

Определение нормированных приоритетов.

1. Матрица парных сравнений без учета интенсивности предпочтений.
2. Матрица парных сравнений с учетом интенсивности предпочтений.
3. Ранжировки объектов.

Определение нормированных приоритетов по матрице парных сравнений без учета интенсивности предпочтений

Нормированный приоритет i -го объекта определяется по формуле:

$$w_i = \frac{a_i}{\sum_{i=1}^n a_i}$$

где a_i – приоритет i -го объекта

Обязательное условие расчета нормированных приоритетов по матрице парных сравнений – $a_{ij} = 1 \quad i = j$

Пример 1.

Элемент	A	B	C	D	E	a_i	w_i
A	1	1	1	0	1	4	0,27
B	0	1	0	0	1	2	0,13
C	0	1	1	1	0	3	0,20
D	1	1	0	1	1	4	0,27
E	0	0	1	0	1	2	0,13
Сумма						15	1

Определение собственного вектора матрицы парных сравнений с учетом интенсивности предпочтений

Для определения собственного вектора матрицы, соответствующего максимальному собственному числу, необходимо решить уравнение:

$$A \cdot X = \lambda_{max} \cdot X$$

Для квадратной матрицы n -го порядка имеет место следующее:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \boxtimes + a_{1n} \cdot x_n \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \boxtimes + a_{2n} \cdot x_n \\ \boxtimes \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \boxtimes + a_{nn} \cdot x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \boxtimes \\ \lambda \cdot x_n \end{bmatrix}$$

Таким образом, элементы матрицы X соответствуют системе уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \boxtimes + a_{1n} \cdot x_n = \lambda \cdot x_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \boxtimes + a_{2n} \cdot x_n = \lambda \cdot x_2 \\ \boxtimes \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \boxtimes + a_{nn} \cdot x_n = \lambda \cdot x_n \end{array} \right.$$

Переносим члены из правой части в левую, получим:

$$\left[\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda) \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \boxtimes + a_{1n} \cdot x_n = 0 \\ a_{21} \cdot x_1 + (a_{22} - \lambda) \cdot x_2 + \boxtimes + a_{2n} \cdot x_n = 0 \\ \boxtimes \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \boxtimes + (a_{nn} - \lambda) \cdot x_n = 0 \end{array} \right.$$

Пример 2: Дана следующая матрица парных сравнений с учетом интенсивности предпочтений. Требуется найти нормированные приоритеты объектов.

	A	B	C
A	1	3	5
B	1/3	1	2
C	1/5	1/2	1

$$\lambda_{\max} = 3,001$$

$$I_s = 0,001$$

$$A = \begin{vmatrix} 1-3 & 3 & 5 \\ 1/3 & 1-3 & 2 \\ 1/5 & 1/2 & 1-3 \end{vmatrix} = -8 + \frac{6}{5} + \frac{5}{6} - (-2 - 2 - 2) = -\frac{1}{30} \approx 0$$

$$\begin{cases} -2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 = 0 \\ \frac{1}{3} \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 0 \\ \frac{1}{5} \cdot x_1 + \frac{1}{2} \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = 0 \end{cases}$$

Принимаем $X_1=1$, получаем:

$$\begin{cases} -2+3\cdot x_2+5\cdot x_3=0 \\ \frac{1}{3}-2\cdot x_2+2\cdot x_3=0 \\ \frac{1}{5}+\frac{1}{2}\cdot x_2-2\cdot x_3=0 \end{cases}$$

Складывая 2 и 3 уравнения, находим $X_2 = 0,356$

Из 1 уравнения выражаем $X_3 = 0,187$

Собственный вектор $X (1; 0,356; 0,187)$.

Нормируем собственный вектор X из единицы и получаем нормированные приоритеты:

$$w_1 = \frac{1}{1 + 0,356 + 0,187} = \frac{1}{1,543} = 0,65$$
$$w_2 = \frac{0,356}{1 + 0,356 + 0,187} = \frac{0,356}{1,543} = 0,23$$
$$w_3 = \frac{0,187}{1 + 0,356 + 0,187} = \frac{0,187}{1,543} = 0,12$$

Проверка правильности расчетов: $\sum_{i=1}^3 w_i = 1$

Особенности перехода от ранговой оценки объектов к нормированным приоритетам

Оценка объектов	Шкала	Суть оценки
Прямое ранжирование	Порядковая	Наилучший объект получает наименьший ранг
Нормированные приоритеты	Интервальная	Наилучший объект получает максимальный нормированный приоритет

Для унификации направленности предпочтений объектам присваиваются обратные ранги, вычисляемые по формуле:

$$r'_i = n - r_i + 1$$

где n – количество объектов;

r_i – исходный (прямой) ранг i -го объекта.

Нормированный приоритет вычисляется путем нормирования обратных рангов их суммой:

$$w_i = \frac{r'_i}{\sum_{i=1}^n r'_i}$$

Пример 3.

Элемент i	Прямой ранг r_i	Обратный ранг r_i'	Нормированный приоритет w_i
A	4	3	0,14
B	1	6	0,28
C	3	4	0,19
D	6	1	0,05
E	2	5	0,24
F	5	2	0,10
Сумма	—	21	1

Определение весов элементов иерархии

$$Z_1 = 1$$

$$Z_i = W_{i1} \cdot Z_1 \quad i = 2, 3, 4, 5$$

$$Z_i = \sum_{j=2}^5 W_{ij} \cdot Z_j \quad i = 6, 7, 8$$