Системы с цилиндрическим фазовым пространством

Выполнила: студентка 601 группы Шевцова Юлия Сергеевна

Содержание

1. Основные определения и свойства

Пусть дана система дифференциальных уравнений вида:

$$F(t,z) = \frac{dz}{dt}, z \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^1 \qquad (1)$$

$\theta_j = \frac{d_j^* z}{|d_j|}$ - угловая координата, где $d_j = \binom{2\pi}{0}, z \in \mathbb{R}^n$

$F(t,z)$ - вектор-функция, определенная на $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$

Введем в рассмотрение дискретную группу

$$\Gamma = \left\{ z = \sum_{j=1}^{m} k_j d_j \,\middle|\, k_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, m \right\}$$

Определение 1. Пространство $\mathbb{R}^n/\Gamma$, элементами которого являются классы вычетов $[z] = \{z + u | \forall u \in \Gamma, \mathrm{z} \in \mathbb{R}^n\}$, называют *цилиндрическим фазовым пространством*.

Определение 2. Решение $z(t)$ уравнения (1), называем *циклом первого рода*, если $z(t)$ не является

$$\boxed{F(t,z) = \frac{dz}{dt}, z \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^1}$$

состоянием равновесия и существует число $T > 0$:

$$z(t + T) = z(t), \forall\, t \in \mathbb{R}^1.$$

Определение 3. Решение $z(t)$ будем называть *циклом второго рода*, если существуют такие числа $T > 0$ и $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$, что выполнено соотношение

$$z(t + T) = z(t) + kd_j\ , \forall\, t \in \mathbb{R}^1, \text{ где } d_j, z \in \mathbb{R}^n$$

Определение 4. Систему (1) будем называть *дихотомичной* (dichotomic), если любое ее ограниченное на $[t_0,+\infty)$ решение стремится при $t \to +\infty$ к стационарному множеству.

Определение 5. Систему (1) будем называть *системой градиентного типа* (gradient-like), если любое ее решение стремится при $t \to +\infty$ к состоянию равновесия.

Определение 6. Будем говорить, что система (1) *устойчива по Бакаеву*, если для любого ее решения $z(t,t_0,z_0)$ существует число $T \geq t_0$ такое, что выполнены неравенства

$$\left|d_j^*(z(t_1,t_0,z_0) - z(t_2,t_0,z_0)\right| \leq \left|d_j\right|^2$$

при всех $t_1 \geq T,\ t_2 \geq T,\ j = 1, \dots, m.$

2. Элементы частотных методов исследования систем с цилиндрическим фазовым пространством

2.1. Метод периодических функций Ляпунова

$$F(t,z)=\frac{dz}{dt}, z\in\mathbb{R}^n, t\in\mathbb{R}^1$$

Теорема 3. *Предположим, что существует непрерывная функция* $V(z)$: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1$ *такая, что выполнены следующие условия*

1. $V(z+q)=V(z)$, $\forall q\in\Gamma$,
2. $V(z)+\sum_{j=1}^{m}(d_j^*)^2\to+\infty$ *при* $z\to+\infty$
3. *Для любого решения* $z(t)$ *системы* (1) *функция* $V(z(t))$ *является невозрастающей.*

Тогда любое решение $[z(t)]$ *системы* (1) *ограничено на* $[t_0,+\infty)$ *в цилиндрическом пространстве* $\mathbb{R}^n/\Gamma$.

$$\Gamma=\left\{z=\sum_{j=1}^{m}k_jd_j\,\middle|\,k_j\in\mathbb{Z}, j=1,\dots,m\right\}$$

Теорема 3. *Предположим, что существует непрерывная функция* $V(z)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ *такая, что выполнены следующие условия*

1. $V(z+q)=V(z),\ \forall q \in \Gamma$,
2. $V(z)+\sum_{j=1}^{m}(d_j^*)^2 \to +\infty$ *при* $z \to +\infty$
3. *Для любого решения* $z(t)$ *системы* (1) *функция* $V(z(t))$ *является невозрастающей.*

Тогда любое решение $[z(t)]$ *системы* (1) *ограничено на* $[t_0,+\infty)$ *в цилиндрическом пространстве* $\mathbb{R}^n/\Gamma$.

Доказательство

Из условия 1) теоремы следует, что можно определить функцию $V([z])$: $\mathbb{R}^n/\Gamma \to \mathbb{R}^1$ по формуле $V([z])= V(z)$. При этом из условия 2) следует, что $V([z]) \to \infty$ при $[z] \to \infty$. (3)

Предположим, что решение $[z(t)]$ не является ограниченным на $[t_0,+\infty)$. В этом случае существует последовательность $t_k \to +\infty$ такая, что

$$[z(t_k)] \to \infty \text{ при } k \to \infty$$

Отсюда и из условия (3) следует, что

$$V([z(t_k)]) \to +\infty \text{ при } k \to \infty$$

Последнее противоречит условию 3) теоремы. Полученное противоречие доказывает ограниченность $[z(t)]$ в $\mathbb{R}^n/\Gamma$. ■

1. $V(z+q)=V(z),\ \forall q \in \Gamma$,
2. $V(z)+\sum_{j=1}^{m}(d_j^*)^2 \to +\infty$ *при* $z \to +\infty$
3. *Для любого решения* $z(t)$ *системы* (1) *функция* $V(z(t))$ *является невозрастающей.*

Теорема 4. *Предположим, что существует* $V(z)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ *такая, что выполняются условия* 1)-3) *теоремы* 3 *и условие*

Если $V(z(t)) \equiv X(z(0))$, *то* $z(t) \equiv const$.

Тогда система (1) является системой градиентного типа.

$$F(t,z) = \frac{dz}{dt}, z \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^1$$

Теорема 4. *Предположим, что существует* $V(z)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ *такая, что выполняются условия* 1)-3) *теоремы* 3 *и условие*
Если $V(z(t)) \equiv X(z(0))$, *то* $z(t) \equiv const$.
Тогда система (1) является системой градиентного типа.

Доказательство

Напомним, что точка $[p]$ называется - предельной для траектории $[z(t)]$, если существует последовательность $t_k \to \infty$ такая, что

$$[p] = \lim_{k\to\infty}[z(t_k)]$$

Напомним также, что через -предельную точку $[p]$ проходит траектория $[y(t)]$, целиком состоящая из ω-предельных точек траектории $[z(t)]$ (этот факт обычно называют инвариантностью ω-предельного множества). Из теоремы 3 следует ограниченность $[z(t)]$ при $t \geq 0$. Отсюда и из непрерывности $V([z(t)])$ следует ограниченность при $t \geq 0$ функции $V[z(t)]$. Поэтому из условия 3) следует существование предела

$$\lim_{t\to+\infty} V([z(t)]) = V_0$$

Но тогда $V([y(t)]) \equiv V_0$. В этом случае из условия 4) получим, что $y(t) \equiv const$. Из этого тождестве и из изолированности точек стационарного множества системы (2) получим, что это система является системой градиентного типа. ■

Рассмотрим теперь основные особенности применения теорем 3 и 4 к системам вида

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + b\psi(\sigma)\\ \dot{\sigma} &= c^* + \rho\psi(\sigma)\end{aligned} \qquad (4)$$

где A – постоянная $n \times$-матрица, b и c – постоянные $n \times n$-векторы, ρ – число, $\psi(\sigma)$ – 2π-периодическая функция, удовлетворяющие соотношениям

$$\rho = -aL$$

$$W(p) - Lc^*(A - pI)^{-1}b$$

$$\psi(\sigma) = \varphi(\sigma) - \frac{\omega_1(0) - \omega_2(0)}{L(a + W(0))}$$

Для таких систем хорошо известна процедура построения функций ляпуновского типа вида «квадратичная форма от координат (т.е. от вектора z) и, возможно, от нелинейности (т.е. от $\psi(\sigma)$) плюс интеграл от нелинейности»:

$$V = \begin{pmatrix} z \\ \psi \end{pmatrix}^* H \begin{pmatrix} z \\ \psi \end{pmatrix} + \int_0^\sigma \psi(\sigma)d\sigma$$

Здесь H – некоторая симметричная $(n + 1) \times (n + 1)$-матрица.

С помощью такого вида функций для систем (4) с угловой координатой σ можно получить условие дихетомичности. Условие градиентности могут быть получены таким методом только при условии

$$\dot{z} = Az + b\psi(\sigma)$$
$$\dot{\sigma} = c^* + \rho\psi(\sigma)$$

$$\int_0^{2\pi} \psi(\sigma)d\sigma = 0$$

В таком случае, когда это соотношение не выполнено, была разработана процедура построения периодических ляпуновских функций вида

$$V = \begin{pmatrix} z \\ \psi \end{pmatrix}^* H \begin{pmatrix} z \\ \psi \end{pmatrix} + \int_0^{\sigma} F(\sigma)d\sigma$$

где $F(\sigma) = \psi(\sigma) - v|\psi(\sigma)|$

Число v выбирается так, чтобы функция V была периодичной по σ:

$$v = \int_0^{2\pi} \psi(\sigma)d\sigma \left(\int_0^{2\pi} |\psi(\sigma)|d\sigma \right)^{-1}.$$

2.2. Метод положительно инвариантных конусных сеток

$$F(t,z) = \frac{dz}{dt}, z \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^1$$

Метод использует только следующие 2 свойства системы:

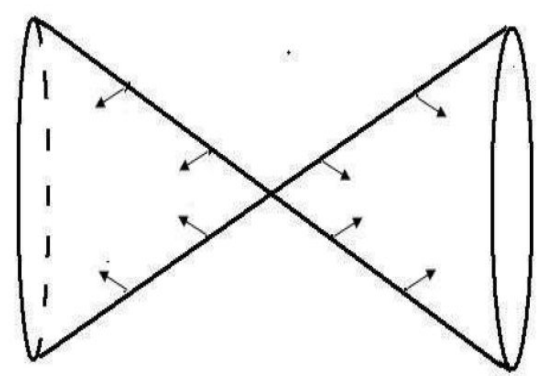
1. Наличие положительно инвариантного одномерного квадратного конуса;

2. Инвариантность векторного поля системы (1) при сдвигах на вектор d_j.

Пусть $\Omega = \{z^* H z \leq 0\}$ – конус, где H – симметричная матрица, имеющая одно отрицательное и остальные отрицательные собственные значения, обладает свойством положительной инвариантности. Последнее означает, что на границе конуса $\partial\Omega = \{zHz = 0\}$ выполнено соотношение

$$\dot{V}\big(z(t)\big) < 0$$

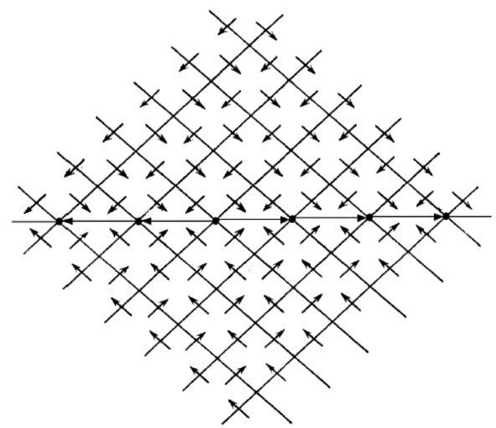
при всех $z(t)$ таких, что $z(t) \neq 0$, $z(t) \in \partial\Omega$



За счет второго свойства – инвариантности векторного поля относительно сдвига на векторы $kd_j,\ k \in \mathbb{Z}$ – размножим этот конус таким образом:

$$\Omega_k = \left\{\left(z - kd_j\right)H(z - kd_j) \le 0\right\}.$$

Поскольку для каждого из конусов Ω_k свойство положительной инвариантности сохраняется, получаем положительно инвариантную конусную сетку



Если конус Ω таков, что он имеет только одну точку пересечения с гиперплоскостью $\left\{d_j^* z = 0\right\}$ и все решения $z(t)$, для которых в момент t выполнено неравенство

$$z(t)^* Hz(t)\kappa \ge 0$$

обладают свойством $\dot{V}\left(z(t)\right) \le -\varepsilon|z(t)|^2$, (здесь ε – некоторое положительное число), то из рисунка видно что система устойчива по Бакаеву.

Таким образом, предложенный метод прост и уникален. Практическую эффективность ему доставляет частотная теорема Якубовича-Калмана.

2.3. Метод нелокального сведения

Опишем основные этапы распространения теорем Трикоми и его последствий, полученных для уравнения

$$\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \psi(\theta) = 0, \qquad (5)$$

На системы более высокой размерности.

Рассмотрим вначале систему

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= Az + b\psi(\sigma) \\ \frac{d\sigma}{dt} &= c^{*}z + \rho\psi(\sigma) \end{aligned}, \qquad (6)$$

описывающую типовую систему ФАП.

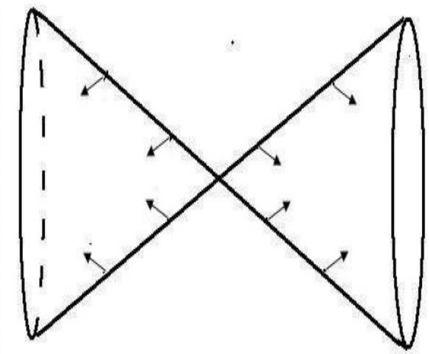
Предположим, что $\psi(\sigma)$ – 2π-периодична, A – устойчивая $n \times$-матрица, b и c – постоянные n-векторы, ρ – число.

Рассмотрим случай, когда уравнение (5) или эквивалентная ему система

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= -\alpha\eta - \psi(\theta) \\ \dot{\theta} &= \eta \end{aligned} \qquad (7)$$

Является системой градиентного типа. В этом случае можно показать, что эквивалентного (7) уравнения

$$\frac{d\eta}{d\theta} = \frac{-\alpha\eta - \psi(\theta)}{\eta} \qquad (8)$$



Существует решение $\eta(\theta)$ такое, что $\eta(\theta_0) = 0,\ \eta(\theta) \neq 0, \forall\theta \neq \theta_0,$

$$\lim_{\theta\to+\infty} \eta(\theta) = -\infty, \quad \lim_{\theta\to-\infty} \eta(\theta) = +\infty$$

Здесь θ_0 – некоторое число такое, что $\psi(\theta_0) = 0,\ \psi'(\theta_0) < 0.$

Рассмотрим теперь функцию

$$V(z,\sigma) = z^*Hz - \frac{1}{2}\eta(\sigma)^2,$$

Которая индуцирует конус $\Omega = \{V(z,\sigma) \leq 0\}$ в фазовом пространстве $\{z,\sigma\}$. Это будет некоторое обобщение квадратичного конуса. Покажем, что при некоторых условиях такой конус будет положительно инвариантным. Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} + 2\lambda V &= 2z^*H[(A+\lambda I)z + b\psi(\sigma)] + \lambda\eta(\sigma)^2 - \eta(\sigma)\frac{d\eta(\sigma)}{d\sigma}(c^*z + \rho\psi(\sigma)) \\ &= 2z^*H[(A+\lambda I)z + b\psi(\sigma)] - \lambda\eta(\sigma)^2 + \psi(\sigma)(c^*z + \rho\psi(\sigma)) \\ &+ \alpha\eta(\sigma)(c^*z + \rho\psi(\sigma)) \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\eta(\sigma)$ удовлетворяет уравнению (8).

Заметим, что если выполнены частотные неравенства

$$\begin{gathered}\mathrm{Re}K(i\omega-\lambda)-\varepsilon|K(i\omega-\lambda)|^2>0\\ \lim_{\omega\to\infty}\omega^2(\mathrm{Re}K(i\omega-\lambda)-\varepsilon|K(i\omega-\lambda)|^2)>0\end{gathered}\qquad(9)$$

где $K(p)=c^*(A-pI)^{-1}b-\rho$, то по частотной теореме Якубовича-Калмана существует H такая, что для всех $z\neq 0$ и ξ выполнено отношение

$$2z^*H[(A+\lambda I)z+b\xi]+\xi(c^*z+\rho\xi)+\varepsilon|(c^*z+\rho\xi)|^2<0$$

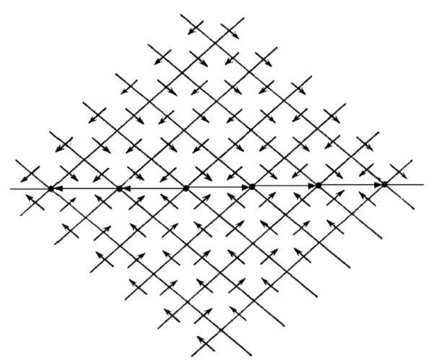
Здесь ε – некоторое положительное число. Если же $A+\lambda I$ – устойчивая матрица, то $H>0$.

Таким образом, если $A+\lambda I$ – устойчива, выполнены (9) и $\alpha^2\leq 4\lambda\varepsilon$, то

$$\frac{dV}{dt}+2\lambda V<0,\qquad \forall z(t)\neq 0,$$

и, следовательно, Ω – положительно инвариантный конус.

Также, как и в предыдущем пункте, можно произвести разложение конусов $\Omega_k=\{z^*Hz-\frac{1}{2}\eta_k(\sigma)^2\leq 0\}$ и построить из них конусную сетку.



Здесь $\eta_k(\sigma)$ - сдвинутое по оси σ на величину $2k\pi$ решение $\eta(\sigma)$.

Конусная сетка доказывает ограниченность решений системы (6) на интервале $(0,+\infty)$.

В сделанных предположениях имеет место также дихотомичность. Это доказывается с помощью ляпуновской функции

$$\begin{gathered}\mathrm{Re}K(i\omega-\lambda)-\varepsilon|K(i\omega-\lambda)|^2>0\\ \lim_{\omega\to\infty}\omega^2\left(\mathrm{Re}K(i\omega-\lambda)-\varepsilon|K(i\omega-\lambda)|^2\right)>0\end{gathered}$$

$$\int_0^{\sigma} \ldots(\sigma)d\sigma.$$

$$\begin{gathered}\dot\eta=-\alpha\eta-\psi(\theta)\\ \dot\theta=\eta\end{gathered}$$

Таким образом, нами доказан следующий результат.

Теорема 5. *Если для некоторых* $\lambda>0$ и $\varepsilon>0$ *матрица* $A+\lambda I$ *устойчива, выполнены условия* (9) *и система* (7) *с* $\alpha=2\sqrt{\lambda\varepsilon}$ *является системой градиентного типа, то и система* (6) *так же является системой градиентного типа.*

$$\begin{gathered}\frac{dz}{dt}=Az+b\psi(\sigma)\\ \frac{d\sigma}{dt}=c^*z+\rho\psi(\sigma)\end{gathered},$$

Спасибо за внимание!