Université d’El-Oued

Faculté de science exacte

Département d’informatique

COURS D’INFOGRAPHIE

Transformations géométriques

Plan

- ❖ Rappels de géométrie
  - Transformations 2D
  - Transformations 3D
- ❖ Rappels d'Algèbre

Rappels de géométrie

Transformations 2D

Transformation 2D

C'est l'ensemble des transformations du plan pouvant être appliquées aux pixels de l'image, sans considération de l'intensité.

Transformation 2D

Représenter les changements d'espaces de coordonnées et manipuler les points dans l'espace et dans l'image

Transformation 2D

- Par exemple

  Réduction, agrandissement

  Déformation d’images

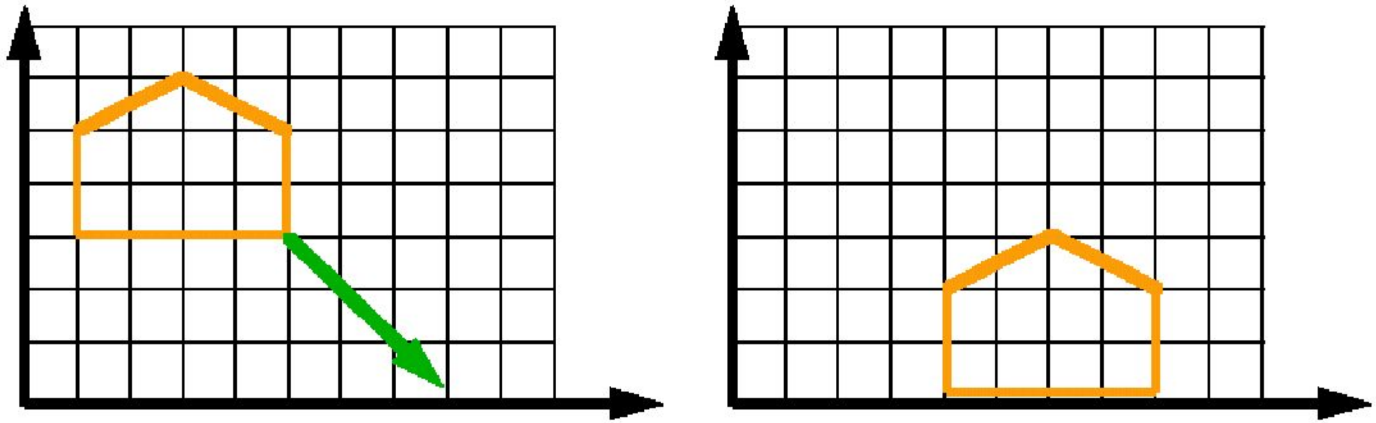
Translation

- Translation d'un point d'une position vers une autre :

$$x' = x + T_x$$
$$y' = y + T_y$$

- Addition de matrices :

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$$



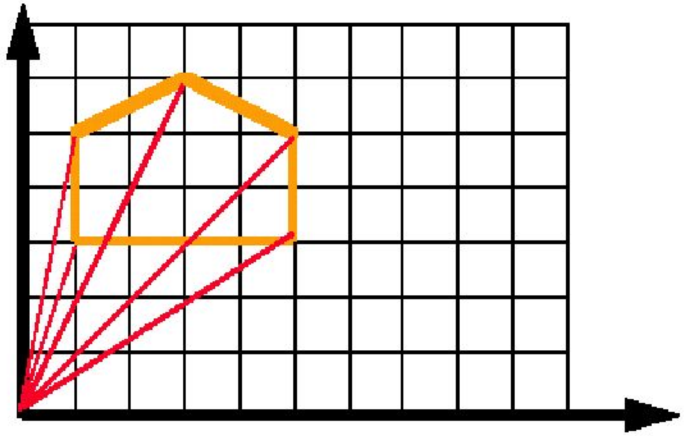
Homothétie ou changement d'échelle *(scaling)*

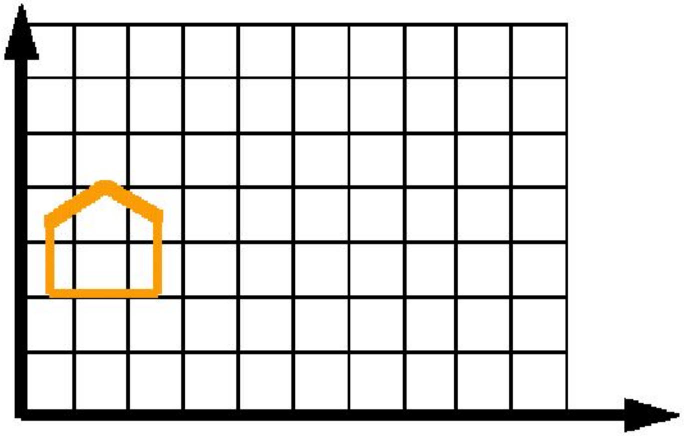
- Pour obtenir un changement d'échelle (ou homothétie), il suffit de multiplier les coordonnées par un facteur d'échelle.

$$x' = S_x * x$$
$$y' = S_y * y$$

- Multiplication de matrices :

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$





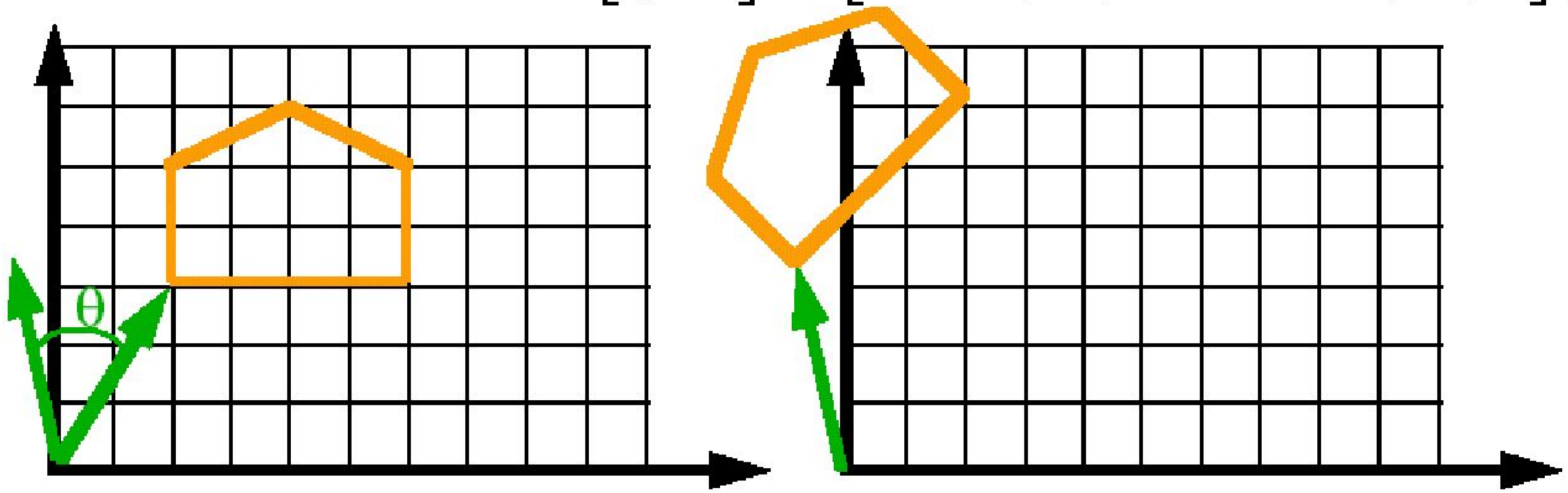
Rotation

- Rotation d'un point autour de l'origine :

$$x' = x\cos(\theta) - y\sin(\theta)$$
$$y' = x\sin(\theta) + y\cos(\theta)$$

- Multiplication de matrices :

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



Multiplication et addition de matrices

- L'homothétie et la rotation se calculent par **multiplication de matrices**
- La translation se calcule par **addition de matrices**
- On aimerait avoir un **cadre unifié** pour toutes les transformations

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Homothétie

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Rotation

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$$

Translation

Utilisation des coordonnées homogènes

- Outil géométrique très puissant :
  - Utilisé dans plusieurs domaines : Synthèse d'images, Vision par ordinateur, Robotique
- On ajoute une troisième coordonnée, *w*
  - Par défaut, on pose $w=1$
- Un point 2D devient un vecteur à 3 coordonnées :

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix}$$

*Nous quittons maintenant le domaine de la **géométrie euclidienne** pour entrer dans celui de la **géométrie projective***

Translation en coordonnées homogènes

- Avant, la translation s'exprimait avec une addition :

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$$

- Et maintenant, la translation s'exprime comme un produit avec une matrice 3x3 carrée :

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \boxed{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \boxed{1} \end{bmatrix}$$

Matrice générale de transformations 2D

- Nous allons combiner les différentes transformations.
- La **matrice générale de transformation** est :

$$\begin{bmatrix} a & b & m \\ c & d & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Avec quelques cas spéciaux que nous avons vus :

Mise à l'échelle

$$\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotation

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Translation

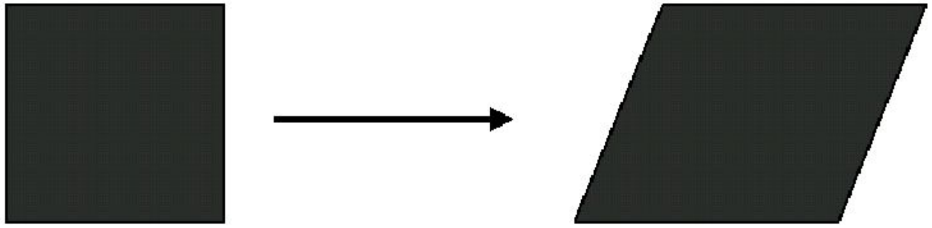
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Autre transformation : glissement *(shear)*

- Une autre transformation, le glissement *(shear)*, permet de déformer les objets :
  - ne conserve pas les angles
  - ne conserve pas l'aire des surfaces

- On peut faire un glissement dans l'axe des X ou selon l'axe des Y

$$G_x = \begin{bmatrix} 1 & Sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ Sh_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



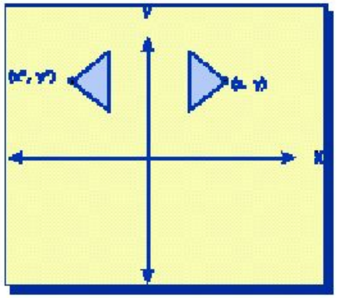
Glissement selon l'axe des X

Autre transformation : réflexion

- Réflexion d'un point par rapport à un axe
  - *transformation miroir*

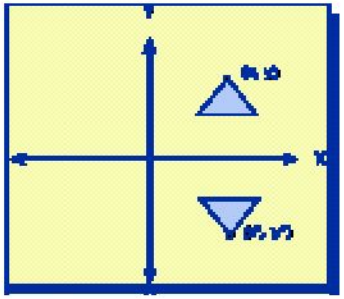
Par rapport à l'axe des Y :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



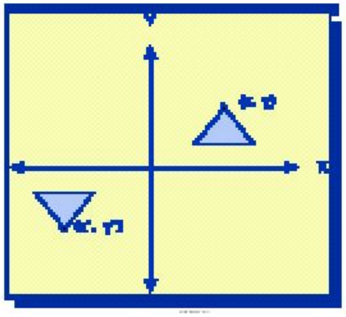
Par rapport à l'axe des X :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

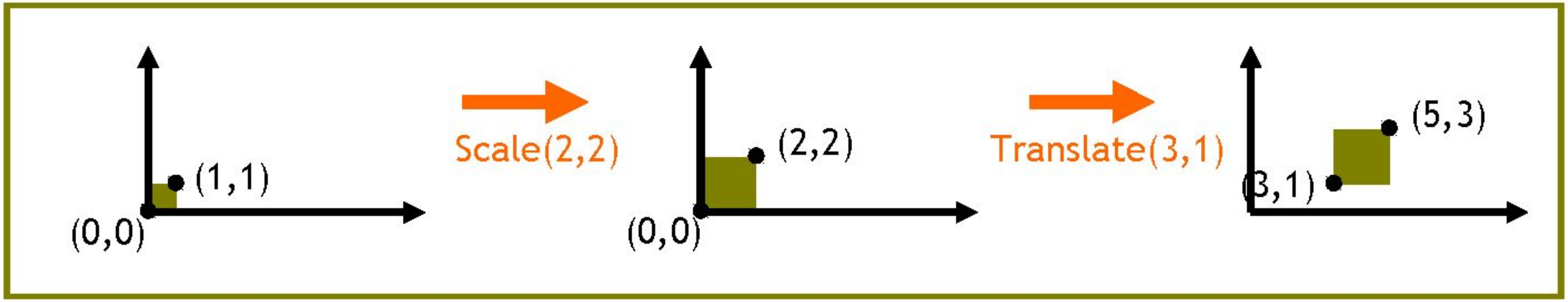


Par rapport à l'origine :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Composition de transformations



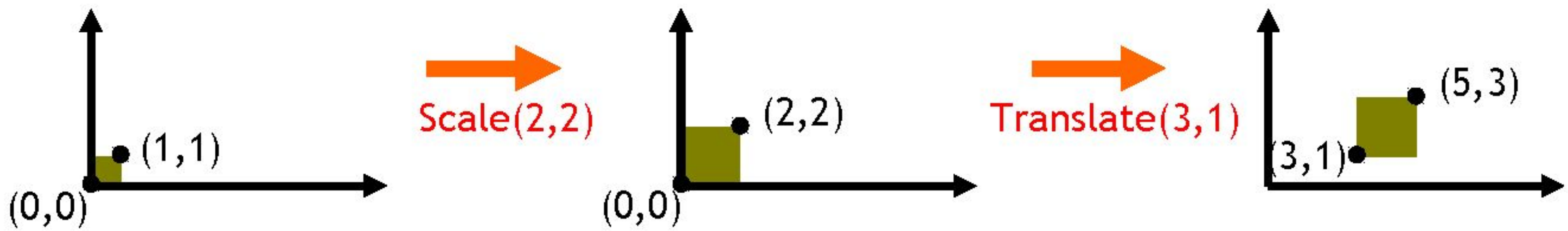
Multiplication de matrices : p' = T (S p) = TS p

$$TS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

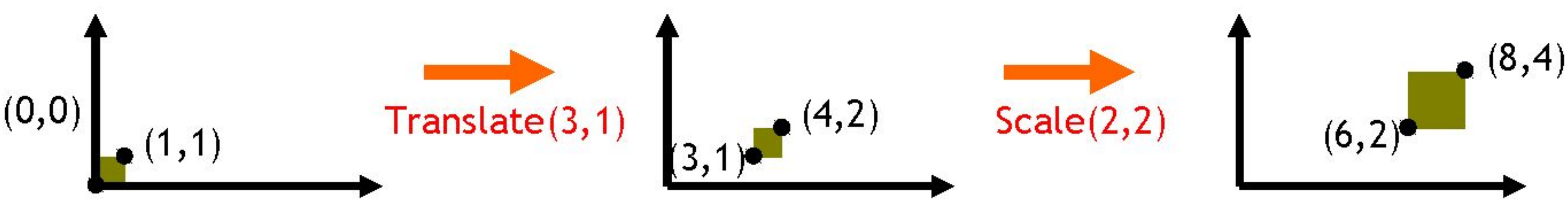
Source : Antoine Bouthors, Synthèse d'images, ENSIMAG (Grenoble, France)

Non-commutatif !!!

Homothétie puis translation : p' = T (S p) = TS p



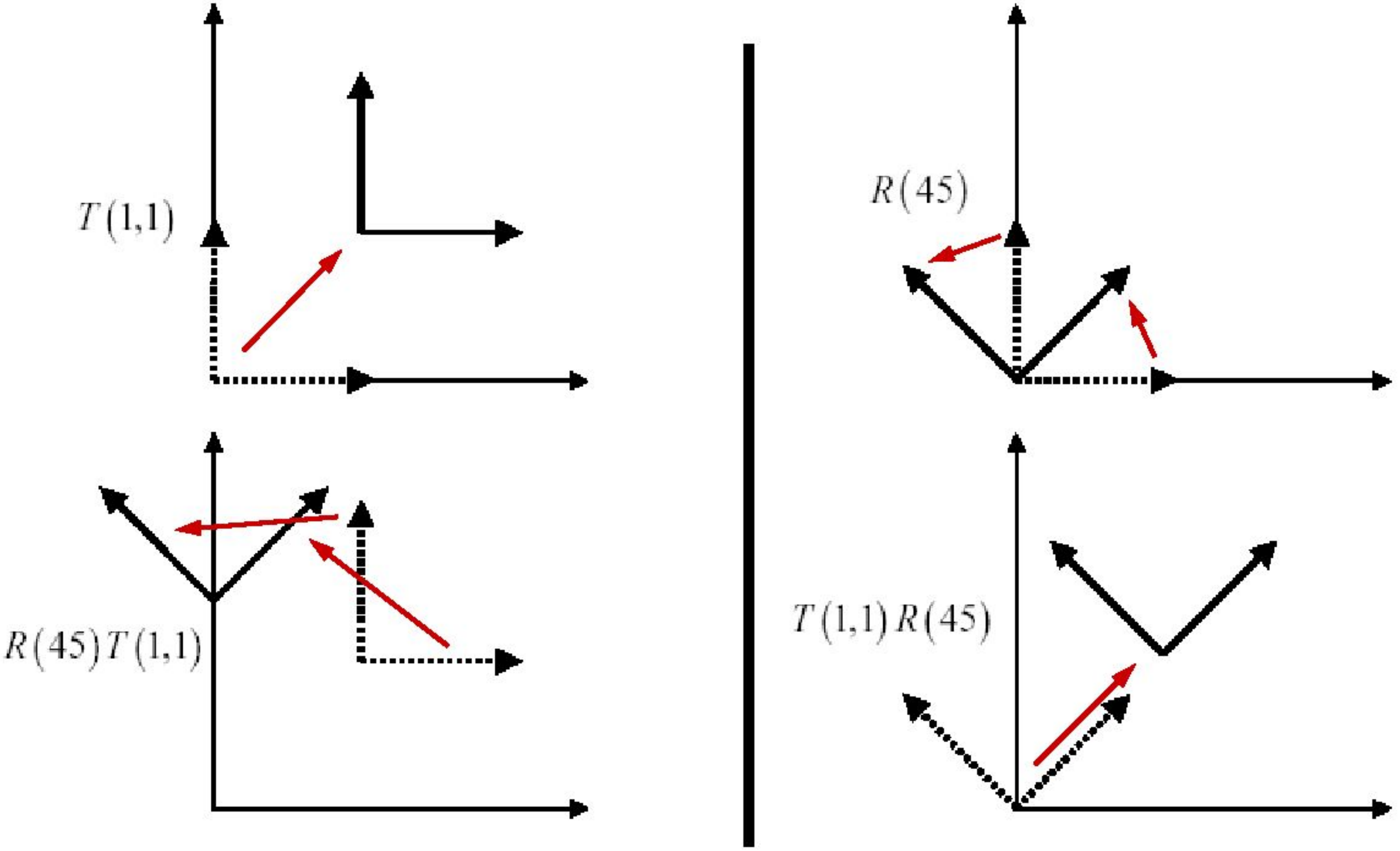
Translation puis homothétie : p' = S (T p) = ST p



Source : Antoine Bouthors, Synthèse d'images, ENSIMAG (Grenoble, France)

Un autre exemple de non-commutativité

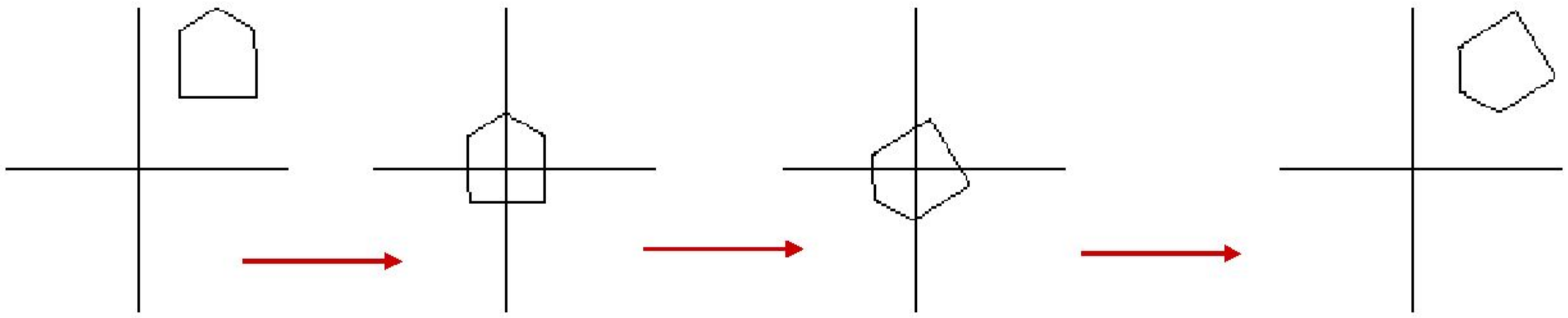
Exemple 1 (translation d'abord) ***Exemple 2 (rotation d'abord)***



Ordres des transformations

- Les transformations ne sont pas commutatives
  - Rotation * Translation ≠ Translation * Rotation
- On peut inverser les transformations semblables
  - Rotation1 * Rotation2 = Rotation2 * Rotation1
  - Translation1 * Translation2 = Translation2 * Translation1
- Mais on ne peut pas inverser des transformations de natures différentes

Rotation autour d'un point arbitraire (1)



$T(-x_f, -y_f)$ $R(\Theta)$ $T(x_f, y_f)$

(1) On déplace l'objet à l'origine

(2) On fait la rotation

(3) On renvoie l'objet à sa position initiale.

$$T_{P_f} \cdot R(\theta) \cdot T_{-P_f}$$

Rotation autour d'un point arbitraire (2)

- La rotation autour d'un point arbitraire peut s'exprimer comme une combinaison des transformations de base :
  - Une translation du point arbitraire vers l'origine ***$T(-x_f,-y_f)$***
  - Une rotation autour de l'origine ***$R(\theta)$***
  - Une translation de l'origine vers le point arbitraire ***$T(x_f,y_f)$***

$$T_{P_f} \cdot R(\theta) \cdot T_{-P_f} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_f \\ 0 & 1 & y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_f \\ 0 & 1 & -y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & (1-\cos\theta)x_f + y_f\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & (1-\cos\theta)y_f - x_f\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Attention : on ajoute les matrices de droite à gauche !

Homothétie par rapport à un point arbitraire

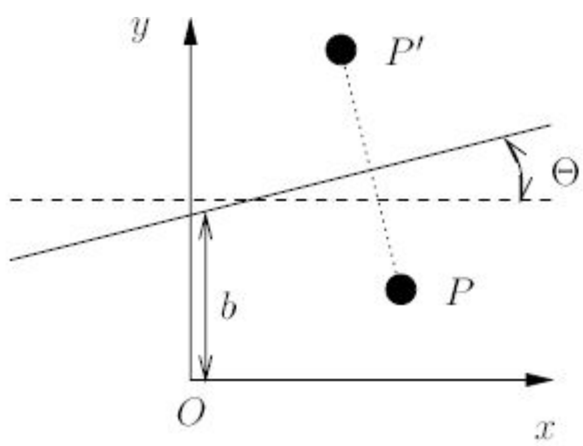
- L'homothétie (ou changement d'échelle) par rapport à un point arbitraire peut se décomposer comme suit :
  - Translation du point arbitraire vers l'origine ***T(-x***

$$T_{P_f}\cdot S\cdot T_{-P_f} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_f \\ 0 & 1 & y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_f \\ 0 & 1 & -y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} S_x & 0 & (1-S_x)x_f \\ 0 & S_y & (1-S_y)y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Symetrie par rapport à une droite quelconque

Le calcul du symètrie d'un point P par rapport à une droite d'équation y=ax+b est effectué en appliquant les transformations élémentaires suivantes :



Symetrie par rapport à une droite quelconque

1. Translation (0, -b) (on fait passer la droite par l’origine);
2. Rotation d’angle -Θ, où Θ = atan(a);
3. Symétrie par rapport à l’axe Ox;
4. Rotation d’angle Θ;
5. Translation de vecteur (0, b).

Représentation des objets

Une image plane est une collection de points (x1,y1), (x2,y2), ... , (xn,yn).

Pour appliquer une transformation à l'image il suffit d'appliquer cette transformation à chacun des points.

Ces calculs peuvent être fait d'un seul coup en rangeant les points dans une matrice :

$$\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n & y_n & 1 \end{matrix}$$

Représentation des objets

et en multipliant cette matrice par la matrice M de la transformation :

$$
\begin{matrix} x'_1 & y'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 \\ x'_3 & y'_3 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x'_n & y'_n & 1 \end{matrix}
=
\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n & y_n & 1 \end{matrix}
\;. M
$$

Rappels de géométrie

Transformations 3D

Matrice de transformation 3D

- En 3D, nous aurons une matrice semblable pour exprimer les transformations :

$$\begin{bmatrix} a & b & c & l \\ d & e & f & m \\ g & h & i & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} & 3 \\ 3\times 3 & \times \\ & 1 \\ \hdashline 1\times 3 & 1\times 1 \end{array}\right]$$

Transformations 3D (1)

- Translation :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Homothétie (mise à l'échelle) :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformations 3D (2)

- Rotation :

Autour de l'axe des X

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Autour de l'axe des Y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Autour de l'axe des Z

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rappels d’Algèbre

Produit en Croix (en dimension 2)

- Définition
  - ❑Le produit croisé ou produit en croix de deux vecteurs du plan est défini par:

$$\vec{U} \propto \vec{V} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} U_x & V_x \\ U_y & V_y \end{vmatrix} = U_x V_y - U_y V_x$$

Produit en Croix (en dimension 2)

- Propriétés
  - ❑ anti-commutatif : $\vec{U} \propto \vec{V} = -(\vec{U} \propto \vec{V})$
  - ❑ associatif avec le produit d'un réel et d'un vecteur :

$$(\alpha \times \vec{U}) \propto \vec{V} = \alpha \times (\vec{U} \propto \vec{V})$$

  - ❑ distributif par rapport à l'addition des vecteurs :

$$\vec{U} \propto (\vec{V} + \vec{W}) = (\vec{U} \propto \vec{V}) + (\vec{U} \propto \vec{W})$$

Produit en Croix (en dimension 2)

- Interprétation
  - ❑ Le produit croisé fournit, un test de colinéarité pour deux vecteurs non nuls, et d'autre part, un test de placement d'un point relativement à une droite.
  - ❑ le produit en croix permet de retrouver l'équation d'une droite D contenant un point M, et de vecteur directeur $\vec{U}$.

Produit en Croix (en dimension 2)

- On a en effet :

$$X = (x, y) \in D \iff$$

$$\vec{U} \propto \vec{MX} = 0 \iff U_x \times (y - M_y) - U_y \times (x - M_x) = 0$$

Produit scalaire (en dimension 2 ou 3)

- Définition

  - ❑ Le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace (ou du plan, en oubliant la composante z), est défini par :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = (U_x \times V_x) + (U_y \times V_y) + (U_z \times V_z)$$

Produit scalaire (en dimension 2 ou 3)

- Propriétés
  - ❑ $\vec{U} \cdot \vec{U} = \| \vec{U} \|^2$
  - ❑ commutatif $\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$
  - ❑ associatif avec le produit d'un réel et d'un vecteur :

$$(\alpha \times \vec{U}) \cdot \vec{V} = \alpha \times (\vec{U} \cdot \vec{V})$$

  - ❑ distributif par rapport à l'addition des vecteurs :

$$\vec{U} \cdot (\vec{V} + \vec{W}) = (\vec{U} \cdot \vec{V}) + (\vec{U} \cdot \vec{W})$$

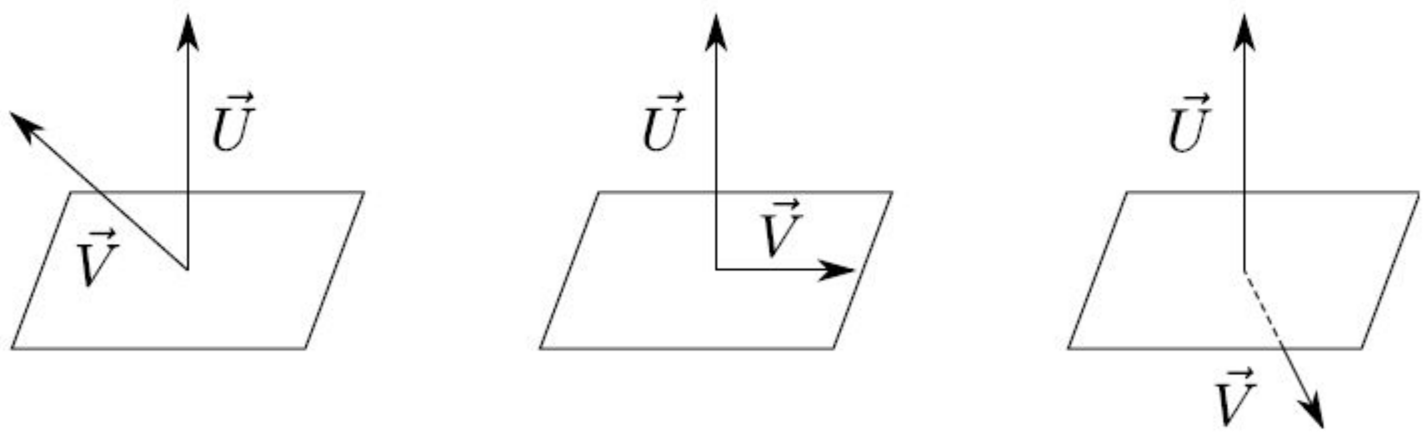
Produit scalaire (en dimension 2 ou 3)

- Interprétation
  - ❑ Le produit scalaire permet de déterminer la forme (aigu, droit, ou obtus) de l'angle entre deux vecteurs non nuls.
  - ❑ En 3D, il fournit également un test de placement d'un point relativement à un plan.

Produit scalaire (en dimension 2 ou 3)

- Interprétation

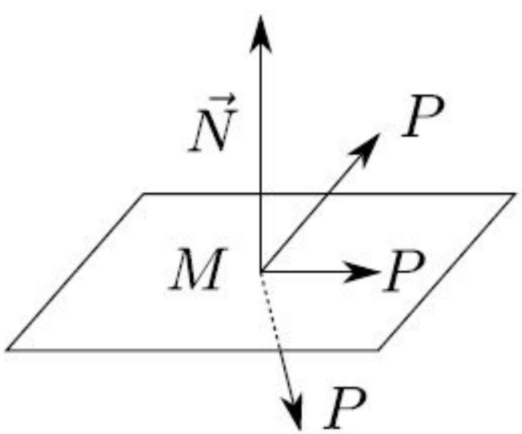
$\vec{U} \cdot \vec{V} > 0$ $\qquad$ $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$ $\qquad$ $\vec{U} \cdot \vec{V} < 0$



Produit scalaire (en dimension 2 ou 3)

- Interprétation

Soit à présent un plan contenant un point M, et de normale $\vec{N}$ (i.e. $\vec{N}$ est un vecteur orthogonal au plan). On a :



$$\vec{N} \cdot \vec{MP} > 0$$

$$\vec{N} \cdot \vec{MP} = 0$$

$$\vec{N} \cdot \vec{MP} < 0$$

Produit scalaire (en dimension 2 ou 3)

- $\vec{N} \cdot \vec{MX} = 0 \iff X$ appartient à Π
- $\vec{N} \cdot \vec{MX} > 0 \iff X$ est du même côté du plan que $\vec{N}$.
- $\vec{N} \cdot \vec{MX} < 0 \iff X$ est du côté du plan opposé à $\vec{N}$.

L'équation du plan est $\Pi(X) = 0$, avec $\Pi(X) = \vec{N} \cdot \vec{MX}$, soit:

$$N_x \times (x - M_x) + N_y \times (y - M_y) + N_z \times (z - M_z) = 0$$

Produit vectoriel (en dimension 3)

- Définition

Le produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace est défini par :

$$\begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} U_y & V_y \\ U_z & V_z \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} U_x & V_x \\ U_z & V_z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} U_x & V_x \\ U_y & V_y \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Produit vectoriel (en dimension 3)

$$\begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} U_y & V_y \\ U_z & V_z \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} U_x & V_x \\ U_z & V_z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} U_x & V_x \\ U_y & V_y \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_y V_z - U_z V_y \\ -U_x V_z + U_z V_x \\ U_x V_y - U_y V_x \end{pmatrix}$$

Produit vectoriel (en dimension 3)

- Propriétés

❑ anti-commutatif : $\vec{U} \wedge \vec{V} = -(\vec{V} \wedge \vec{U})$

❑ associatif avec le produit d'un réel et d'un vecteur :

$$(k \times \vec{U}) \wedge \vec{V} = k \times (\vec{U} \wedge \vec{V}).$$

❑ distributif par rapport à l'addition des vecteurs :

$$\vec{U} \wedge (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \vec{W}.$$

❑ non associatif.

Produit vectoriel (en dimension 3)

- Interprétation

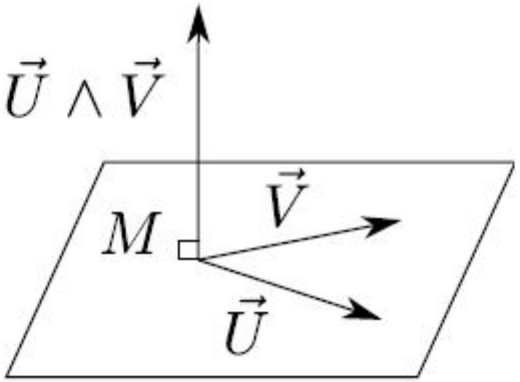
En dimension 3, le produit vectoriel de deux vecteurs non nuls et non colinéaires produit un nouveau vecteur non nul, et orthogonal aux deux premiers

(si $\vec{U}$ ou $\vec{V}$ est nul, ou si $\vec{U}$; $\vec{V}$ sont colinéaires, leur produit vectoriel est le vecteur nul).

Il permet en particulier de calculer une normale $\vec{N}$ au plan engendré par un point M et deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$

Produit vectoriel (en dimension 3)

- Interprétation



Noter que $\vec{V} \wedge \vec{U}$ est une normale au plan de direction opposée