

Выполнила:

студентка 601

группы

Шевцова Юлия

Сергеевна

Системы с цилиндрическ им фазовым пространством

Содержание

- 1. Основные определения и свойства*
- 2. Элементы частотных методов исследования систем с цилиндрическим фазовым пространством*
 - 2.1. Метод периодических функций Ляпунова*
 - 2.2. Метод положительно инвариантных конусных сеток*
 - 2.3. Метод нелокального сведения*

1. Основные определения и свойства

Пусть дана система дифференциальных уравнений вида:

$$F(t, z) = \frac{dz}{dt}, z \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^1 \quad (1)$$

$\theta_j = \frac{d_j^* z}{|d_j|}$ - угловая координата, где $d_j = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}$, $z \in \mathbb{R}^n$

$F(t, z)$ - вектор-функция, определенная на $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$

Введем в рассмотрение дискретную группу

$$\Gamma = \left\{ z = \sum_{j=1}^m k_j d_j \mid k_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, m \right\}$$

Определение 1. Пространство \mathbb{R}^n / Γ , элементами которого являются классы вычетов $[z] = \{z + u \mid \forall u \in \Gamma, z \in \mathbb{R}^n\}$, называют *цилиндрическим фазовым пространством*.

Определение 2. Решение $z(t)$ уравнения (1), называем *циклом первого рода*, если $z(t)$ не является

состоянием равновесия и существует число $T > 0$:

$$F(t, z) = \frac{dz}{dt}, z \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^1$$

$$z(t + T) = z(t), \forall t \in \mathbb{R}^1.$$

Определение 3. Решение $z(t)$ будем называть *циклом второго рода*, если существуют такие числа $T > 0$ и $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$, что выполнено соотношение

$$z(t + T) = z(t) + kd_j, \forall t \in \mathbb{R}^1, \text{ где } d_j, z \in \mathbb{R}^n$$

Определение 4. Систему (1) будем называть *дихотомичной* (dichotomic), если любое ее ограниченное на $[t_0, +\infty)$ решение стремится при $t \rightarrow +\infty$ к стационарному множеству.

Определение 5. Систему (1) будем называть *системой градиентного типа* (gradient-like), если любое ее решение стремится при $t \rightarrow +\infty$ к состоянию равновесия.

Определение 6. Будем говорить, что система (1) *устойчива по Бакаеву*, если для любого ее решения $z(t, t_0, z_0)$ существует число $T \geq t_0$ такое, что выполнены неравенства

$$|d_j^*(z(t_1, t_0, z_0) - z(t_2, t_0, z_0))| \leq |d_j|^2$$

при всех $t_1 \geq T, t_2 \geq T, j = 1, \dots, m$.

2. Элементы частотных методов исследования систем с цилиндрическим фазовым пространством

2.1. Метод периодических функций Ляпунова

Теорема 3. Предположим, что существует непрерывная функция $V(z): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ такая, что выполнены следующие условия

1. $V(z+q)=V(z), \forall q \in \Gamma,$
2. $V(z)+\sum_{j=1}^m (d_j^*)^2 \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow +\infty$
3. Для любого решения $z(t)$ системы (1) функция $V(z(t))$ является невозрастающей.

Тогда любое решение $[z(t)]$ системы (1) ограничено на $[t_0, +\infty)$ в цилиндрическом пространстве \mathbb{R}^n / Γ .

$$F(t, z) = \frac{dz}{dt}, z \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^1$$

$$\Gamma = \left\{ z = \sum_{j=1}^m k_j d_j \mid k_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, m \right\}$$

Теорема 3. Предположим, что существует непрерывная функция $V(z): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ такая, что выполнены следующие условия

1. $V(z+q)=V(z), \forall q \in \Gamma,$

2. $V(z)+\sum_{j=1}^m (d_j^*)^2 \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow +\infty$

3. Для любого решения $z(t)$ системы (1) функция $V(z(t))$ является невозрастающей.

Тогда любое решение $[z(t)]$ системы (1) ограничено на $[t_0, +\infty)$ в цилиндрическом пространстве \mathbb{R}^n/Γ .

Доказательство

Из условия 1) теоремы следует, что можно определить функцию $V([z]): \mathbb{R}^n/\Gamma \rightarrow \mathbb{R}^1$ по формуле $V([z])=V(z)$. При этом из условия 2) следует, что $V([z]) \rightarrow \infty$ при $[z] \rightarrow \infty$. (3)

Предположим, что решение $[z(t)]$ не является ограниченным на $[t_0, +\infty)$. В этом случае существует последовательность $t_k \rightarrow +\infty$ такая, что

$$[z(t_k)] \rightarrow \infty \text{ при } k \rightarrow \infty$$

Отсюда и из условия (3) следует, что

$$V([z(t_k)]) \rightarrow +\infty \text{ при } k \rightarrow \infty$$

Последнее противоречит условию 3) теоремы. Полученное противоречие доказывает ограниченность $[z(t)]$ в \mathbb{R}^n/Γ . ■

1. $V(z+q)=V(z), \forall q \in \Gamma,$
2. $V(z)+\sum_{j=1}^m(d_j^*)^2 \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow +\infty$
3. Для любого решения $z(t)$ системы (1) функция $V(z(t))$ является невозрастающей.

Теорема 4. Предположим, что существует $V(z): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ такая, что выполняются условия 1)-3) теоремы 3 и условие

Если $V(z(t)) \equiv X(z(0))$, то $z(t) \equiv const.$

Тогда система (1) является системой градиентного типа.

$$F(t, z) = \frac{dz}{dt}, z \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^1$$

Теорема 4. Предположим, что существует $V(z): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ такая, что выполняются условия 1)-3) теоремы 3 и условие

Если $V(z(t)) \equiv X(z(0))$, то $z(t) \equiv \text{const}$.

Тогда система (1) является системой градиентного типа.

Доказательство

Напомним, что точка $[p]$ называется - предельной для траектории $[z(t)]$, если существует последовательность $t_k \rightarrow \infty$ такая, что

$$[p] = \lim_{k \rightarrow \infty} [z(t_k)]$$

Напомним также, что через -предельную точку $[p]$ проходит траектория $[y(t)]$, целиком состоящая из ω -предельных точек траектории $[z(t)]$ (этот факт обычно называют инвариантностью ω -предельного множества).

Из теоремы 3 следует ограниченность $[z(t)]$ при $t \geq 0$. Отсюда и из непрерывности $V([z(t)])$ следует ограниченность при $t \geq 0$ функции $V[z(t)]$. Поэтому из условия 3) следует существование предела

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V([z(t)]) = V_0$$

Но тогда $V([y(t)]) \equiv V_0$. В этом случае из условия 4) получим, что $y(t) \equiv \text{const}$. Из этого тождестве и из изолированности точек стационарного множества системы (2) получим, что это система является системой градиентного типа. ■

Рассмотрим теперь основные особенности применения теорем 3 и 4 к системам вида

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + b\psi(\sigma) \\ \dot{\sigma} &= c^* + \rho\psi(\sigma)\end{aligned}\quad (4)$$

где A – постоянная $n \times n$ -матрица, b и c – постоянные $n \times 1$ -векторы, ρ – число, $\psi(\sigma)$ – 2π -периодическая функция, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned}\rho &= -aL \\ W(p) &= Lc^*(A - pI)^{-1}b \\ \psi(\sigma) &= \varphi(\sigma) - \frac{\omega_1(0) - \omega_2(0)}{L(a + W(0))}\end{aligned}$$

Для таких систем хорошо известна процедура построения функций ляпуновского типа вида «квадратичная форма от координат (т.е. от вектора z) и, возможно, от нелинейности (т.е. от $\psi(\sigma)$) плюс интеграл от нелинейности»:

$$V = \begin{pmatrix} z \\ \psi \end{pmatrix}^* H \begin{pmatrix} z \\ \psi \end{pmatrix} + \int_0^\sigma \psi(\sigma) d\sigma$$

Здесь H – некоторая симметричная $(n + 1) \times (n + 1)$ -матрица.

С помощью такого вида функций для систем (4) с угловой координатой σ можно получить условие дихотомичности. Условие градиентности могут быть получены таким методом только при условии

$$\int_0^{2\pi} \psi(\sigma) d\sigma = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + b\psi(\sigma) \\ \dot{\sigma} &= c^* + \rho\psi(\sigma) \end{aligned}$$

В таком случае, когда это соотношение не выполнено, была разработана процедура построения периодических ляпуновских функций вида

$$V = \begin{pmatrix} z \\ \psi \end{pmatrix}^* H \begin{pmatrix} z \\ \psi \end{pmatrix} + \int_0^{\sigma} F(\sigma) d\sigma$$

где $F(\sigma) = \psi(\sigma) - v|\psi(\sigma)|$

Число v выбирается так, чтобы функция V была периодичной по σ :

$$v = \int_0^{2\pi} \psi(\sigma) d\sigma \left(\int_0^{2\pi} |\psi(\sigma)| d\sigma \right)^{-1}.$$

2.2. Метод положительно инвариантных

конусных сеток

$$F(t, z) = \frac{dz}{dt}, z \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^1$$

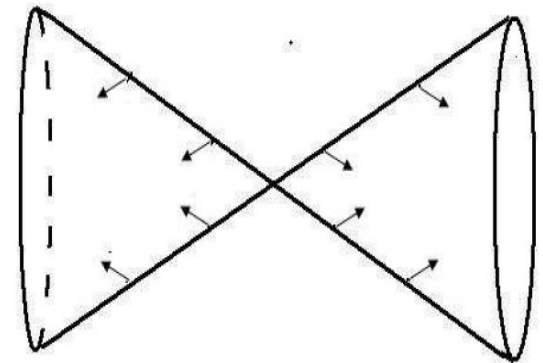
Метод использует только следующие 2 свойства системы:

1. Наличие положительно инвариантного одномерного квадратного конуса;
2. Инвариантность векторного поля системы (1) при сдвигах на вектор d_j .

Пусть $\Omega = \{z^* H z \leq 0\}$ – конус, где H – симметричная матрица, имеющая одно отрицательное и остальные отрицательные собственные значения, обладает свойством положительной инвариантности. Последнее означает, что на границе конуса $\partial\Omega = \{z^* H z = 0\}$ выполнено соотношение

$$\dot{V}(z(t)) < 0$$

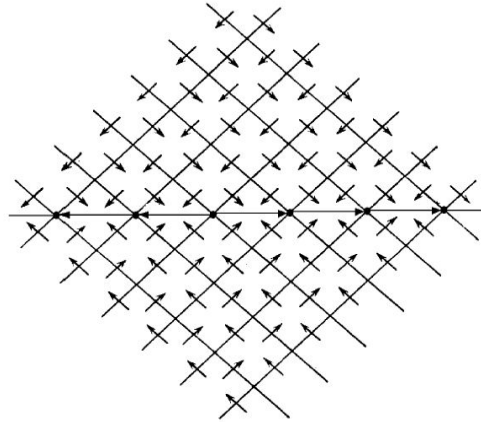
при всех $z(t)$ таких, что $z(t) \neq 0, z(t) \in \partial\Omega$



За счет второго свойства – инвариантности векторного поля относительно сдвига на векторы kd_j , $k \in \mathbb{Z}$ – размножим этот конус таким образом:

$$\Omega_k = \{(z - kd_j)H(z - kd_j) \leq 0\}.$$

Поскольку для каждого из конусов Ω_k свойство положительной инвариантности сохраняется, получаем положительно инвариантную конусную сетку



Если конус Ω таков, что он имеет только одну точку пересечения с гиперплоскостью $\{d_j^*z = 0\}$ и все решения $z(t)$, для которых в момент t выполнено неравенство

$$z(t)^*Hz(t) \geq 0$$

обладают свойством $\dot{V}(z(t)) \leq -\varepsilon|z(t)|^2$, (здесь ε – некоторое положительное число), то из рисунка видно что система устойчива по Бакаеву.

Таким образом, предложенный метод прост и уникален. Практическую эффективность ему доставляет частотная теорема Якубовича-Калмана.

2.3. Метод нелокального сведения

Опишем основные этапы распространения теорем Трикоми и его последствий, полученных для уравнения

$$\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \psi(\theta) = 0, \quad (5)$$

На системы более высокой размерности.

Рассмотрим вначале систему

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= Az + b\psi(\sigma) \\ \frac{d\sigma}{dt} &= c^*z + \rho\psi(\sigma) \end{aligned}, \quad (6)$$

описывающую типовую систему ФАП.

Предположим, что $\psi(\sigma)$ – 2π -периодична, A – устойчивая $n \times n$ -матрица, b и c – постоянные n -векторы, ρ – число.

Рассмотрим случай, когда уравнение (5) или эквивалентная ему система

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= -\alpha\eta - \psi(\theta) \\ \dot{\theta} &= \eta\end{aligned}\quad (7)$$

Является системой градиентного типа. В этом случае можно показать, что эквивалентного (7) уравнения

$$\frac{d\eta}{d\theta} = \frac{-\alpha\eta - \psi(\theta)}{\eta}\quad (8)$$

Существует решение $\eta(\theta)$ такое, что $\eta(\theta_0) = 0$, $\eta(\theta) \neq 0, \forall \theta \neq \theta_0$,
 $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \eta(\theta) = -\infty$, $\lim_{\theta \rightarrow -\infty} \eta(\theta) = +\infty$

Здесь θ_0 – некоторое число такое, что $\psi(\theta_0) = 0$, $\psi'(\theta_0) < 0$.

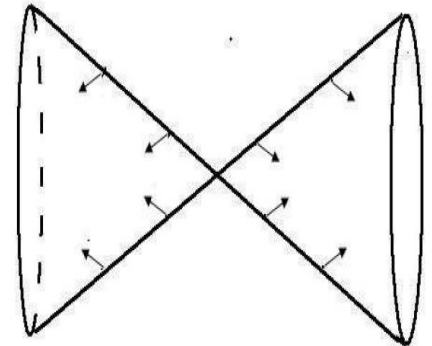
Рассмотрим теперь функцию

$$V(z, \sigma) = z^* H z - \frac{1}{2} \eta(\sigma)^2,$$

Которая индуцирует конус $\Omega = \{V(z, \sigma) \leq 0\}$ в фазовом пространстве $\{z, \sigma\}$. Это будет некоторое обобщение квадратичного конуса. Покажем, что при некоторых условиях такой конус будет положительно инвариантным. Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} + 2\lambda V &= 2z^* H [(A + \lambda I)z + b\psi(\sigma)] + \lambda\eta(\sigma)^2 - \eta(\sigma) \frac{d\eta(\sigma)}{d\sigma} (c^* z + \rho\psi(\sigma)) \\ &= 2z^* H [(A + \lambda I)z + b\psi(\sigma)] - \lambda\eta(\sigma)^2 + \psi(\sigma)(c^* z + \rho\psi(\sigma)) \\ &\quad + \alpha\eta(\sigma)(c^* z + \rho\psi(\sigma))\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\eta(\sigma)$ удовлетворяет уравнению (8).



Заметим, что если выполнены частотные неравенства

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}K(i\omega - \lambda) - \varepsilon|K(i\omega - \lambda)|^2 &> 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2(\operatorname{Re}K(i\omega - \lambda) - \varepsilon|K(i\omega - \lambda)|^2) &> 0 \end{aligned} \quad (9)$$

где $K(p) = c^*(A - pI)^{-1}b - \rho$, то по частотной теореме Якубовича-Калмана существует H такая, что для всех $z \neq 0$ и ξ выполнено отношение

$$2z^*H[(A + \lambda I)z + b\xi] + \xi(c^*z + \rho\xi) + \varepsilon|(c^*z + \rho\xi)|^2 < 0$$

Здесь ε – некоторое положительное число. Если же $A + \lambda I$ – устойчивая матрица, то $H > 0$.

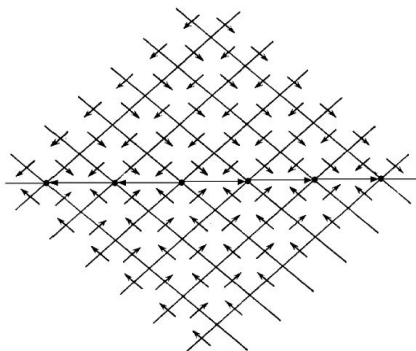
Таким образом, если $A + \lambda I$ – устойчива, выполнены (9) и $\alpha^2 \leq 4\lambda\varepsilon$, то

$$\frac{dV}{dt} + 2\lambda V < 0, \quad \forall z(t) \neq 0,$$

и, следовательно, Ω – положительно инвариантный конус.

Также, как и в предыдущем пункте, можно произвести разложение конусов

$\Omega_k = \{z^*Hz - \frac{1}{2}\eta_k(\sigma)^2 \leq 0\}$ и построить из них конусную сетку.



Здесь $\eta_k(\sigma)$ - сдвинутое по оси σ на величину $2k\pi$ решение $\eta(\sigma)$.

Конусная сетка доказывает ограниченность решений системы (6) на интервале $(0, +\infty)$.

В сделанных предположениях имеет место также дихотомичность. Это доказывается с помощью ляпуновской функции

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 (\operatorname{Re} K(i\omega - \lambda) - \varepsilon |K(i\omega - \lambda)|^2) > 0$$

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= -\alpha\eta - \psi(\theta) \\ \dot{\theta} &= \eta \end{aligned}$$

Таким образом, нами доказан следующий результат

Теорема 5. Если для некоторых $\lambda > 0$ и $\varepsilon > 0$ матрица $A + \lambda I$ устойчива, выполнены условия (9) и система (7) с $\alpha = 2\sqrt{\lambda\varepsilon}$ является системой градиентного типа, то и система (6) так же является системой градиентного типа.

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= Az + b\psi(\sigma) \\ \frac{d\sigma}{dt} &= c^*z + \rho\psi(\sigma) \end{aligned}$$

*Спасибо за
внимание!*