

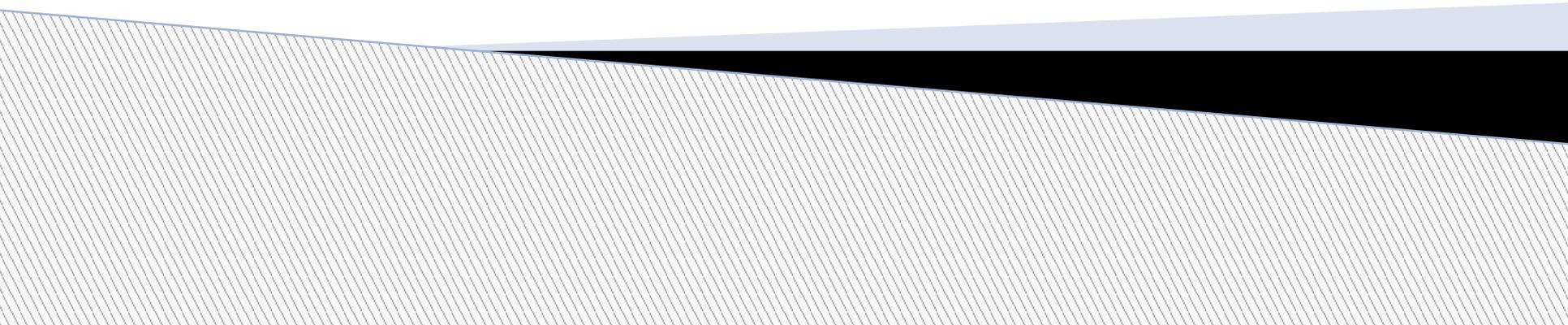
Université d'El-Oued

Faculté de science exacte

Département d'informatique

# COURS D'INFOGRAPHIE

Transformations géométriques

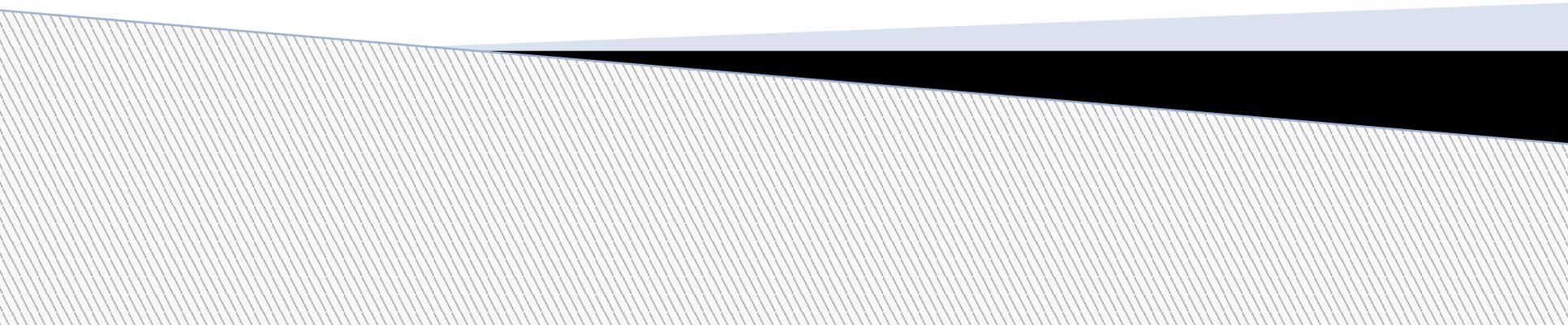


# Plan

- ❖ Rappels de géométrie
  - Transformations 2D
  - Transformations 3D
- ❖ Rappels d'Algèbre

# Rappels de géométrie

Transformations 2D

A decorative graphic at the bottom of the slide. It features a wavy line that separates the white background from a patterned area. The patterned area consists of a solid black horizontal band, and below it, a region filled with fine, parallel, light-colored diagonal lines.

# Transformation 2D

C'est l'ensemble des transformations du plan pouvant être appliquées aux pixels de l'image, sans considération de l'intensité.

# Transformation 2D

Représenter les changements d'espaces de coordonnées et manipuler les points dans l'espace et dans l'image

# Transformation 2D

- Par exemple
  - Réduction, agrandissement
  - Déformation d'images

# Translation

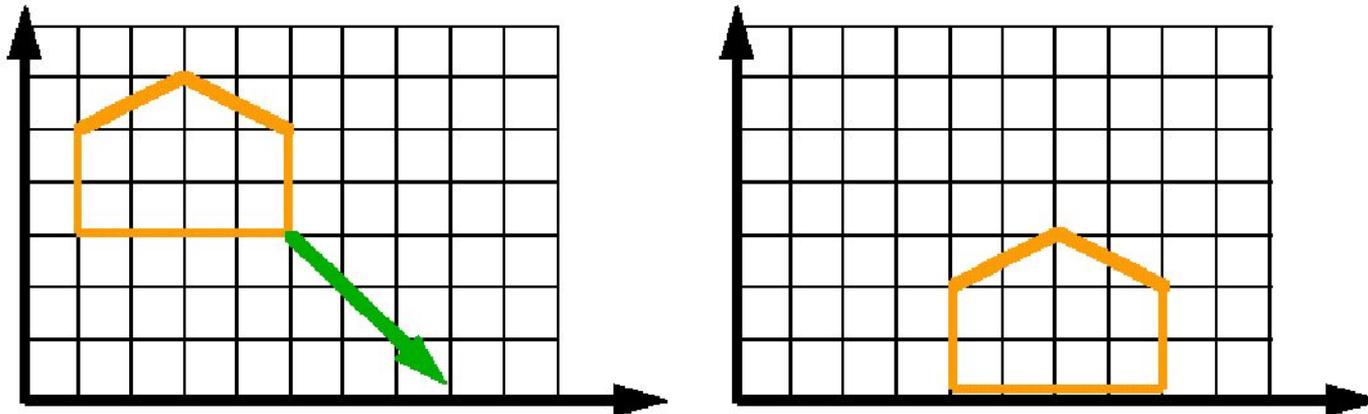
- Translation d'un point d'une position vers une autre :

$$x' = x + T_x$$

$$y' = y + T_y$$

- Addition de matrices :

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$$



# Homothétie ou changement d'échelle (*scaling*)

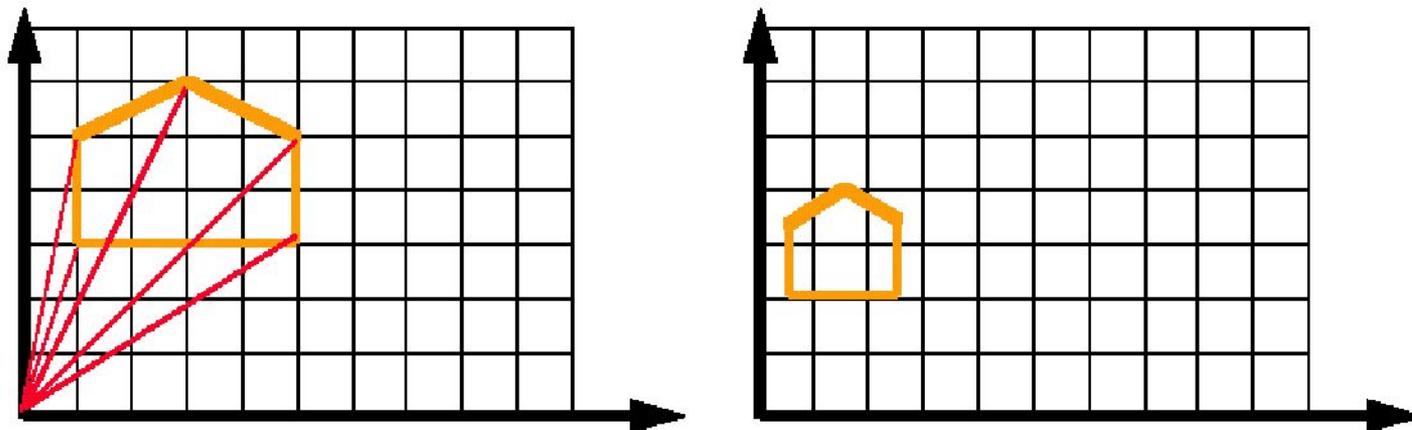
- Pour obtenir un changement d'échelle (ou homothétie), il suffit de multiplier les coordonnées par un facteur d'échelle.

$$x' = S_x * x$$

$$y' = S_y * y$$

- Multiplication de matrices :

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



# Rotation

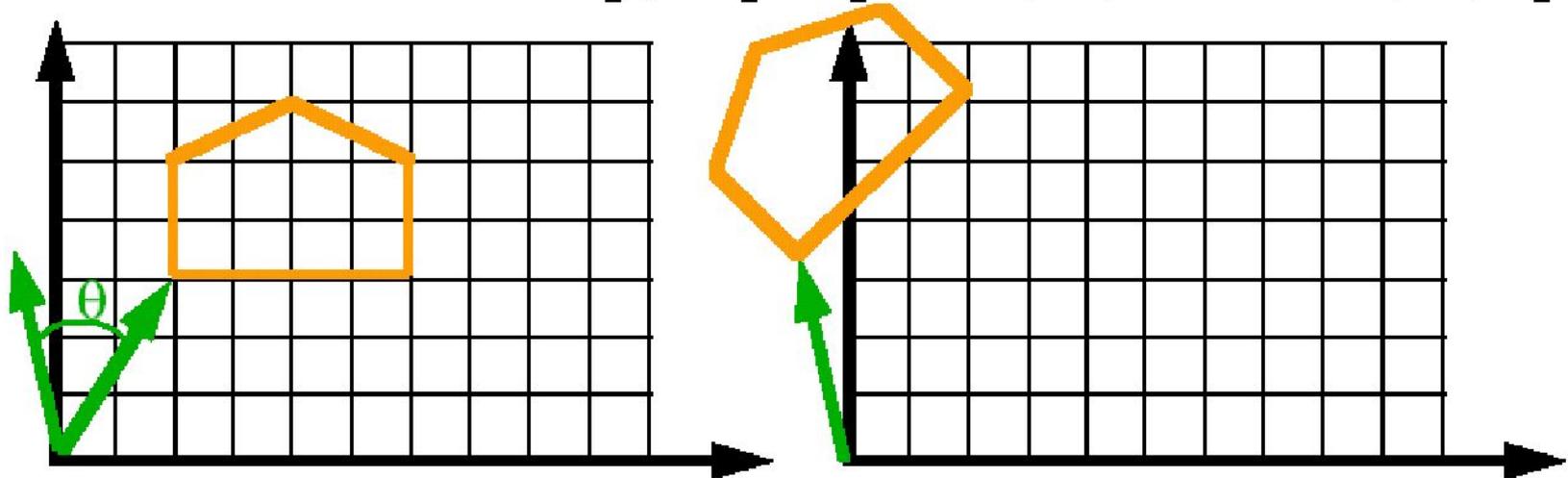
- Rotation d'un point autour de l'origine :

$$x' = x \cos(\theta) - y \sin(\theta)$$

$$y' = x \sin(\theta) + y \cos(\theta)$$

- Multiplication de matrices :

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



# Multiplication et addition de matrices

- L'homothétie et la rotation se calculent par **multiplication de matrices**

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

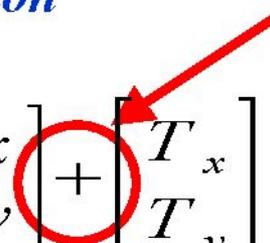
*Homothétie*

- La translation se calcule par **addition de matrices**

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

*Rotation*

- On aimerait avoir un **cadre unifié** pour toutes les transformations

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$$


*Translation*

# Utilisation des coordonnées homogènes

- Outil géométrique très puissant :
  - Utilisé dans plusieurs domaines : Synthèse d'images, Vision par ordinateur, Robotique
- On ajoute une troisième coordonnée,  $w$ 
  - Par défaut, on pose  $w=1$
- Un point 2D devient un vecteur à 3 coordonnées :

*Nous quittons maintenant le domaine de la **géométrie euclidienne** pour entrer dans celui de la **géométrie projective***

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix}$$

# Translation en coordonnées homogènes

- Avant, la translation s'exprimait avec une addition :

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$$

- Et maintenant, la translation s'exprime comme un produit avec une matrice 3x3 carrée :

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Matrice générale de transformations 2D

- Nous allons combiner les différentes transformations.
- La **matrice générale de transformation** est :

$$\begin{bmatrix} a & b & m \\ c & d & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Avec quelques cas spéciaux que nous avons vus :

**Mise à l'échelle**

$$\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Rotation**

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

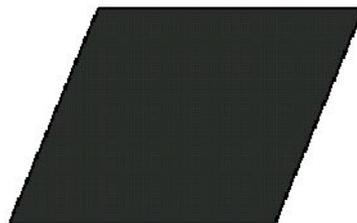
**Translation**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Autre transformation : glissement (*shear*)

- Une autre transformation, le glissement (*shear*), permet de déformer les objets :
  - ne conserve pas les angles
  - ne conserve pas l'aire des surfaces
- On peut faire un glissement dans l'axe des X ou selon l'axe des Y

$$G_x = \begin{bmatrix} 1 & Sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ Sh_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

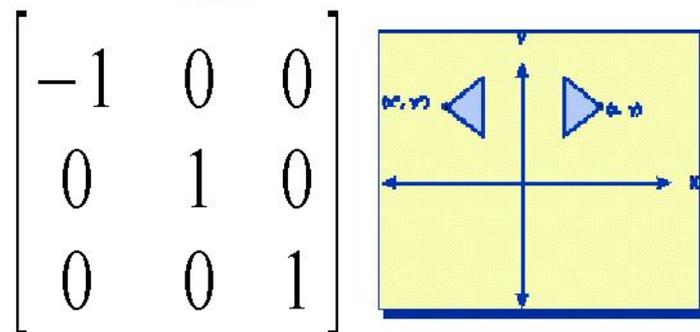


*Glissement selon  
l'axe des X*

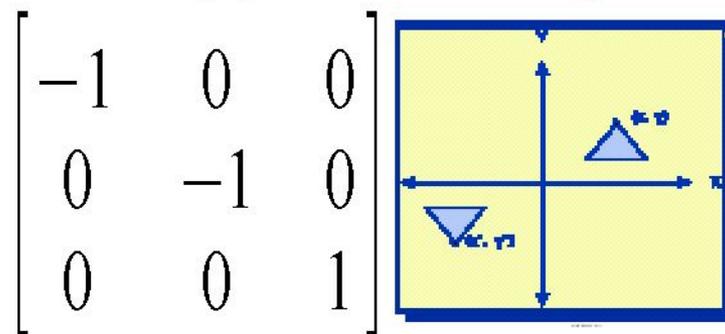
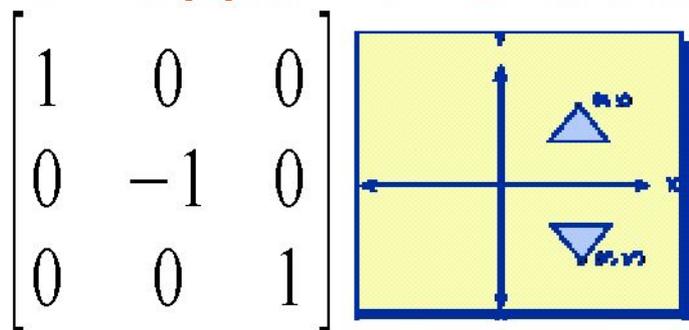
# Autre transformation : réflexion

- Réflexion d'un point par rapport à un axe
  - *transformation miroir*

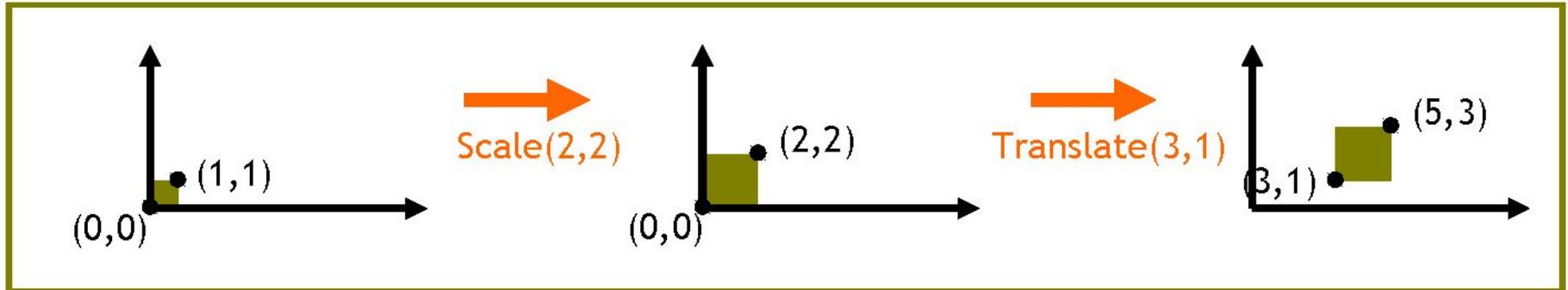
Par rapport à l'axe des Y :



Par rapport à l'axe des X : Par rapport à l'origine :



# Composition de transformations

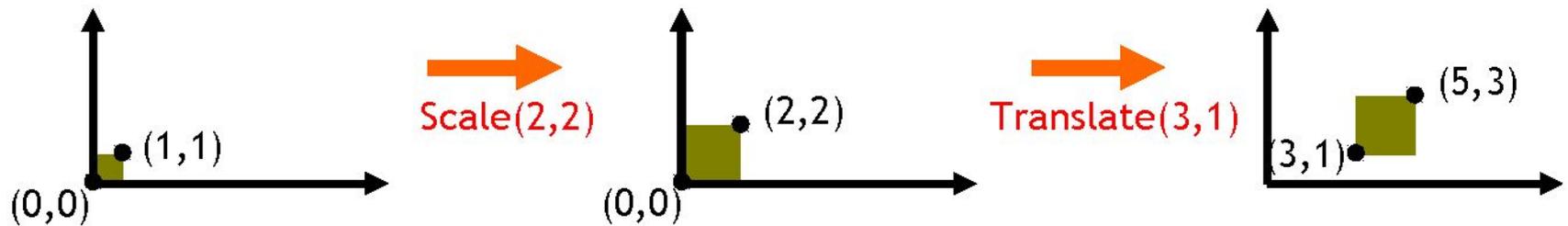


Multiplication de matrices :  $p' = T ( S p ) = TS p$

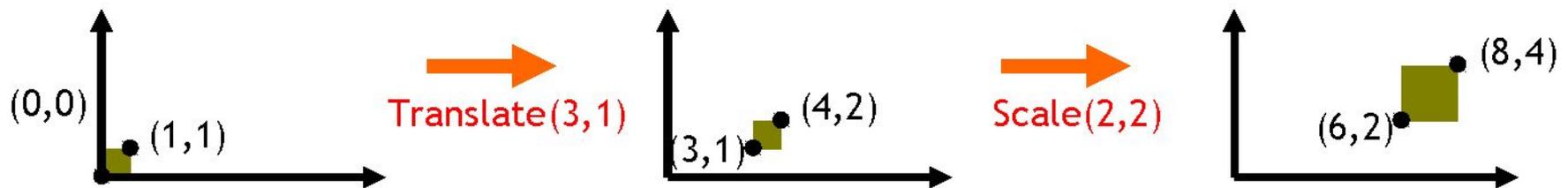
$$TS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Non-commutatif !!!

Homothétie puis translation :  $p' = T ( S p ) = TS p$

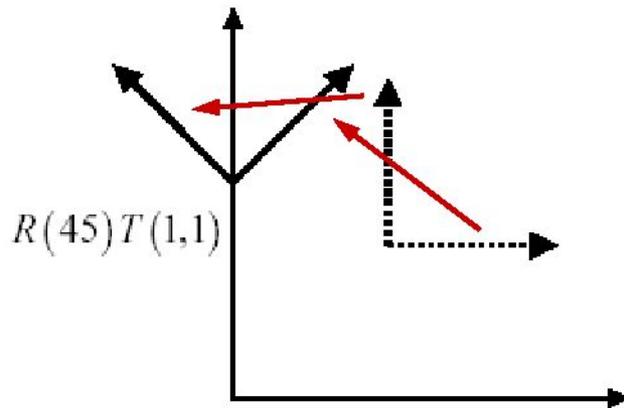
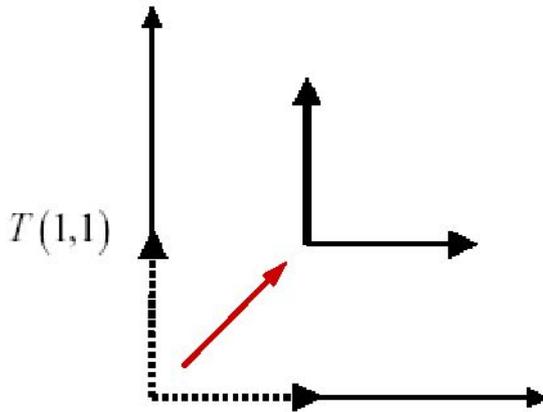


Translation puis homothétie :  $p' = S ( T p ) = ST p$

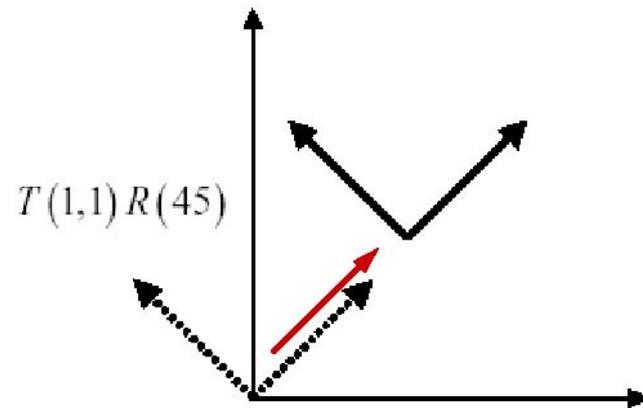
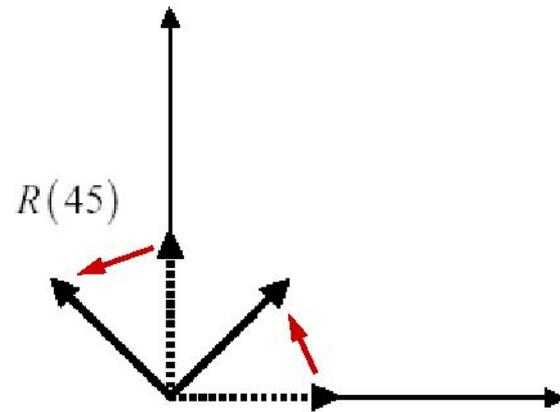


# Un autre exemple de non-commutativité

*Exemple 1 (translation d'abord)*



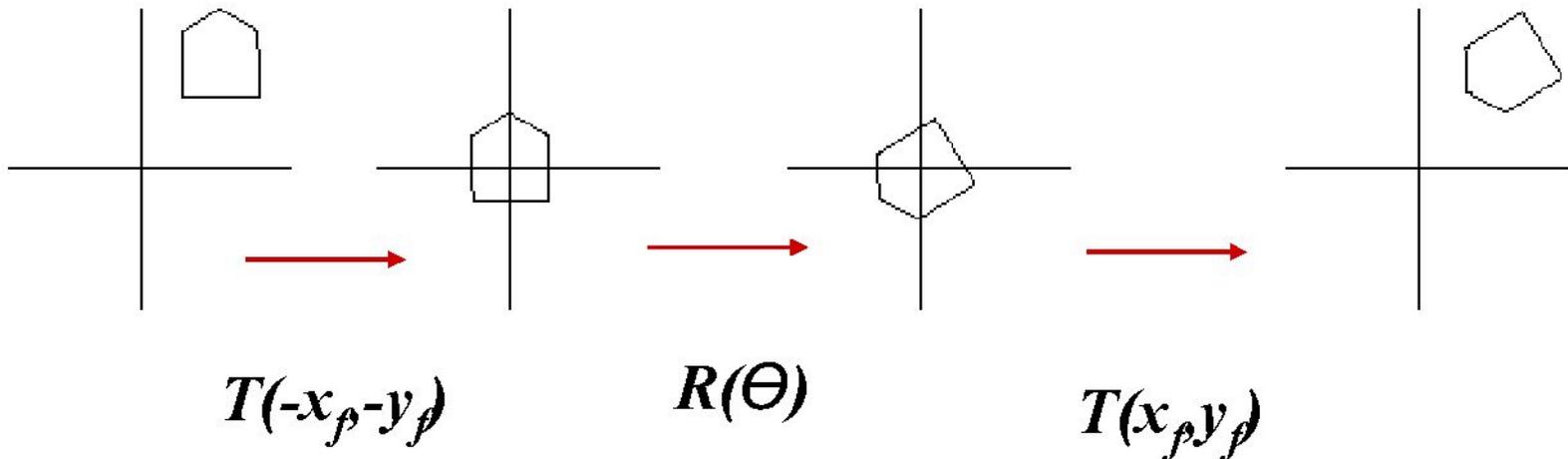
*Exemple 2 (rotation d'abord)*



# Ordres des transformations

- Les transformations ne sont pas commutatives
  - Rotation \* Translation  $\neq$  Translation \* Rotation
- On peut inverser les transformations semblables
  - Rotation1 \* Rotation2 = Rotation2 \* Rotation1
  - Translation1 \* Translation2 = Translation2 \* Translation1
- Mais on ne peut pas inverser des transformations de natures différentes

# Rotation autour d'un point arbitraire (1)



*(1) On déplace l'objet à l'origine*

*(2) On fait la rotation*

*(3) On renvoie l'objet à sa position initiale.*

$$T_{P_f} \cdot R(\theta) \cdot T_{-P_f}$$

# Rotation autour d'un point arbitraire (2)

- La rotation autour d'un point arbitraire peut s'exprimer comme une combinaison des transformations de base :
  - Une translation du point arbitraire vers l'origine  $T(-x_f, -y_f)$
  - Une rotation autour de l'origine  $R(\theta)$
  - Une translation de l'origine vers le point arbitraire  $T(x_f, y_f)$

$$T_{P_f} \cdot R(\theta) \cdot T_{-P_f} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_f \\ 0 & 1 & y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_f \\ 0 & 1 & -y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Attention :** on ajoute les matrices de droite à gauche !

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & (1 - \cos \theta)x_f + y_f \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & (1 - \cos \theta)y_f - x_f \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

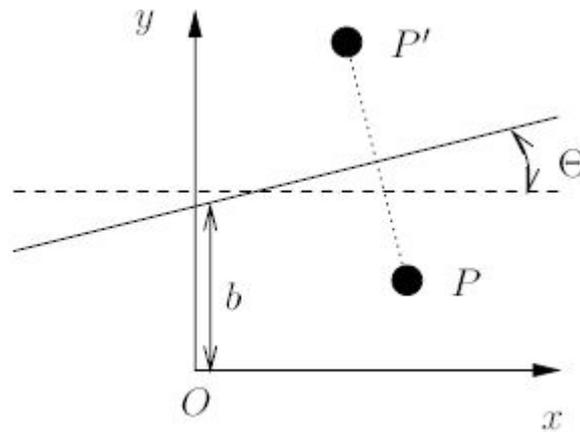
# Homothétie par rapport à un point arbitraire

- L'homothétie (ou changement d'échelle) par rapport à un point arbitraire peut se décomposer comme suit :
  - Translation du point arbitraire vers l'origine  $T(-x_f, -y_f)$
  - Homothétie par rapport à l'origine  $S_{x,y}$
  - Translation inverse de l'origine vers le point arbitraire  $T(x_f, y_f)$

$$\begin{aligned} T_{P_f} \cdot S \cdot T_{-P_f} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_f \\ 0 & 1 & y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_f \\ 0 & 1 & -y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S_x & 0 & (1-S_x)x_f \\ 0 & S_y & (1-S_y)y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

# Symetrie par rapport à une droite quelconque

Le calcul du symètrie d'un point  $P$  par rapport à une droite d'équation  $y=ax+b$  est effectué en appliquant les transformations élémentaires suivantes :



# Symetrie par rapport à une droite quelconque

1. Translation  $(0, -b)$  (on fait passer la droite par l'origine );
2. Rotation d'angle  $-\Theta$ , où  $\Theta = \text{atan}(a)$ ;
3. Symétrie par rapport à l'axe  $Ox$ ;
4. Rotation d'angle  $\Theta$ ;
5. Translation de vecteur  $(0, b)$ .

# Représentation des objets

Une image plane est une collection de points  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ .

Pour appliquer une transformation à l'image il suffit d'appliquer cette transformation à chacun des points.

Ces calculs peuvent être fait d'un seul coup en rangeant les points dans une matrice :

$$x_1 \ y_1 \ 1$$

$$x_2 \ y_2 \ 1$$

$$x_3 \ y_3 \ 1$$

$$\dots \ \dots \ \dots$$

$$x_n \ y_n \ 1$$

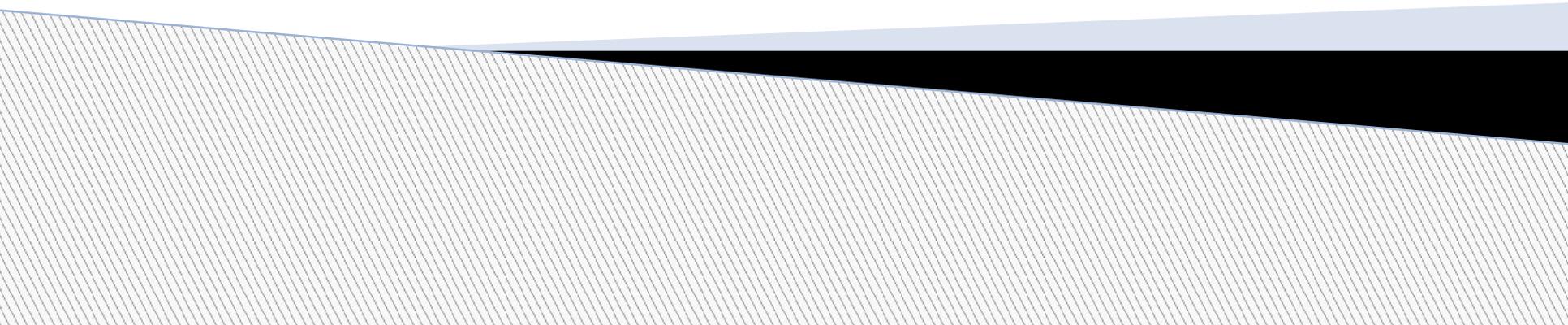
# Représentation des objets

et en multipliant cette matrice par la matrice M de la transformation :

$$\begin{array}{ccc} x'_1 & y'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 \\ x'_3 & y'_3 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x'_n & y'_n & 1 \end{array} = \begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n & y_n & 1 \end{array} \cdot M$$

# Rappels de géométrie

Transformations 3D

The bottom of the slide features a decorative graphic. It consists of a wavy line that separates a white background from a patterned area. The patterned area is filled with a dense, light blue hatched texture. Above the wavy line, there is a thin, solid black horizontal band.

# Matrice de transformation 3D

- En 3D, nous aurons une matrice semblable pour exprimer les transformations :

$$\begin{bmatrix} a & b & c & l \\ d & e & f & m \\ g & h & i & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & 3 \\ & 3 \times 3 & & \times \\ & & & 1 \\ 1 \times 3 & & & 1 \times 1 \end{bmatrix}$$

# Transformations 3D (1)

- Translation : 
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Homothétie (mise à l'échelle) :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Transformations 3D (2)

- Rotation :

Autour de l'axe  
des X

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

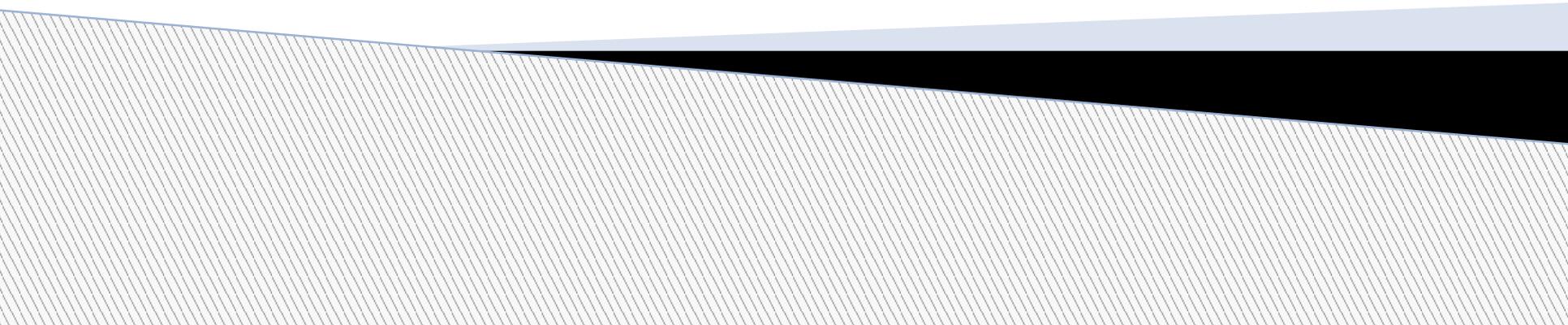
Autour de l'axe  
des Y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Autour de l'axe  
des Z

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Rappels d'Algèbre



# Produit en Croix (en dimension 2)

## • Définition

□ Le produit croisé ou produit en croix de deux vecteurs du plan est défini par:

$$\vec{U} \times \vec{V} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} U_x & V_x \\ U_y & V_y \end{vmatrix} = U_x V_y - U_y V_x$$

# Produit en Croix (en dimension 2)

- Propriétés

- anti-commutatif :  $\vec{U} \times \vec{V} = -(\vec{V} \times \vec{U})$

- associatif avec le produit d'un réel et d'un vecteur :

$$(\alpha \times \vec{U}) \times \vec{V} = \alpha \times (\vec{U} \times \vec{V})$$

- distributif par rapport à l'addition des vecteurs :

$$\vec{U} \times (\vec{V} + \vec{W}) = (\vec{U} \times \vec{V}) + (\vec{U} \times \vec{W})$$

# Produit en Croix (en dimension 2)

- Interprétation

- Le produit croisé fournit, un test de colinéarité pour deux vecteurs non nuls, et d'autre part, un test de placement d'un point relativement à une droite.
- le produit en croix permet de retrouver l'équation d'une droite  $D$  contenant un point  $M$ , et de vecteur directeur  $\vec{U}$ .

# Produit en Croix (en dimension 2)

- On a en effet :

$$X = (x, y) \in D \iff$$

$$\vec{U} \propto \vec{M}X = 0 \iff U_x \times (y - M_y) - U_y \times (x - M_x) = 0$$

# Produit scalaire (en dimension 2 ou 3)

## • Définition

- Le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace (ou du plan, en oubliant la composante z), est défini par :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = (U_x \times V_x) + (U_y \times V_y) + (U_z \times V_z)$$

# Produit scalaire (en dimension 2 ou 3)

- Propriétés

- $\vec{U} \cdot \vec{U} = \|\vec{U}\|^2$

- commutatif  $\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$

- associatif avec le produit d'un réel et d'un vecteur :

$$(\alpha \times \vec{U}) \cdot \vec{V} = \alpha \times (\vec{U} \cdot \vec{V})$$

- distributif par rapport à l'addition des vecteurs :

$$\vec{U} \cdot (\vec{V} + \vec{W}) = (\vec{U} \cdot \vec{V}) + (\vec{U} \cdot \vec{W})$$

# Produit scalaire (en dimension 2 ou 3)

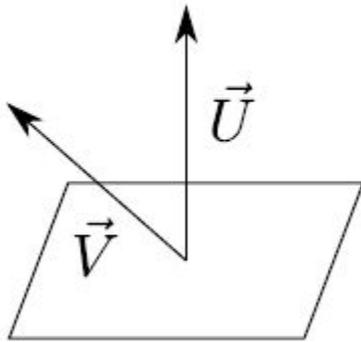
- Interprétation

- Le produit scalaire permet de déterminer la forme (aigu, droit, ou obtus) de l'angle entre deux vecteurs non nuls.
- En 3D, il fournit également un test de placement d'un point relativement à un plan.

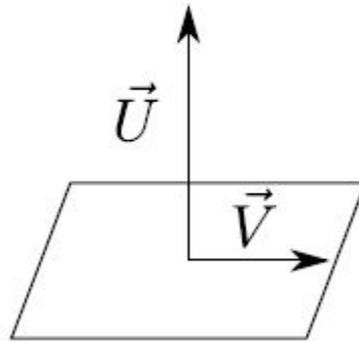
# Produit scalaire (en dimension 2 ou 3)

- Interprétation

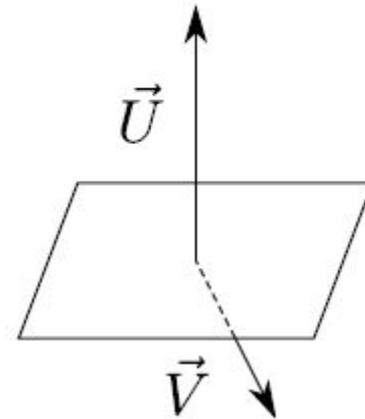
$$\vec{U} \cdot \vec{V} > 0$$



$$\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$$



$$\vec{U} \cdot \vec{V} < 0$$

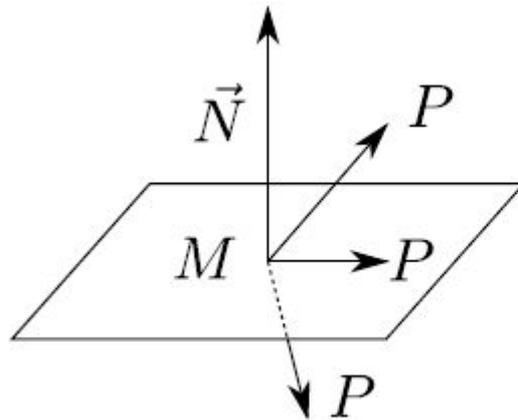


# Produit scalaire (en dimension 2 ou 3)

- Interprétation

Soit à présent un plan contenant un point  $M$ , et de normale

$\vec{N}$  (i.e.  $\vec{N}$  est un vecteur orthogonal au plan). On a :



$$\vec{N} \cdot \vec{MP} > 0$$

$$\vec{N} \cdot \vec{MP} = 0$$

$$\vec{N} \cdot \vec{MP} < 0$$

# Produit scalaire (en dimension 2 ou 3)

- $\vec{N} \cdot \vec{MX} = 0 \iff X$  appartient à  $\Pi$
- $\vec{N} \cdot \vec{MX} > 0 \iff X$  est du même côté du plan que  $\vec{N}$ .
- $\vec{N} \cdot \vec{MX} < 0 \iff X$  est du côté du plan opposé à  $\vec{N}$ .

L'équation du plan est  $\Pi(X) = 0$ , avec  $\Pi(X) = \vec{N} \cdot \vec{MX}$ , soit:

$$N_x \times (x - M_x) + N_y \times (y - M_y) + N_z \times (z - M_z) = 0$$

# Produit vectoriel (en dimension 3)

- Définition

Le produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace est défini par :

$$\begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} U_y & V_y \\ U_z & V_z \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} U_x & V_x \\ U_z & V_z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} U_x & V_x \\ U_y & V_y \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

# Produit vectoriel (en dimension 3)

$$\begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} U_y & V_y \\ U_z & V_z \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} U_x & V_x \\ U_z & V_z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} U_x & V_x \\ U_y & V_y \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_y V_z - U_z V_y \\ -U_x V_z + U_z V_x \\ U_x V_y - U_y V_x \end{pmatrix}$$

# Produit vectoriel (en dimension 3)

- Propriétés

- anti-commutatif :  $\vec{U} \wedge \vec{V} = -(\vec{V} \wedge \vec{U})$

- associatif avec le produit d'un réel et d'un vecteur :

$$(k \times \vec{U}) \wedge \vec{V} = k \times (\vec{U} \wedge \vec{V}).$$

- distributif par rapport à l'addition des vecteurs :

$$\vec{U} \wedge (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \vec{W}.$$

- non associatif.

# Produit vectoriel (en dimension 3)

- Interprétation

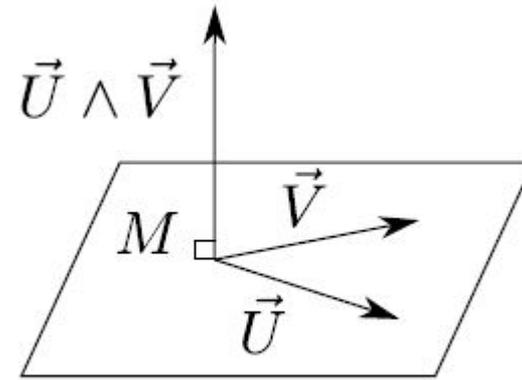
En dimension 3, le produit vectoriel de deux vecteurs non nuls et non colinéaires produit un nouveau vecteur non nul, et orthogonal aux deux premiers

(si  $\vec{U}$  ou  $\vec{V}$  est nul, ou si  $\vec{U} ; \vec{V}$  sont colinéaires, leur produit vectoriel est le vecteur nul).

Il permet en particulier de calculer une normale  $\vec{N}$  au plan engendré par un point M et deux vecteurs  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$

# Produit vectoriel (en dimension 3)

- Interprétation



Noter que  $\vec{V} \wedge \vec{U}$  est une normale au plan de direction opposée