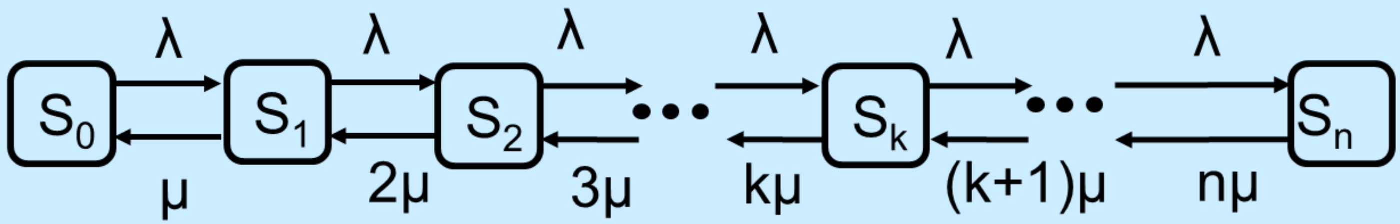
Многоканальная СМО с отказами



S_0 – канал свободен
S_1 – занят один канал, остальные свободны
…
S_k – заняты k каналов, остальные свободны
…
S_n – заняты все каналы

При t$\to\infty$ $$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0$$ *k*=*1,2,…,n*

Методы теории массового обслуживания



$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

приведенная интенсивность потока заявок (среднее число заявок, приходящих в СМО за среднее время обслуживания 1-ой заявки)

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}}$$

$$P_{отк} = \frac{\rho^n}{n!} P_0$$

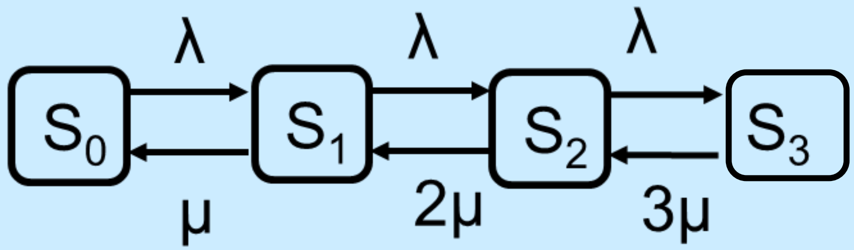
$$q = 1 - P_n$$

$$A = \lambda q$$

$\bar{k} = \rho(1 - P_n)$ - среднее число занятых каналов

СМО – 3-х канальная телефонная линия

- интенсивность потока вызовов – λ=0,8 выз/мин
- средняя продолжительность разговора – $t_{об}$=2 мин

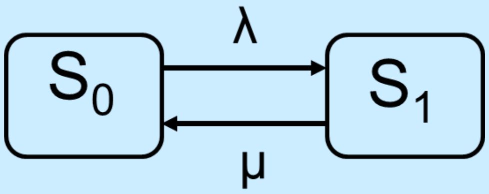


$$\mu = \frac{1}{2} = 0{,}5 \qquad \rho = \frac{0{,}8}{0{,}5} = 1{,}6 \qquad P_0 = \frac{1}{1 + \frac{1{,}6}{1!} + \frac{1{,}6^2}{2!} + \frac{1{,}6^3}{3!}} = 0{,}22$$

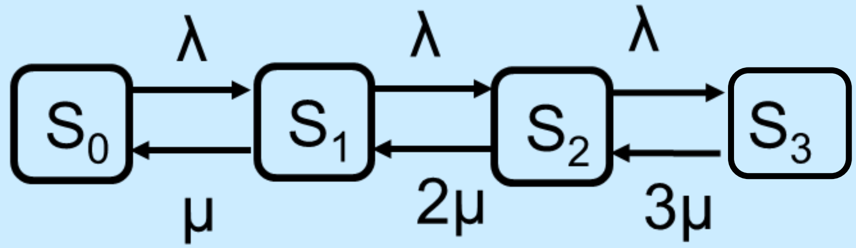
$$P_1 = \frac{1{,}6^1}{1!} 0{,}22 = 0{,}35 \qquad P_2 = \frac{1{,}6^2}{2!} 0{,}22 = 0{,}28 \qquad P_3 = 0{,}15$$

Сумма равна 0,22+0,35+0,28+0,15=1

Методы теории массового обслуживания



1 канал



3 канала

$P_{отк}=0,62$ меньше в 4 раза $P_{отк}=0,15$

$q = 0,38$ больше в 2,2 раза $q = 1 - 0,15 = 0,85$

$A = 0,30$ больше в 2,3 раза $A = \lambda q = 0,8 \cdot 0,85 = 0,68$

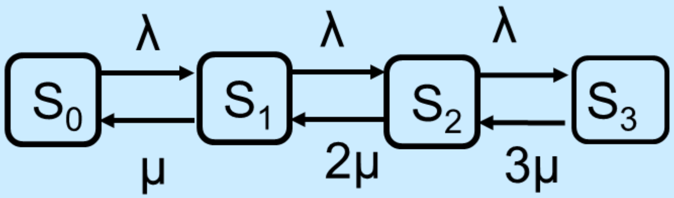
$$\bar{k} = 1,6(1 - 0,15) = 1,36$$

Вывод: занято в среднем меньше половины каналов (1,36), зато вероятность обслуживания высокая (0,85)

Задание 23: Привести пример многоканальной СМО с отказами и рассчитать её параметры:

P_0 , P_k , q , A , $P_{отк}$, $\bar{k}$

Методы теории массового обслуживания



n=3

Вар.1

СМО – это … $t_{заяв}=2$; $t_{об}=2$

Вар.2

СМО – это … $t_{заяв}=1$; $t_{об}=2$

Вар.3

СМО – это … $t_{заяв}=2$; $t_{об}=1$

Вар.4

СМО – это … $t_{заяв}=3$; $t_{об}=4$

Вар.5

СМО – это … $t_{заяв}=4$; $t_{об}=3$

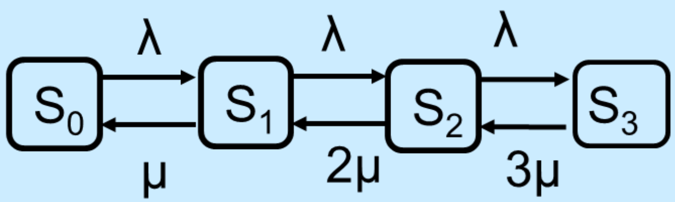
Вар.6

СМО – это … $t_{заяв}=5$; $t_{об}=1$

Вар.7

СМО – это … $t_{заяв}=2$; $t_{об}=4$

Методы теории массового обслуживания



n=3

Вар.8

СМО – это … $t_{заяв}=3;\ t_{об}=2$

Вар.9

СМО – это … $t_{заяв}=4;\ t_{об}=8$

Вар.10

СМО – это … $t_{заяв}=5;\ t_{об}=5$

Вар.11

СМО – это … $t_{заяв}=6;\ t_{об}=1$

Вар.12

СМО – это … $t_{заяв}=1;\ t_{об}=6$

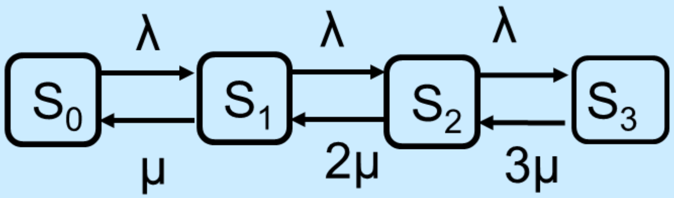
Вар.13

СМО – это … $t_{заяв}=9;\ t_{об}=1$

Вар.14

СМО – это … $t_{заяв}=1;\ t_{об}=9$

Методы теории массового обслуживания



n=3

Вар.15

СМО – это … $t_{\text{заяв}}=23$; $t_{\text{об}}=2$

Вар.16

СМО – это … $t_{\text{заяв}}=2$; $t_{\text{об}}=23$

Вар.17

СМО – это … $t_{\text{заяв}}=7$; $t_{\text{об}}=7{,}01$

Вар.18

СМО – это … $t_{\text{заяв}}=6{,}01$; $t_{\text{об}}=6$

Вар.19

СМО – это … $t_{\text{заяв}}=1$; $t_{\text{об}}=1{,}1$

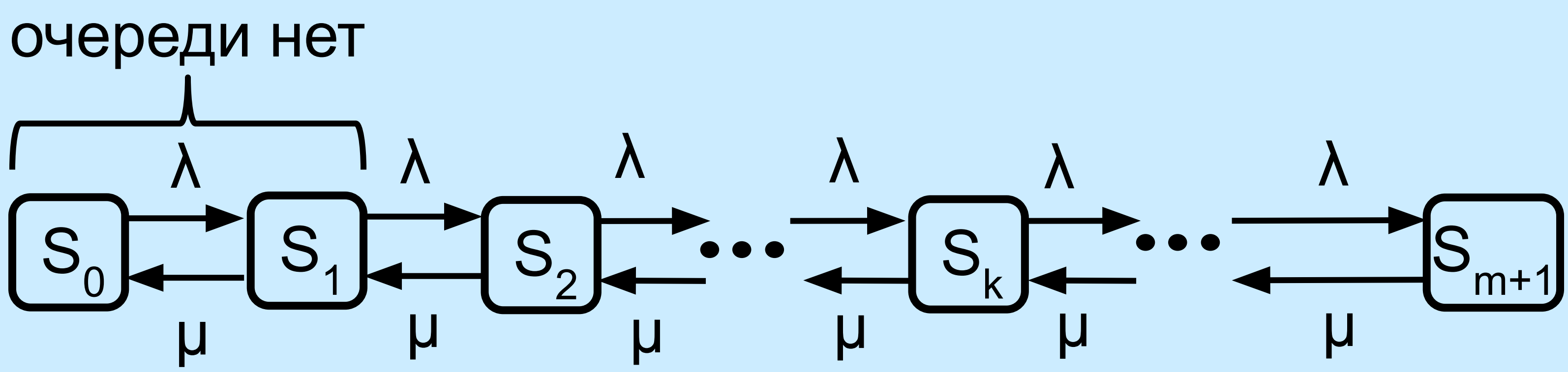
Вар.20

СМО – это … $t_{\text{заяв}}=9{,}01$; $t_{\text{об}}=9$

Вар.21

СМО – это … $t_{\text{заяв}}=1$; $t_{\text{об}}=1$

Одноканальная СМО с ожиданием, очередь ограничена *m* заявками



$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

S_0 – канал свободен

S_1 – канал занят, очереди нет

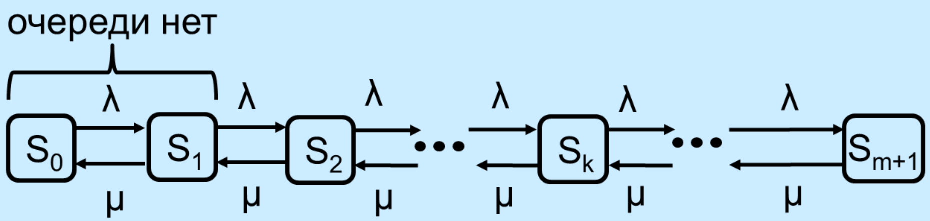
S_2 – канал занят, одна заявка в очереди

…

S_k – канал занят, (k-1) заявок в очереди

…

S_{m+1} – канал занят, m заявок в очереди



для $\rho \neq 1$

$$P_k = \rho^k P_0 \qquad P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} \qquad P_{отк} = \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}$$

$$q = 1 - P_{отк} \qquad A = \lambda q$$

$$\bar{r} = \frac{\rho^2\left[1-\rho^m(m+1-m\rho)\right]}{(1-\rho^{m+2})(1-\rho)}$$

среднее число заявок, находящихся в очереди

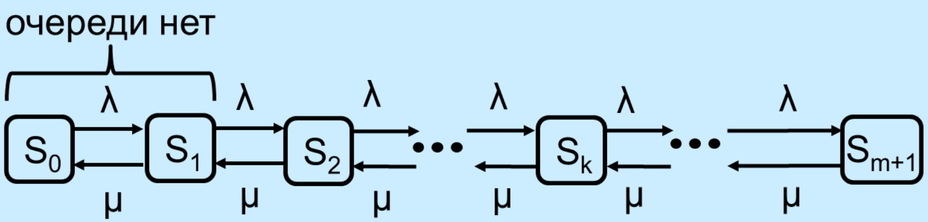
$$\bar{k} = \bar{r} + \frac{\rho - \rho^{m+2}}{1-\rho^{m+2}}$$

среднее число заявок, связанных с системой

Методы теории массового обслуживания

$$\overline{t_{ож}} = \frac{\bar{r}}{\lambda}$$

среднее время ожидания заявки в очереди



$$\bar{t}_{сист} = \frac{\bar{r}}{\lambda} + \frac{q}{\mu}$$

среднее время пребывания заявки в системе

АЗС - СМО с одним каналом обслуживания (одной колонкой):

- площадка при станции допускает пребывание в очереди на заправку не более 3 машин одновременно (m = 3)
- поток машин для заправки λ = 1 (машина в минуту)
- процесс заправки продолжается в среднем $t_{об}$ = 1,25 мин.

Методы теории массового обслуживания

$$\mu = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8 \qquad \rho = \frac{1}{0{,}8} = 1{,}25 \qquad P_0 = \frac{1 - 1{,}25}{1 - 1{,}25^{3+2}} = 0{,}122$$

$$P_1 = 0{,}122 \cdot 1{,}25^1 = 0{,}152 \qquad P_2 = 0{,}122 \cdot 1{,}25^2 = 0{,}191$$

$$P_3 = 0{,}122 \cdot 1{,}25^3 = 0{,}238 \qquad P_4 = P_{\text{отк}} = 0{,}122 \cdot 1{,}25^4 = 0{,}2971$$

$$q = 1 - 0{,}297 = 0{,}703 \qquad A = 1 \cdot 0{,}703 = 0{,}703$$

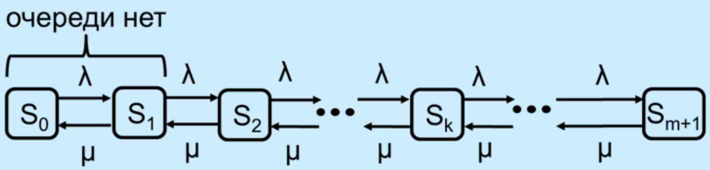
$$\bar{r} = \frac{1{,}25^2\left[1 - 1{,}25^3(3+1-3\cdot 1{,}25)\right]}{(1-1{,}25^{3+2})(1-1{,}25)} = 1{,}56 \qquad \bar{k} = 1{,}56 + \frac{1{,}25 - 1.25^{3+2}}{1-1{,}25^{3+2}} = 2{,}44$$

$$\overline{t_{\text{ож}}} = \frac{1{,}56}{1} = 1{,}56 \qquad \bar{t}_{\text{сист}} = 1{,}56 + \frac{1{,}25}{0{,}8} = 2{,}44$$

Задание 24: Привести пример <u>одноканальной</u> СМО <u>с ожиданиями</u> и рассчитать её параметры:

P_0 , P_k , q , A , $P_{отк}$, $\bar{r}\,, \bar{k}, \overline{t_{ож}}\,, \bar{t}_{сист}$

Методы теории массового обслуживания



$m \le 3$ – заявок в очереди

Вар.1

СМО – это … $t_{заяв}=2;\ t_{об}=2$

Вар.2

СМО – это … $t_{заяв}=1;\ t_{об}=2$

Вар.3

СМО – это … $t_{заяв}=2;\ t_{об}=1$

Вар.4

СМО – это … $t_{заяв}=3;\ t_{об}=4$

Вар.5

СМО – это … $t_{заяв}=4;\ t_{об}=3$

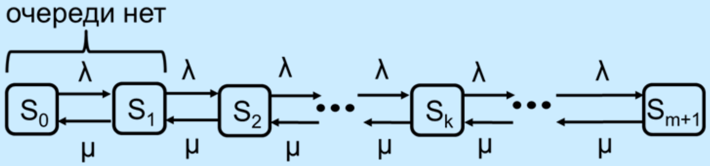
Вар.6

СМО – это … $t_{заяв}=5;\ t_{об}=1$

Вар.7

СМО – это … $t_{заяв}=2;\ t_{об}=4$

Методы теории массового обслуживания



m≤3 – заявок в очереди

Вар.8

СМО – это … $t_{заяв}=3$; $t_{об}=2$

Вар.9

СМО – это … $t_{заяв}=4$; $t_{об}=8$

Вар.10

СМО – это … $t_{заяв}=5$; $t_{об}=5$

Вар.11

СМО – это … $t_{заяв}=6$; $t_{об}=1$

Вар.12

СМО – это … $t_{заяв}=1$; $t_{об}=6$

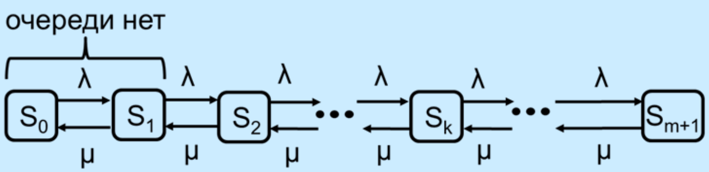
Вар.13

СМО – это … $t_{заяв}=9$; $t_{об}=1$

Вар.14

СМО – это … $t_{заяв}=1$; $t_{об}=9$

Методы теории массового обслуживания



m≤3 – заявок в очереди

Вар.15

СМО – это … $t_{заяв}$=23; $t_{об}$ =2

Вар.16

СМО – это … $t_{заяв}$=2; $t_{об}$ =23

Вар.17

СМО – это … $t_{заяв}$=7; $t_{об}$ =7,01

Вар.18

СМО – это … $t_{заяв}$=6,01; $t_{об}$ =6

Вар.19

СМО – это … $t_{заяв}$=1; $t_{об}$ =1,1

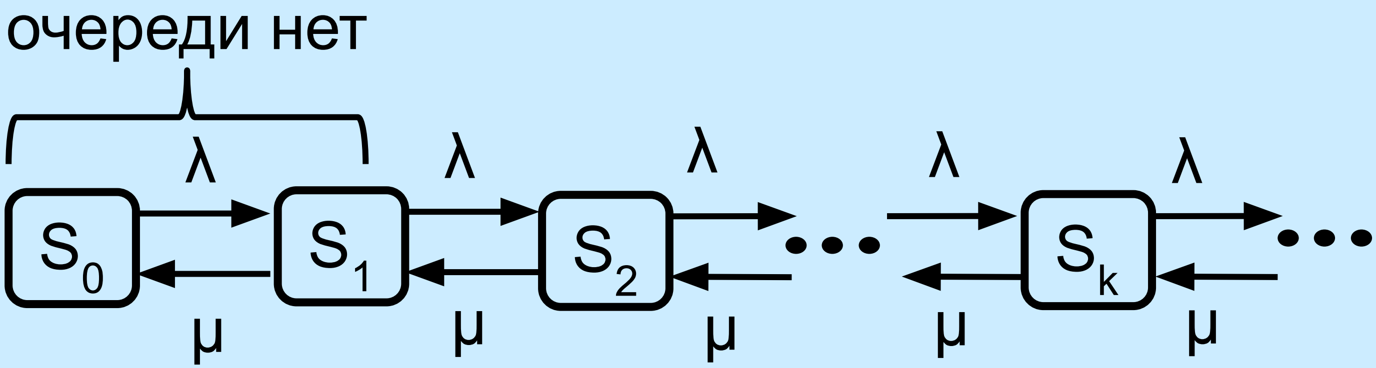
Вар.20

СМО – это … $t_{заяв}$=9,01; $t_{об}$ =9

Вар.21

СМО – это … $t_{заяв}$=1; $t_{об}$ =1

Одноканальная СМО с ожиданием, очередь не ограничена $m \to \infty$



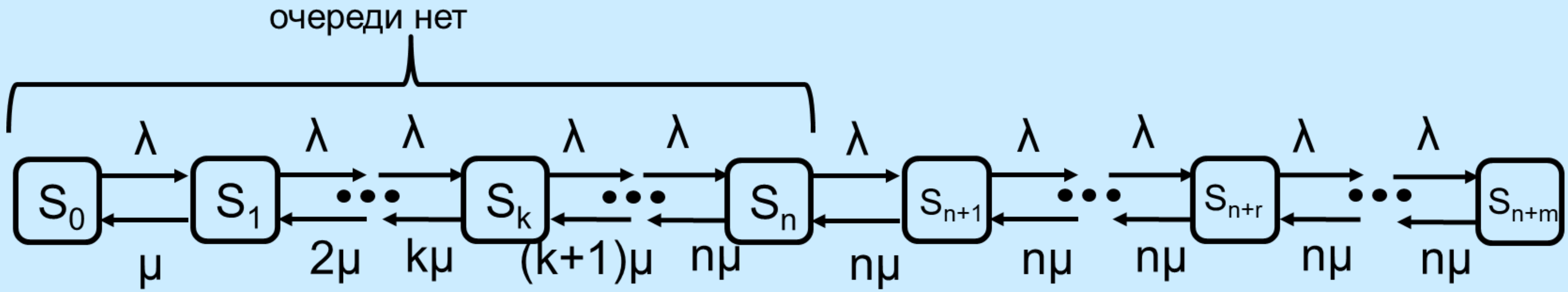
При $\rho < 1$ существует предельный установившийся режим

При $\rho \geq 1$ очередь растёт до бесконечности

$$P_k = \rho^k (1-\rho) \quad k=0,1,\ldots \qquad q=1 \quad A=\lambda \qquad \bar{r} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$\bar{k} = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad \overline{t_{\text{ож}}} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} \qquad \overline{t_{\text{сист}}} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} + \frac{1}{\mu}$$

Многоканальная СМО с ожиданием, очередь ограничена *m* заявками



S_0 – все каналы свободны

S_1 – занят 1 канал, остальные свободны

…

S_k – заняты k каналов, остальные свободны

…

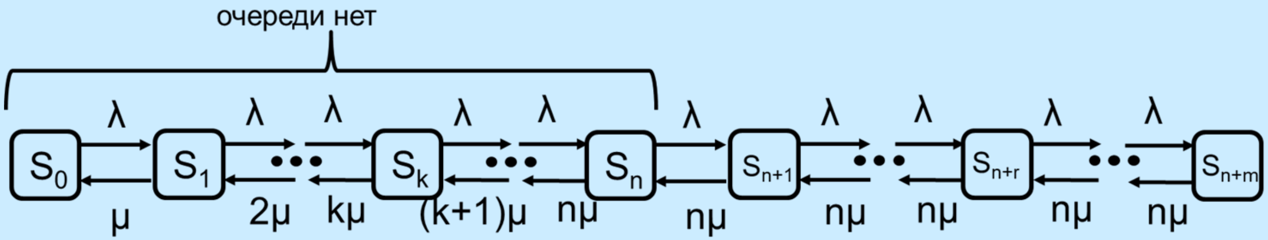
S_n – заняты все n каналов

S_{n+1} – заняты все n каналов, 1 заявка в очереди

S_{n+r} – заняты все n каналов, r заявок в очереди

S_{n+m} – заняты все n каналов, m заявок в очереди

Методы теории массового обслуживания



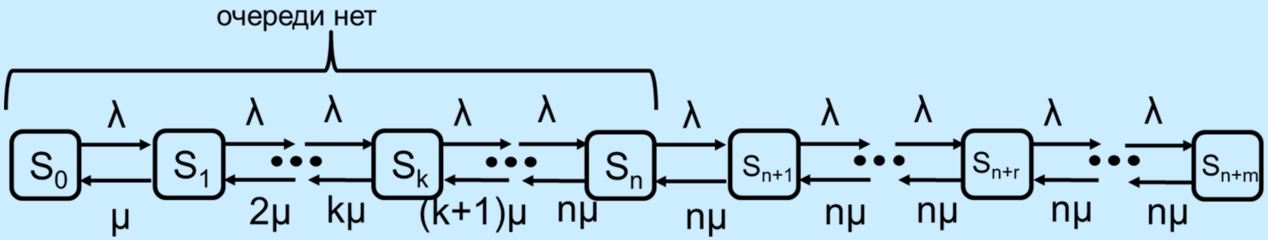
$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \qquad P_o = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\frac{\rho}{n} - (\frac{\rho}{n})^{m+1}}{1 - \frac{\rho}{n}}\right]^{-1}$$

$$P_1 = \frac{\rho}{1!} P_0 \qquad P_2 = \frac{\rho}{2!} P_0 \quad \cdots \quad P_n = \frac{\rho}{n!} P_0$$

$$P_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} P_0 \qquad P_{n+2} = \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} P_0 \qquad P_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} P_0$$

$$P_{\text{отк}} = P_{n+m} \qquad q = 1 - P_{отк} \qquad A = \lambda q$$

Методы теории массового обслуживания



$$\bar{z} = \frac{A}{\mu}$$ - среднее число занятых каналов $$\chi = \frac{\rho}{m}$$

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} P_0}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - (m+1)\chi + m\chi}{(1-\chi)}$$ - среднее число заявок, находящихся в очереди

$$\overline{k} = \overline{r} + \overline{z}$$ - среднее число заявок, связанных с системой

$$\bar{t}_{\text{ож}} = \frac{\bar{r}}{\lambda}$$ - среднее время ожидания заявки в очереди

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{t}_{\text{ож}} + \frac{q}{\mu}$$ - среднее время пребывания заявки в системе

АЗС - СМО с <u>двумя</u> каналами обслуживания (двумя колонками):

- площадка при станции допускает пребывание в очереди на заправку не более 3 машин одновременно (m = 3)
- поток машин для заправки λ = 2 (машины в минуту)
- процесс заправки продолжается в среднем $t_{об}$= 2 мин.

$n = 2$; $m = 3$; $\lambda = 2$; $\mu = 1/\, t_{об} = 0{,}5$; $\rho = 4$; $\chi = \rho/n = 2$.

$$P_o = \left[1 + \frac{4}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^2}{2!} \cdot \frac{2-2^4}{1-2}\right]^{-1} = 0{,}08 \qquad P_{отк} = \frac{4^5}{2^3 \cdot 2!} 0{,}08 = 0{,}512$$

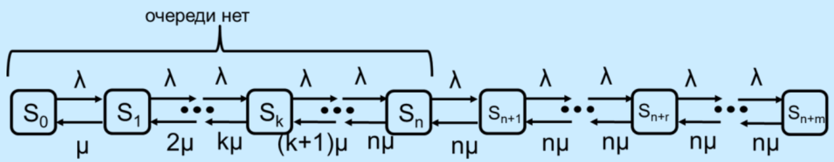
$$q = 1 - 0{,}512 = 0{,}488 \qquad A = 2 \cdot 0{,}488 = 0{,}976$$ машины в мин.

$$\bar{z} = 0{,}976 \qquad \bar{r} = 2{,}18 \qquad \bar{t}_{ож} = 1{,}09 \qquad \bar{t}_{сист} = 2{,}07$$

Задание 25: Привести пример <u>мноканальной</u> СМО <u>с ожиданиями</u> и рассчитать её параметры:

P_0 , P_k , q , A , $P_{отк}$, $\bar{r}$ $\bar{k}$ $\overline{t_{ож}}$ $\bar{z}$

Методы теории массового обслуживания



n=2 m=3

Вар.1

СМО – это … $t_{заяв}=2;\ t_{об}=2$

Вар.2

СМО – это … $t_{заяв}=1;\ t_{об}=2$

Вар.3

СМО – это … $t_{заяв}=2;\ t_{об}=1$

Вар.4

СМО – это … $t_{заяв}=3;\ t_{об}=4$

Вар.5

СМО – это … $t_{заяв}=4;\ t_{об}=3$

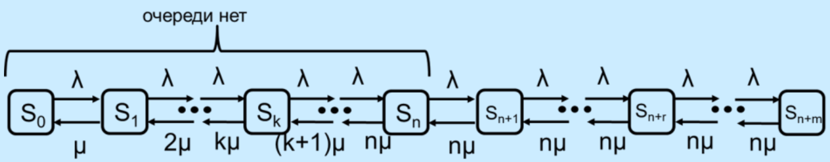
Вар.6

СМО – это … $t_{заяв}=5;\ t_{об}=1$

Вар.7

СМО – это … $t_{заяв}=2;\ t_{об}=4$

Методы теории массового обслуживания



n=2 m=3

Вар.8

СМО – это … $t_{заяв}$=3; $t_{об}$ =2

Вар.9

СМО – это … $t_{заяв}$=4; $t_{об}$ =8

Вар.10

СМО – это … $t_{заяв}$=5; $t_{об}$ =5

Вар.11

СМО – это … $t_{заяв}$=6; $t_{об}$ =1

Вар.12

СМО – это … $t_{заяв}$=1; $t_{об}$ =6

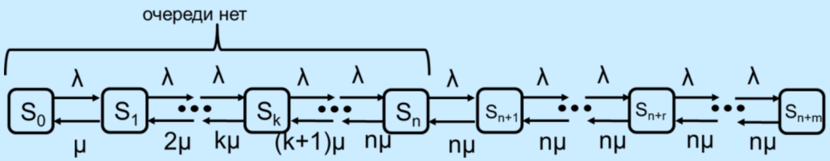
Вар.13

СМО – это … $t_{заяв}$=9; $t_{об}$ =1

Вар.14

СМО – это … $t_{заяв}$=1; $t_{об}$ =9

Методы теории массового обслуживания



n=2 m=3

Вар.15

СМО – это … $t_{заяв}=23;\ t_{об}=2$

Вар.16

СМО – это … $t_{заяв}=2;\ t_{об}=23$

Вар.17

СМО – это … $t_{заяв}=7;\ t_{об}=7{,}01$

Вар.18

СМО – это … $t_{заяв}=6{,}01;\ t_{об}=6$

Вар.19

СМО – это … $t_{заяв}=1;\ t_{об}=1{,}1$

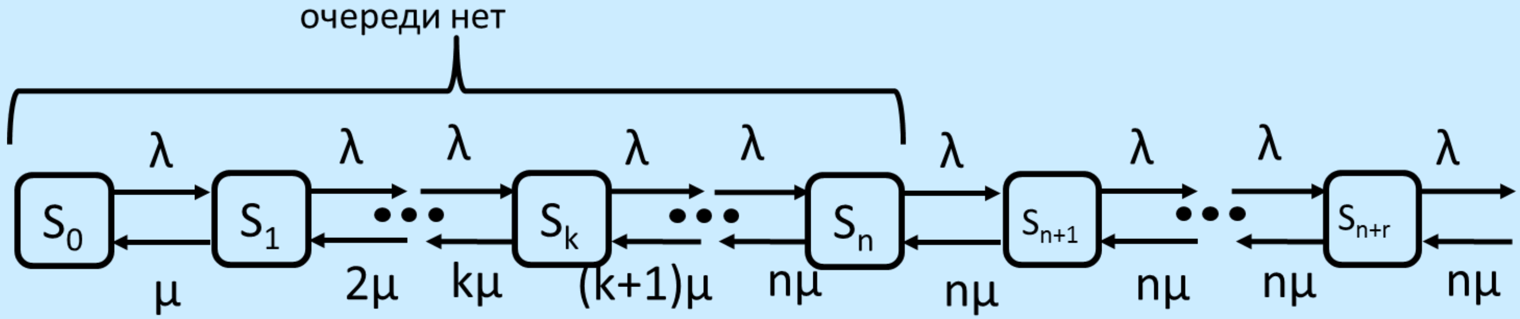
Вар.20

СМО – это … $t_{заяв}=9{,}01;\ t_{об}=9$

Вар.21

СМО – это … $t_{заяв}=1;\ t_{об}=1$

Многоканальная СМО с ожиданием, очередь не ограничена, $m \to \infty$



$$\chi = \frac{\rho}{m} < 1$$ - будет установившийся режим (очередь ограничена)

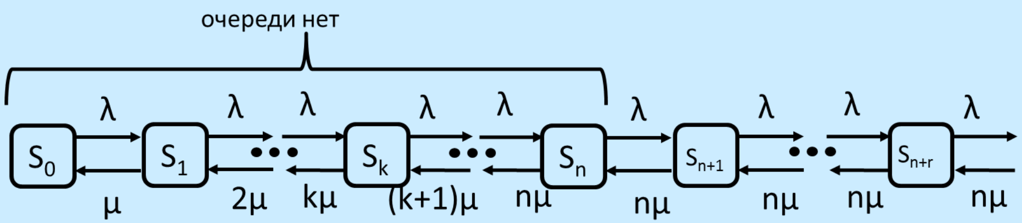
$$\chi = \frac{\rho}{m} \geq 1$$ - будет неустановившийся режим (очередь растет до бесконечности)

$$P_1 = \frac{\rho}{1!} P_0$$

$$P_o = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!\,(n-\rho)} \right]^{-1}$$

$$P_2 = \frac{\rho}{2!} P_0$$

Методы теории массового обслуживания



$$P_n = \frac{\rho}{n!} P_0 \qquad P_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} P_0$$

$$P_{n+2} = \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} P_0 \qquad P_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} P_0 \qquad P_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} P_0$$

Каждая заявка рано или поздно будет обслужена, поэтому:

$$P_{\text{отк}} = 0 \qquad q = 1 \qquad A = \lambda$$

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} P_0}{n \cdot n!\,(1-\chi)^2} \qquad \bar{t}_{\text{ож}} = \frac{\bar{r}}{\lambda} \qquad \bar{z} = \frac{A}{\mu} \qquad \overline{k} = \overline{r} + \overline{z}$$

АЗС - СМО с <u>двумя</u> каналами обслуживания (двумя колонками):

- другух АЗС в округе нет, очередь может неограниченно расти
- поток машин для заправки λ = 0,8 (машины в минуту)
- процесс заправки продолжается в среднем $t_{об}$= 2 мин.

$$n = 2;\ \lambda = 0{,}8;\ \mu = 1/\ t_{об} = 0{,}5;\ \rho = 1{,}6;\ \chi = \rho/n = 0{,}8.$$

$\chi < 1$, поэтому очередь не растет безгранично и существует предельный стационарный режим работы СМО

$$P_o = \left[1 + 1{,}6 + 1{,}28 + \frac{4{,}09}{2\cdot 0{,}4}\right]^{-1} = 0{,}111 \qquad A = \lambda = 0{,}8 \qquad \bar{z} = 1{,}6$$

P_1=0,178 P_2=0,142 P_3=0,114 P_1=0,091

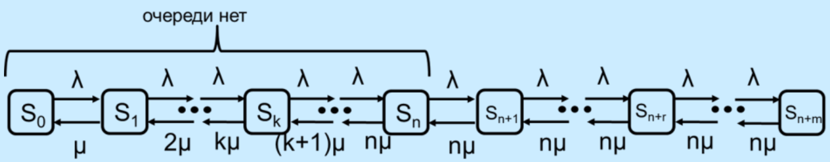
Вероятность отсутствия очереди у АЗС $P_0 + P_1 + P_2 \approx 0{,}431$

$\bar{r} = 0{,}71$ $\bar{k} = 2{,}31$ $\bar{t}_{ож} = 0{,}89$ $\bar{t}_{сист} = 2{,}89$

Задание 26: Привести пример <u>мноканальной</u> СМО <u>с ожиданиями</u> и рассчитать её параметры:

P_0 , P_k , q , A , $P_{отк}$, $\bar{r}$ $\bar{k}$ $\overline{t_{ож}}$ $\bar{z}$

Методы теории массового обслуживания



n=2 очередь не ограничена

Вар.1

СМО – это … $t_{заяв}=2;\ t_{об}=2$

Вар.2

СМО – это … $t_{заяв}=1;\ t_{об}=2$

Вар.3

СМО – это … $t_{заяв}=2;\ t_{об}=1$

Вар.4

СМО – это … $t_{заяв}=3;\ t_{об}=4$

Вар.5

СМО – это … $t_{заяв}=4;\ t_{об}=3$

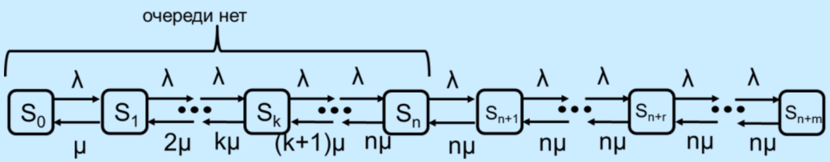
Вар.6

СМО – это … $t_{заяв}=5;\ t_{об}=1$

Вар.7

СМО – это … $t_{заяв}=2;\ t_{об}=4$

Методы теории массового обслуживания



n=2 очередь не ограничена

Вар.8

СМО – это … $t_{заяв}=3;\ t_{об}=2$

Вар.9

СМО – это … $t_{заяв}=4;\ t_{об}=8$

Вар.10

СМО – это … $t_{заяв}=5;\ t_{об}=5$

Вар.11

СМО – это … $t_{заяв}=6;\ t_{об}=1$

Вар.12

СМО – это … $t_{заяв}=1;\ t_{об}=6$

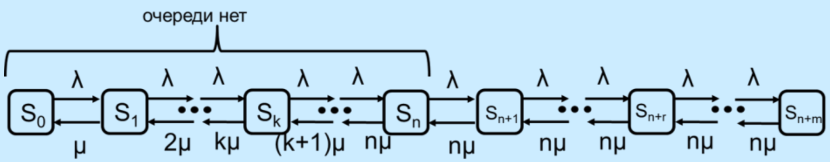
Вар.13

СМО – это … $t_{заяв}=9;\ t_{об}=1$

Вар.14

СМО – это … $t_{заяв}=1;\ t_{об}=9$

Методы теории массового обслуживания



n=2 очередь не ограничена

Вар.15

СМО – это … $t_{заяв}=23$; $t_{об}=2$

Вар.16

СМО – это … $t_{заяв}=2$; $t_{об}=23$

Вар.17

СМО – это … $t_{заяв}=7$; $t_{об}=7{,}01$

Вар.18

СМО – это … $t_{заяв}=6{,}01$; $t_{об}=6$

Вар.19

СМО – это … $t_{заяв}=1$; $t_{об}=1{,}1$

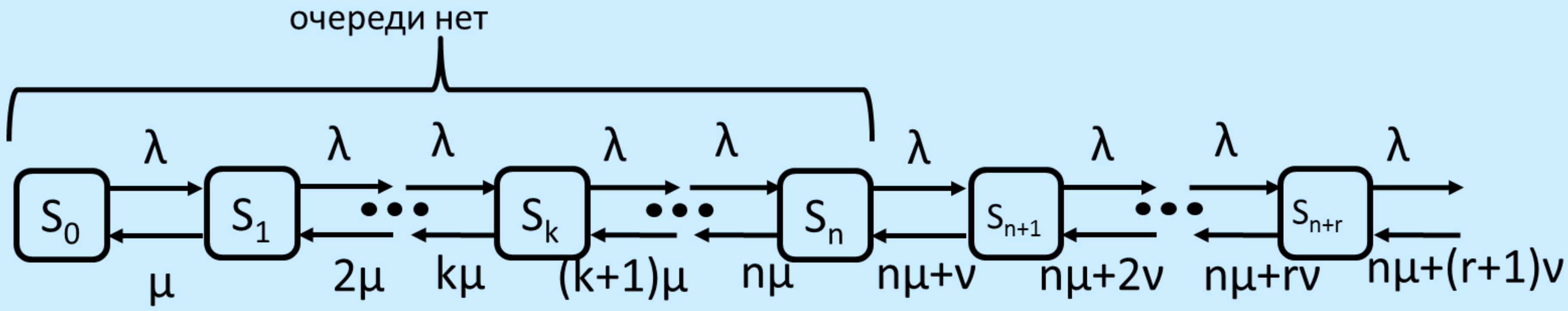
Вар.20

СМО – это … $t_{заяв}=9{,}01$; $t_{об}=9$

Вар.21

СМО – это … $t_{заяв}=1$; $t_{об}=1$

Многоканальная СМО с ограниченным ожиданием



$\bar{t}_{оч}$ - среднее время пребывания заявки в очереди

$\nu = \dfrac{1}{\bar{t}_{оч}}$ - интенсивность потока уходов

S_0 – все каналы свободны

S_1 – занят 1 канал

S_2 – заняты 2 канала

…

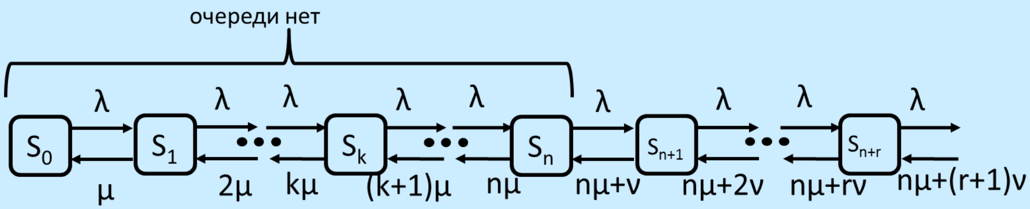
S_n – заняты все n каналов

S_{n+1} – заняты все n каналов, 1 заявка в очереди

…

S_{n+r} – заняты все n каналов, r заявок в очереди

Многоканальная СМО с ограниченным ожиданием



$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \qquad \beta = \frac{\nu}{\mu}$$

$$P_0 = \left\{ \underbrace{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\left[\frac{\rho}{n+\beta} + \frac{\rho^2}{(n+\beta)(n+2\beta)} + \ldots + \frac{\rho^r}{(n+\beta)(n+2\beta)\ldots(n+r\beta)}\right.}_{\text{достаточно до } \boldsymbol{r}} \left. + \ldots \right] \right\}^{-1}$$

$$P_1 = \frac{\rho}{1!}P_0 \qquad P_2 = \frac{\rho}{2!}P_0 \qquad P_n = \frac{\rho}{n!}P_0 \qquad P_{n+1} = \frac{\rho^n}{n!}\frac{\rho}{n+\beta}P_0$$

$$P_{n+1} = \frac{\rho^n}{n!}\frac{\rho^2}{(n+\beta)(n+2\beta)}P_0 \qquad P_{n+1} = \frac{\rho^n}{n!}\frac{\rho^r}{(n+\beta)(n+2\beta)\ldots(n+r\beta)}P_0$$

$P_{отк}$ не имеет смысла

$$\bar{r} = \frac{\rho}{\beta} - \frac{\bar{z}}{\beta} \qquad A = \lambda - \nu\bar{r} \qquad q = 1 - \frac{\nu\bar{r}}{\lambda} \qquad \bar{z} = 1 - \beta\bar{r}$$

Методы теории массового обслуживания

Дано:
статистика ДТП на территории субъекта РФ
производительность АС вертолетов по ведению АСР при ДТП

Найти:
требуемое количества АС вертолетов для спасения пострадавших в ДТП

Формулировка задачи:
- АС вертолеты рассматриваются в качестве системы массового обслуживания
- каждый из АС вертолетов является каналом обслуживания
- каждое ДТП, на которое прибывают АС вертолеты, является заявкой на обслуживание
- время обслуживания включает время прибытия, время АСР, время доставки в больницу

Определить число каналов обслуживания (АС вертолетов) при заданных характеристиках потока заявок (ДТП) и параметрах СМО (места базирования вертолетов, состав их оснащения)

СМО с ожиданиями:

- <u>при неограниченной длине очереди</u>
- при ограниченном времени ожидания

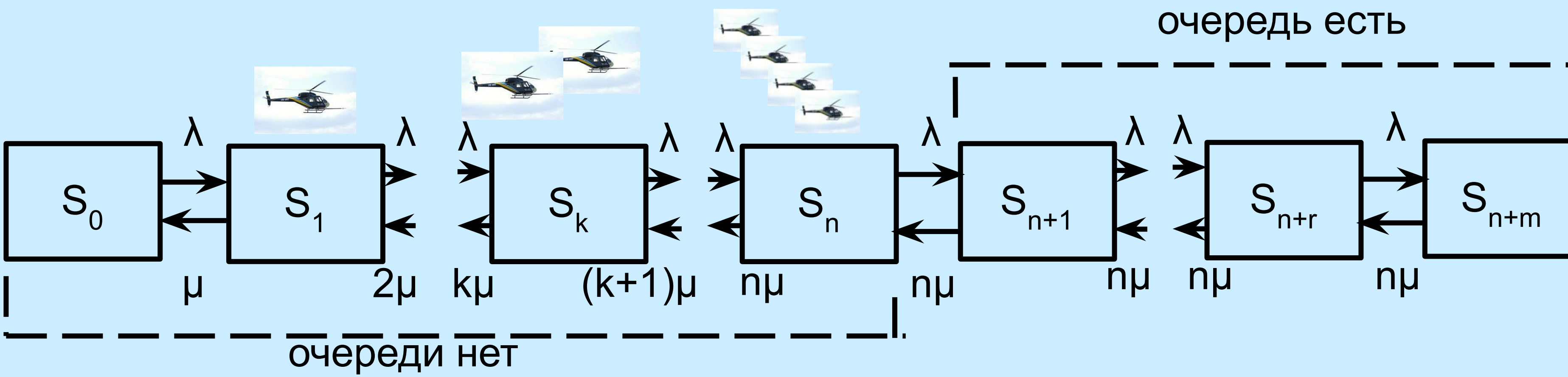


Схема гибели-размножения

S_i - состояния СМО (системы вертолетов);
S_0 - все каналы (вертолеты) свободны;
S_1 - занят один вертолет, остальные свободны;
S_k - заняты ***k*** вертолетов, ***(n-k)*** - свободны;
S_n - заняты все ***n*** вертолетов;
S_{n+1} - заняты все ***n*** вертолетов, одна заявка (ДТП) стоит в очереди;
S_{n+r} - заняты все ***n*** вертолетов, ***r*** ДТП стоит в очереди;
$\boldsymbol{\lambda}$ - интенсивность потока ДТП;
$\boldsymbol{\mu}$ - интенсивность потока обслуживания ДТП вертолетами.

Методы теории массового обслуживания

Интенсивность потока заявок $\lambda = \frac{1}{\overline{T_d}}$

$\overline{\mathrm{T}_d}$ - среднее время между отдельными ДТП (час)

Интенсивность потока обслуживания $\mu = \frac{1}{\overline{T_o}}$

$\overline{T_o}$ - среднее время «обслуживания» вертолетами ДТП (среднее время прибытия к месту ДТП, проведения АСР и оказания необходимой медицинской помощи, доставки пострадавших в л/у) (час)

Среднее время ожидания пострадавшими в ДТП спасателей и медицинских работников на вертолете для оказания необходимой помощи

$$\overline{t_{oj}} = \frac{\rho \cdot p_0}{n \cdot \mu \cdot n! \cdot \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2}$$

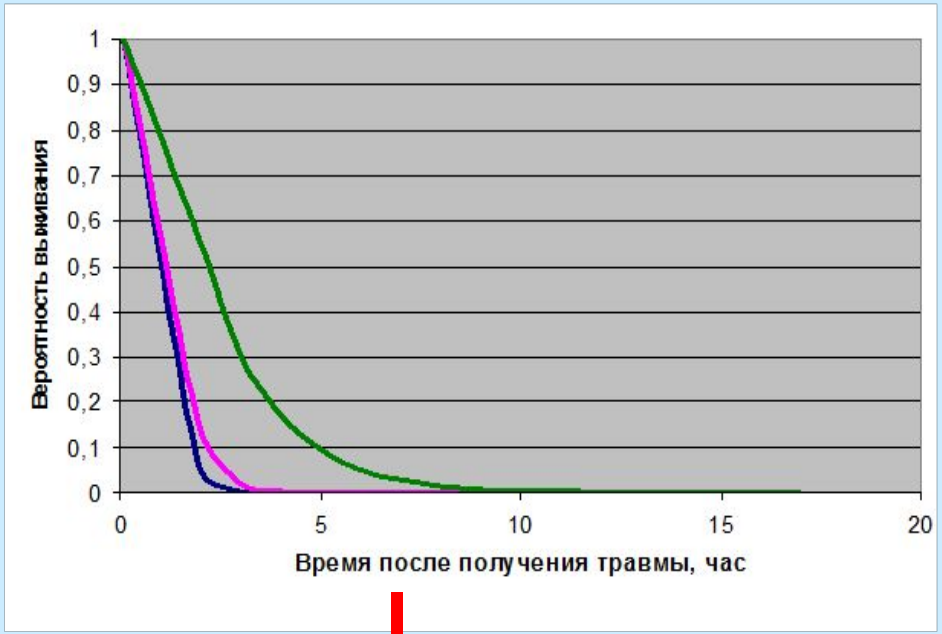
$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ - среднее число заявок, приходящих в СМО за среднее время обслуживания одной заявки

n - число вертолетов (ед.)

P_0 - вероятность того, что все каналы свободны

Методы теории массового обслуживания

Изменяя число вертолетов при неизменных характеристиках потока ДТП можно получить совокупность значений времени ожидания помощи



Если выполняется условие

время ожидания помощи на вертолете	≤	время выживания пострадавших

то найдено требуемое количество вертолетов.

Методы теории массового обслуживания

Пример СМО: **система противовоздушной обороны от дронов**:

- количество средств ПВО – **n**
- среднее время обслуживания (обстрела) средствами ПВО дронов $\boldsymbol{t_{обс}}$
- среднее время между появлениями дронов $\boldsymbol{t_{появ}}$

Вероятность противодействия любому дрону:

$$P_{\text{противод}} = P_{\text{обс}} \cdot P_{\text{пораж}}$$

$$P_{\text{пораж}} = f(\text{ТТХ}_{\text{средства ПВО}})$$

$$\lambda = \frac{1}{t_{\text{появ}}} \qquad \mu = \frac{1}{t_{\text{обс}}}$$

$$t_{\text{обс}} = t_{\text{обнаружения}} + t_{\text{удержания на цели}} + t_{\text{выстрела}}$$

Вероятность обстрела любого дрона:

Применять при самых широких условиях

$$P_{\text{обс}} = \min(1; \frac{1}{\lambda \cdot t_{\text{обс комплекса ПВО}} + e^{-\lambda \cdot t_{\text{зоны}}}})$$

$$t_{\text{обс комплекса ПВО}} = \frac{t_{\text{обс одного средства}}}{n} \qquad t_{\text{зоны}} = \frac{\text{Протяженность зоны}}{\text{средняя скорость дрона}}$$

Пример СМО с отказами и полной взаимопомощью между каналами: **система противовоздушной обороны от дронов**:

- количество средств ПВО – **n**
- среднее время обслуживания средствами ПВО дронов (обстрела) $t_{обс}$
- среднее время между появлениями дронов $t_{появ}$
- если все средства ПВО заняты уничтожением дронов, то следующий дрон не обслуживается
- все средства помогают друг другу (пропорциональной, произвольно и т. п.)

Вероятность обстрела любого дрона:

$$P_{\text{обс}} = \begin{cases} \dfrac{1-\chi^n}{1-\chi^{n+1}}, & \chi \neq 1 \\ \dfrac{n}{n+1}, & \chi = 1 \end{cases} \qquad \chi = \frac{\lambda}{n\mu}$$

Применять при $t_{\text{зоны}} \ll t_{\text{обс}}$

и массированных обстрелах

Пример СМО с отказами, взаимопомощью и отсутствием информации о результатах обслуживания: **система противовоздушной обороны от дронов**:

- количество средств ПВО – **n**
- среднее время обслуживания средствами ПВО дронов (обстрела) $t_{обс}$
- среднее время между появлениями дронов $t_{появ}$
- если все средства ПВО заняты уничтожением дронов, то следующий дрон не обслуживается
- все средства помогают друг другу (массированный обстрел, обстрел пропорционально количеству свободных средств ПВО)
- поражение дрона с вероятностью $P_{попад}$ (не понятно – попал или нет)

Вероятность обстрела любого дрона:

$$P_{обс} = 1 - q^n \sum_{k=0}^{n} \frac{P_k}{q^k} \qquad q = 1 - P_{попад} \qquad P_k = \frac{C_{\alpha+k-1}^{\alpha-1}}{C_{\alpha+n}^{\alpha}} \qquad \alpha = \frac{\lambda}{\mu}$$

При $P_{попад}=1$ $\quad P_{обс} = \dfrac{n}{n+\alpha}$

Применять при $t_{зоны} << t_{обс}$ и массированных обстрелах с непонятным за $t_{обс}$ результатом

Пример СМО с ожиданием, ограниченным временем пребывания заявки и упорядоченным обслуживанием: **система противовоздушной обороны от дронов**:

- количество средств ПВО – **n**
- среднее время обслуживания средствами ПВО дронов (обстрела) $\boldsymbol{t_{обс}}$
- среднее время между появлениями дронов $\boldsymbol{t_{появ}}$
- если все средства ПВО заняты уничтожением дронов, то следующий дрон обслуживается только, если средства ПВО освободятся за $\boldsymbol{t_{уход}}$
- все средства помогают друг другу (массированный обстрел, обстрел пропорционально количеству свободных средств ПВО)

Вероятность обстрела любого дрона:

$$P_{обс} = \frac{\mu}{\mu+\eta}\left(\frac{R(n-1,\alpha^*)}{R(n,\alpha^*)}\right) \qquad \alpha = \frac{\lambda}{\mu^*} \qquad \mu^* = \mu + \eta$$

$$\eta = \frac{1}{t_{уход}}$$

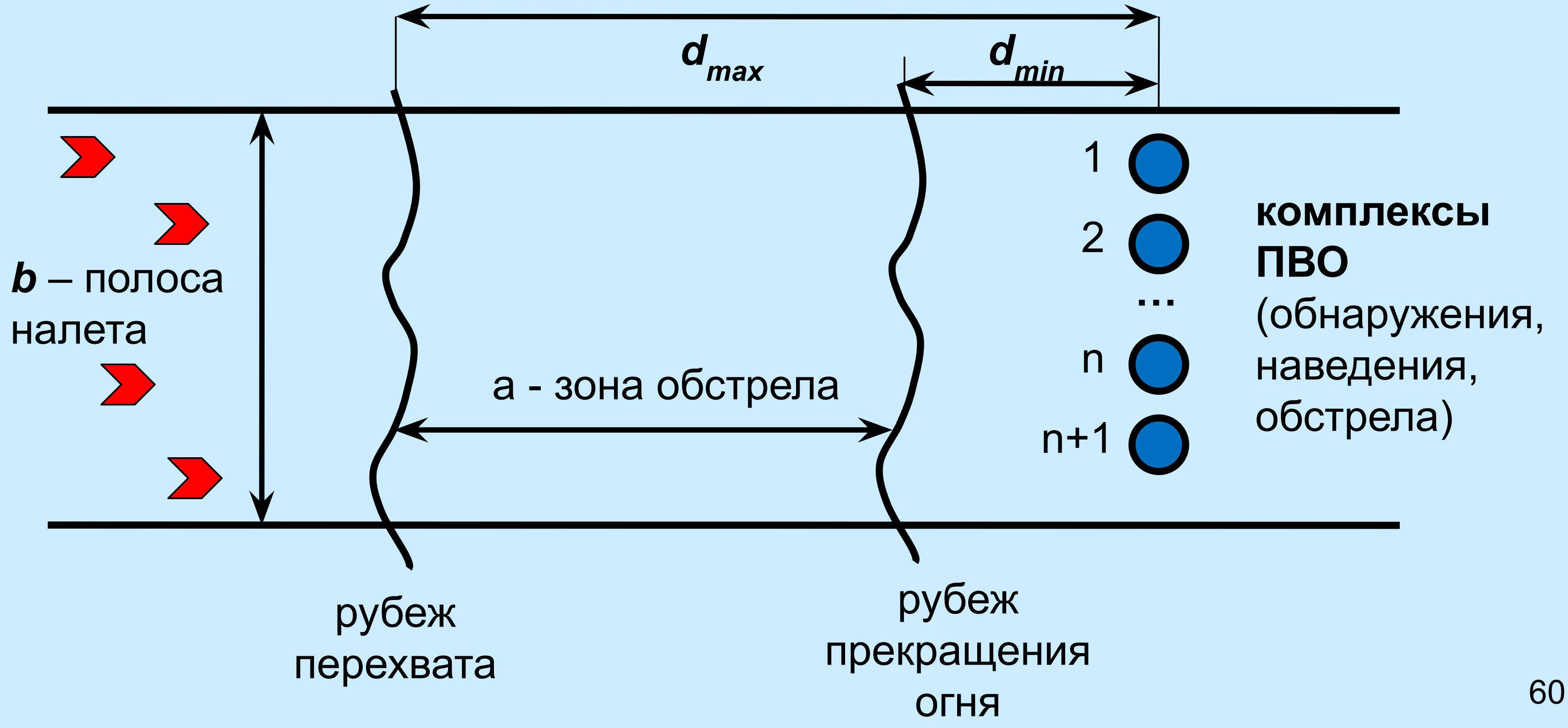
- интенсивность ухода дронов из зоны

Применять при $t_{зоны} \approx t_{обс}$, массированных обстрелах и ограниченном времени пребывания дрона в зоне обстрела

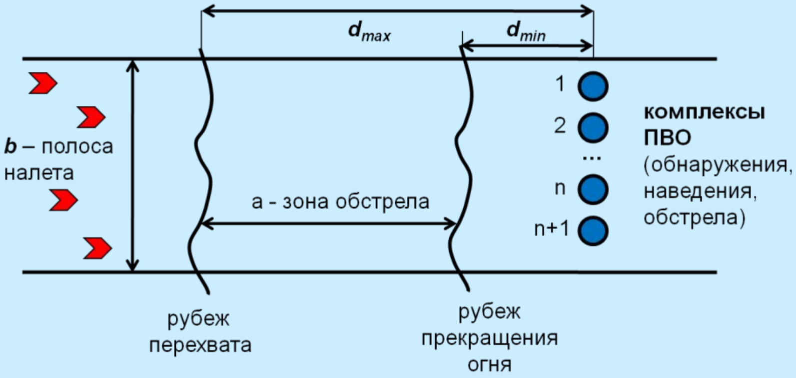
$R(n,\alpha^*)$ – табличная функция Пуассона

Пример СМО с ожиданием, ограниченным временем пребывания заявки и упорядоченным обслуживанием: **системa противовоздушной обороны от дронов**:

- количество средств ПВО – **n**
- среднее время обслуживания средствами ПВО дронов (обстрела) $t_{обс}$
- среднее время между появлениями дронов $t_{появ}$
- обстрелы не массированные



Методы теории массового обслуживания



μ – эффективная скорострельность одного комплекса

g – количество установок, связанных с одной станцией обнаружения

$\bar{\mu}$ – эффективная скорострельность одной установки в комплексе (связь с одной станцией)

p_1 – вероятность поражения одной установкой комплекса

$$\mu = \mu_1 \cdot g \cdot p_1$$

$$P_{комп} = 1 - e^{-\mu \cdot \bar{t}_{обс}}$$ - вероятность поражения одним комплексом

$$P_k = 1 - (1 - P_{комп})^k$$ - вероятность поражения ***k*** комплексами

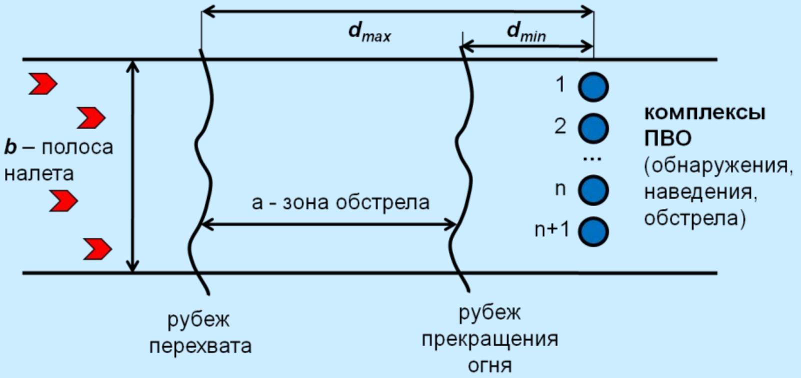
$$P_{обс} = \frac{\mu}{\mu^*} \cdot \frac{R(n-1, a^*)}{R(n, a^*)}$$

$$\eta = \frac{V}{a}$$ - поток уходов целей, *V* – скорость целей

$$R(x, y) = \sum_{k=0}^{x} \frac{y^k}{k!} \cdot e^{-y}$$

$$\mu^* = \mu + \eta$$ - интенсивность освобождения комплексов

Методы теории массового обслуживания



Общие выводы для моделирования ПВО в виде СМО

- при малой интенсивности налета взаимопомощь важна, при большой – нет
- границы использования СМО:

$$\lambda \ll \frac{\mu}{10}$$ - без взаимодействия

или

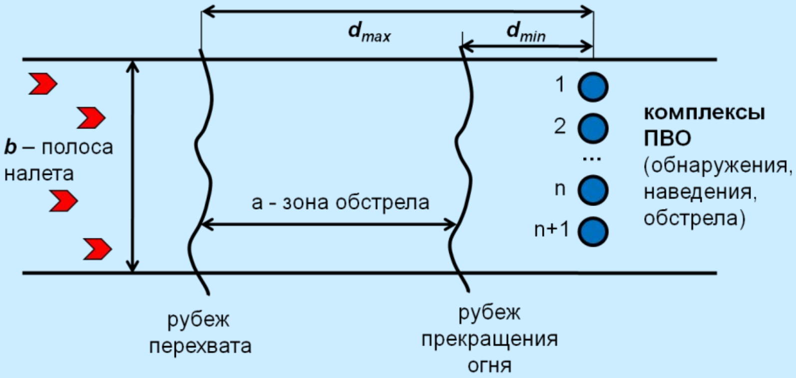
$$\lambda \ll \frac{l \cdot \mu}{10}$$ - с взаимодействием

● ● ●

$$\lambda \gg 10 n \mu$$

n – число каналов
l – максимальное число взаимодействующих каналов

Методы теории массового обслуживания



Общие выводы для моделирования ПВО в виде СМО

- стационарные решения для ПВО пригодны (ошибки не более 5-10%), когда время налета в 2-3 раза превышает среднее время обстрела одной цели

- при малых вероятностях поражения любая взаимопомощь (сосредоточение огня) увеличивает эффективность ПВО, при больших – практически нет

- в комплексах ПВО в 1-ом эшелоне целесообразно ставить более могущественное средство, во 2-ом и последующих – менее могущественные, но более точные

Методы теории массового обслуживания

Преимущества:

- все возможные варианты классических задач массового обслуживания сформулированы, выведены практически все формулы
- возможно получение нетривиальных, неочевидных практических результатов

Недостатки:

- предположения о простейшем потоке и показательном времени обслуживания
- трудоемкость для немарковских процессов резко возрастает (метод «псевдосостояний», имитационное моделирование СМО и т.п.)
- трудно получить новый научный результат, являющейся вкладом в науку
- неустойчивость решений, зависимость от точности исходных данных, например:

Дано:

- одна очередь и один канал обслуживания
- среднее значение моментов времени поступления заявок 1 минута
- среднее значение времени обслуживания заявок ***около*** 0,99 минуты

Найти: время ожидания в очереди

Решение:

I вариант: если время обслуживания брать точно 0,99 – то **очереди нет**!

II вариант: если время обслуживания брать приблизительно 0,99≈1 – то **время ожидания в очереди 98,01 минуты**!