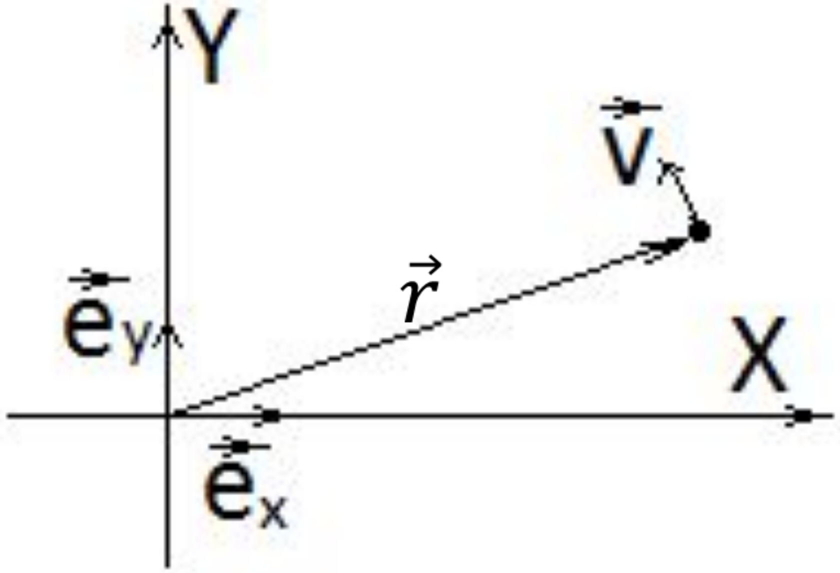
Лк_2

Криволинейное движение

Динамика



Пример. Радиус-вектор движущейся точки задан следующим выражением:

$$\vec{r} = \vec{e}_x R cos(\omega t) + \vec{e}_y R sin(\omega t)$$

Определить характер движения, скорость и ускорение.

Для определения характера движения вычислим модуль радиус-вектора:

$$|r| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{R^2 cos^2(\omega t) + R^2 sin^2(\omega t)} = R \qquad (1.13)$$

Таким образом, при движении точки |r|-const

$\Delta V > 0$

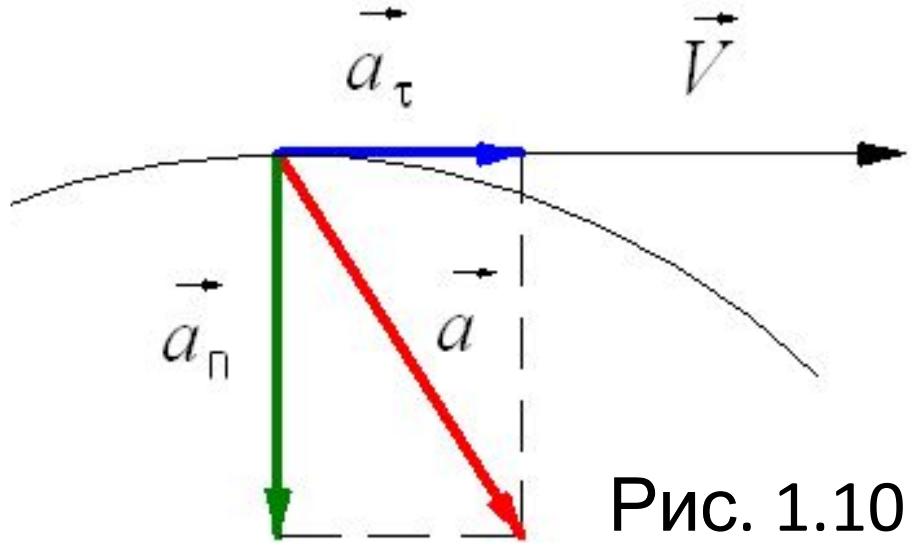


Рис. 1.10

называется **нормальной** составляющей ускорения. Тангенциальная составляющая ускорения выражает изменение модуля скорости, а нормальная составляющая - изменение направления скорости. В рассмотренном выше примере тангенциальная составляющего ускорения равна нулю. Вследствие этого скорость изменяется только по направлению, модуль ее остается неизменным.

В общем случае модуль полного ускорения определяется по теореме Пифагора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} \tag{2.0}$$

2. Кинематика вращательного движения, вектор угловой скорости, связь линейно и угловой скорости точки, вектор углового ускорения.

Движение по окружности является частным, но весьма распространенным типом движения. Для него вводятся такие дополнительные кинематические характеристики как **угловое перемещение - Δφ**, **угловая скорость - ω** и **угловое ускорение - ε**.

Величина угловой скорости ω определяется как отношение приращения угла - dφ, на который повернется радиус-вектор точки за время dt, к этому интервалу времени т.е.

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \qquad (2.1)$$

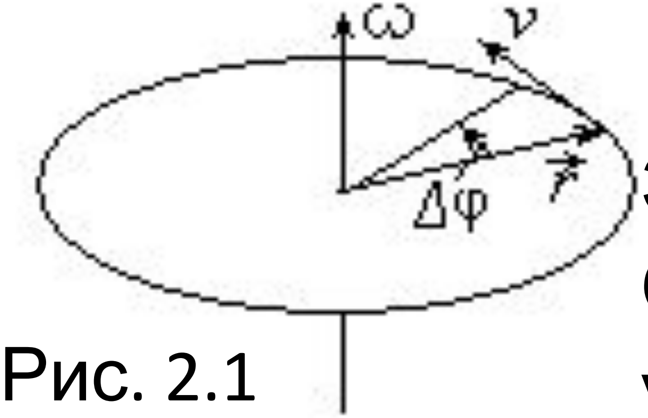


Рис. 2.1

Это вполне естественное определение. Однако, согласно (2.1), и угол поворота и угловая скорость определились как векторные величины.

Такое определение угловых величин оказывается очень удобным и продуктивным. Направление вектора угла поворота определяется правилом правого винта: *если правый винт поворачивать в направлении положительного приращения угла, то поступательное движение винта укажет направление вектора приращения угла*.

Похожее определение уже встречалось при определении векторного произведения. Действительно, если выразить приращение радиус-вектора точки, движущейся по окружности, при ее повороте на угол Δφ, то получим следующую формулу

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{\varphi} \times \vec{r} \qquad (2.2)$$

Вектор линейной скорости при движении точки по окружности с угловой скорость ω определится на основе (2.2)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (2.3)$$

Если начало координат совмещено с центром окружности как на рисунке 2.1, то радиус-вектор вращающейся точки и вектор угловой скорости взаимно перпендикулярны. при этом модуль их векторного произведения равен произведению модулей. Следовательно

$$|\vec{v}| = \omega R \qquad (2.4)$$

Вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ определяется через изменение угловой скорости вращения за время Δt:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{2.5}$$

Вектор полного ускорения – это производная от скорости по времени. Из (2.3), получим

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \tag{2.6}$$

Первое слагаемое в (2.6) представляет собой вектор, перпендикулярный радиусу-вектору точки и лежит в плоскости вращения. Это означает, что он параллелен вектору скорости, т.е. - это тангенциальное ускорение точки. Второе слагаемое перпендикулярно вектору скорости. Следовательно - это нормальное ускорение

Подставим в (2.6) вместо $\vec{v}$ ее выражение (2.3) и распишем тройное векторное произведение. В результате получим:

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r} \qquad (2.7)$$

Т.е. нормальное ускорение направлено против радиус-вектора - к центру вращения. Поэтому его называют центростремительным.

Пятиминутка. Материальная точка движется по окружности так, что ее угол поворота описывается формулой $\vec{\varphi} = \vec{e}_z \frac{\varepsilon}{2} t^2$. В начальный момент времени радиус-вектор точки имел значение $\vec{r}(0) = \vec{e}_x R$. Записать формулу для вектора угловой скорости точки, радиус-вектора точки и векторов тангенциального и нормального ускорений.

Динамика

в отличие от кинематики рассматривает движение тел под действием сил. Повседневный опыт показывает, что любое тело, движущееся на Земле или вблизи ее поверхности, само по себе останавливается, если каким-либо образом не поддерживать это движение. Недостаточно критическая оценка результатов опыта приводила к мнению, что для поддержания движения даже с неизменной скоростью необходимо воздействие окружающих тел. Эта точка зрения господствовала в древние времена. Галилей, по-видимому, первым осознал, что прекращение движения есть результат каких-то воздействий, препятствующих ему (трение). Он понял, что без взаимодействий тело должно двигаться равномерно и прямолинейно (либо покоиться), а взаимодействия с другими телами вызывают изменения движения, т. е. ускорения.

Это умозаключение, выходящее за пределы непосредственного опыта, явилось одной из гениальных абстракций в истории физики. Ньютон в своих законах динамики принял и развил мысль Галилея.

2.1. Первый закон Ньютона.

Первый закон динамики Ньютона гласит***: всякое тело (материальная точка) сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока внешние воздействия (силы) не выведут его из этого состояния.*** Свойство тела сохранять свою скорость называют **инерцией**, а системы отсчета, в которых выполняется этот закон, - **инерциальными.** Физический смысл закона состоит в том, что для механики нет различия между состоянием покоя и равномерного прямолинейного движения.

Таким образом определяется относительность движения. Строго говоря, этот закон является чистой абстракцией, но опыт подтверждает его справедливость.

Причина изменения состояния тела, т.е. появление ускорения связана с понятием **силы**. Сила - количественная мера воздействия на тело со стороны других тел. Вообще говоря, это воздействие может быть достаточно сложным, но в любом случае его можно разложить на так называемые простые воздействия. Поэтому **силой называют количественную меру простого воздействия на тело со стороны других тел, в результате которого тело или его части получают ускорение.** Силу принято измерять (в международной системе единиц СИ) в **Ньютонах (Н)**

До сих пор существуют метрические внесистемные единицы: грамм, килограмм, тонна. Они используются при определении веса тела. (**Вес тела - это сила, с которой оно под действием земного притяжения давит на подставку или растягивает нить подвеса**). Для измерения силы используют динамометр – пружину со шкалой.

2.2. Второй закон Ньютона. Опыт показывает, что одна и та же сила сообщает различным телам разные ускорения. Более массивные тела приобретают меньшие ускорения. Для характеристики способности тел противостоять действию силы используется понятие **массы.** Чем меньше ускорение, которое получает тело при фиксированном воздействии, тем больше его масса, т.е. ускорения тел обратно пропорциональны их массам:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

Приняв какую-либо массу за эталон, с помощью этого соотношения можно измерять любую массу. В виду того, что масса в системе СИ является основной единицей, зависимость ускорения тела от приложенной к нему силы и массы используется для определения единицы силы на основании формулы

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \,. \tag{2.8}$$

Очевидно, что сила – вектор, направление которого определяет направление ускорения. Если на тело действует несколько сил, то ускорение тела пропорционально их векторной сумме:

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i \,. \tag{2.9}$$

Уравнение (2.9) представляет одну из форм записи второго закона Ньютона. В механике это уравнение принято называть **уравнением движения**. Это уравнение - векторное, и его можно заменить тремя скалярными, умножая скалярно (2.9) на единичные векторы осей X, Y и Z. Второй закон Ньютона может быть сформулирован в более общем виде с помощью понятия **импульса тела**. Импульсом называется величина $\vec{p} = m\vec{v}$, где v - скорость тела. Если положить, что масса тела постоянна и не зависит от скорости, то:

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i. \qquad (2.10)$$

Последнее равенство называется ***основным уравнением динамики***.

2.3. Третий закон Ньютона.

Понятие силы определено как мера взаимодействия тел, т.е. при рассмотрении движения какого-нибудь тела учитывается только одна сторона этого взаимодействия. Ясно, однако, что все тела надо рассматривать как равноправные, т.е. если второе тело воздействует на первое, то и первое тело воздействует на второе. Третий закон Ньютона устанавливает соотношение между этими воздействиями.

Силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны по величине и направлены по одной прямой в разные стороны.

Пример: книга лежит на столе; она притягивается к Земле и вследствие этого давит на стол. Однако книга не проваливается к центру Земли, т.к. стол со своей стороны действует на книгу с силой равной по величине силе давления книге на стол. Эта сила со стороны стола носит название реакции опоры.

К самой книге приложено две силы: сила притяжения и сила реакции опоры. Они равны по величине и противоположно направлены, т.е. их сумма равна нулю, поэтому книга никуда не двигается.

2.4. Природа и виды механических сил. По определению сила – это мера взаимодействия тел. Любое тело состоит из множества молекул, молекулы из атомов, атомы также имеют сложную структуры, в конечном счете, все сводится к взаимодействию элементарных частиц. В механике опускаются подробности микро взаимодействий и рассматриваются только их макроскопические проявления. При этом выделяются:

1. Силы всемирного тяготения, природа гравитационная.
2. Силы упругости и силы трения, природа электромагнитная.

На каждое тело, находящееся на земле, действует гравитация Земли. Сила, с которой Земля притягивает каждое тело у своей поверхности, определяется по формуле

$$\vec{F} = m\vec{g} \tag{2.11}$$

F – сила тяжести [Н]; m – масса тела [кг]; g – ускорение свободного падения. Среднее значение модуля g=9.80665 м/с².

Точка приложения силы тяжести находится в центре тяжести тела. Вектор ускорения свободного падения и сила тяжести тяжести *всегда направлены вертикально вниз*.

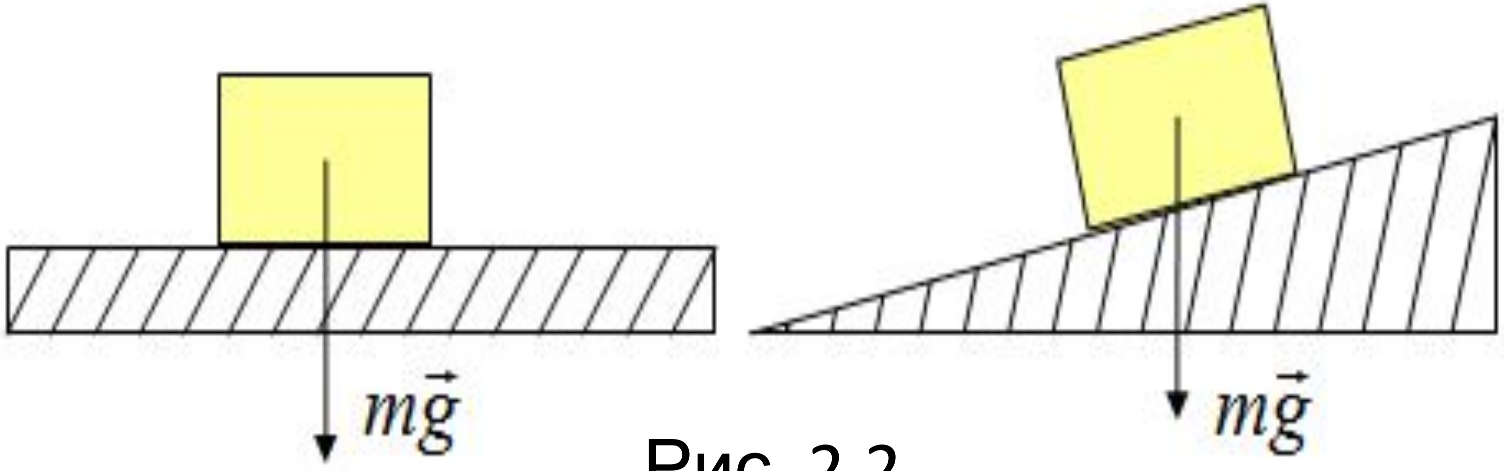


Рис. 2.2

Вес тела - это сила, с которой предмет воздействует на опору или растягивает нить подвеса. Часто вес тела равен силе тяжести, но ***это силы совершенно разные***. Сила тяжести - сила, которая возникает в результате взаимодействия с Землей. Вес - результат взаимодействия с опорой. Сила тяжести приложена в центре тяжести предмета, вес же - сила, которая действует на опору (не на предмет)!

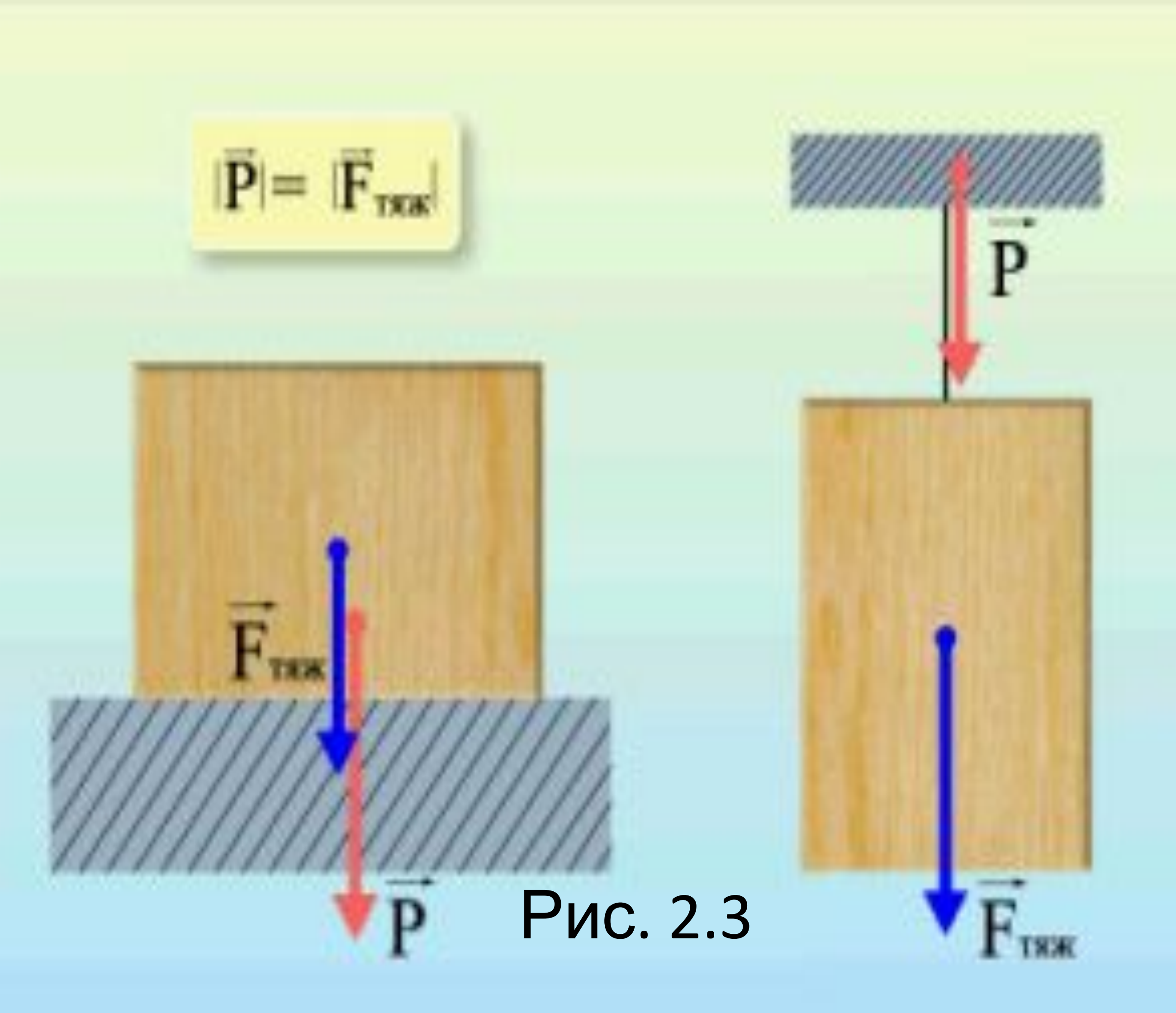


Рис. 2.3

Сила упругости. Это сила возникает в результате деформации (изменения первоначального состояния вещества). Например, когда растягиваем пружину, мы увеличиваем расстояние между молекулами материала пружины. Когда сжимаем пружину - уменьшаем. При этом возникает сила, которая препятствует деформации - сила упругости. При небольших деформациях справедлив закон Гука: $\boldsymbol{F=k\Delta l}$**,** где k – жесткость материала [Н/м], Δl – изменение линейного размера, вызванное деформацией [м]. Сила упругости направлена противоположно деформации. Жесткость выражается через т.н. модуль юнга – E [Н/м^2]:

$$k = \frac{ES}{l_0} \qquad (2.12)$$

S – площадь сечения, перпендикулярного деформации, l_0 – длина до деформации.

Сила реакции опоры или подвеса действует на, лежащее на опоре или подвешенное тело. Согласно третьему закону Ньютона опора или подвес воздействует на предмет с такой же по модулю силой, что и предмет на них. Сила реакции направлена перпендикулярно поверхности опоры или вдоль нитей подвеса, как показано на рисунке. Эта сила возникает всегда, когда есть воздействие на опору. Природа ее возникновения на молекулярном уровне: предмет деформирует опору

вследствие чего появляется сила упругости, проявляющаяся как сила реакции.

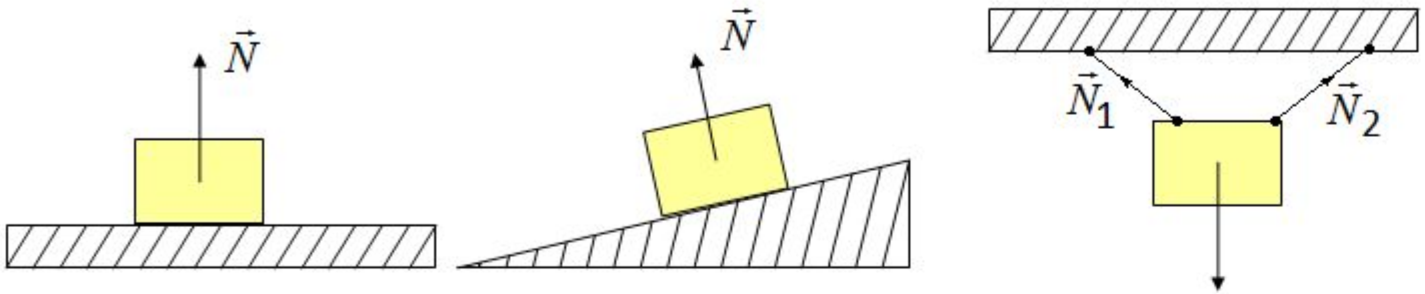


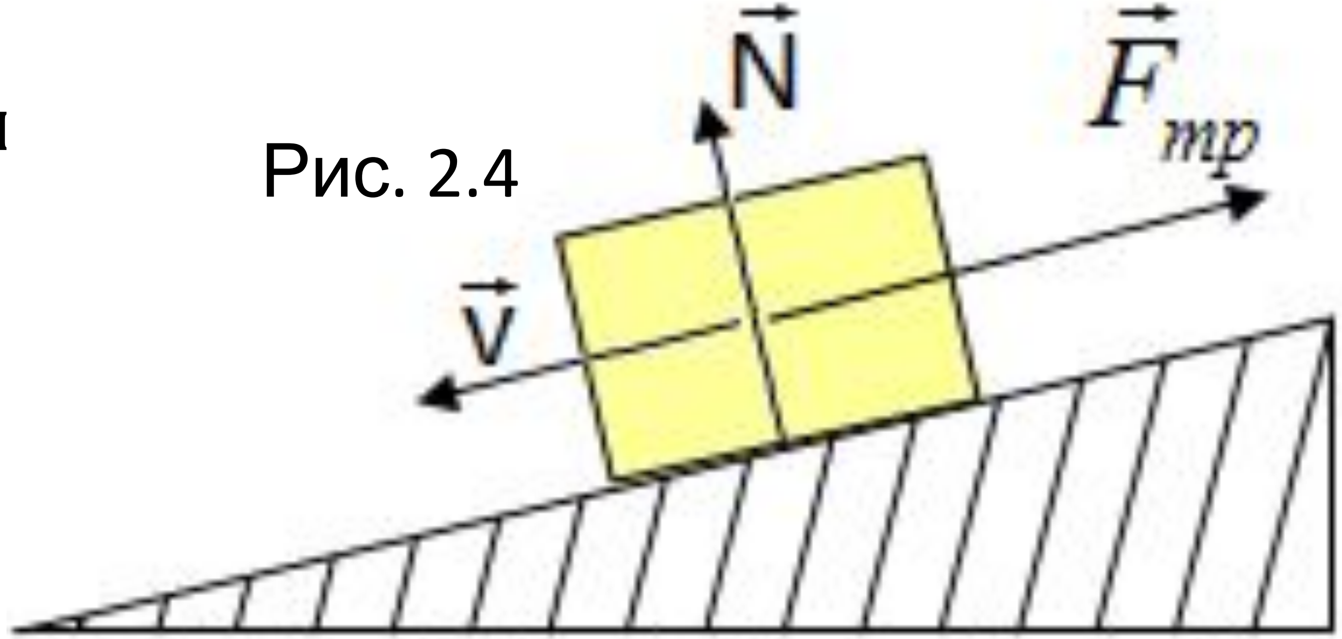
Рис. 2.4

Сила трения. Рассмотрение сил трения ограничим двумя примерами: силами сухого и силами вязкого трения. Модуль силы сухого трения скольжения не зависит от скорости:

$$F = \mu|\vec{N}| \tag{2.13}$$

Где, μ – коэффициент трения, N – сила реакции опоры, по которой скользит тело. Сила приложена в точке соприкосновения двух поверхностей. *Направлена в сторону противоположную движению*. Т.о. для определения направления силы «сухого» трения необходимо вначале определить направление движения.

Рис. 2.4



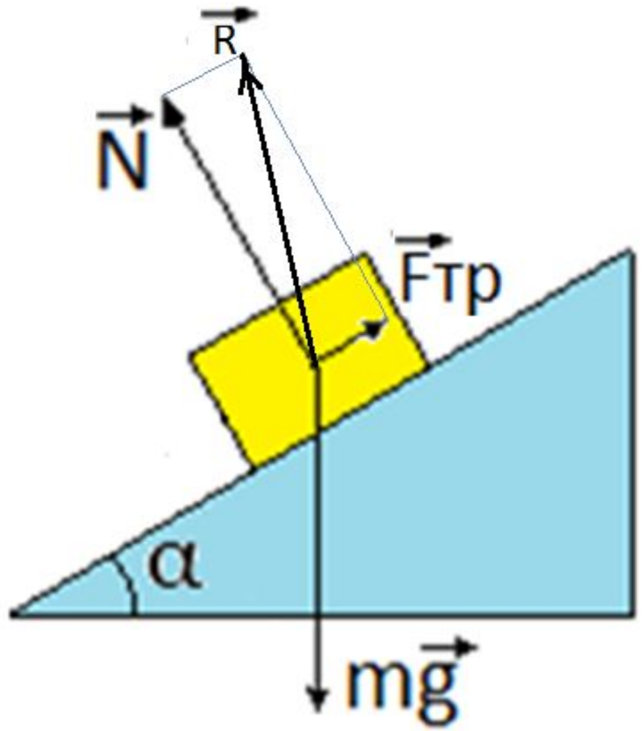
Можно считать силу трения частью силы реакции опоры, если тело скользит по ней.

Сила вязкого (жидкого) трения, зависит от величины скорости, причем степень зависимости меняется по мере возрастания скорости. Для сравнительно небольших скоростей она может быть представлена в таком виде:

$$\vec{F}_{\text{вяз}} = -b\vec{v} \qquad (2.14)$$

Практически важное значение имеет сила трения покоя, возникающая между соприкасающимися телами. Максимальную величину этой силы обычно оценивают по формуле для силы трения сухого скольжения, хотя в действительности они несколько отличаются друг от друга.

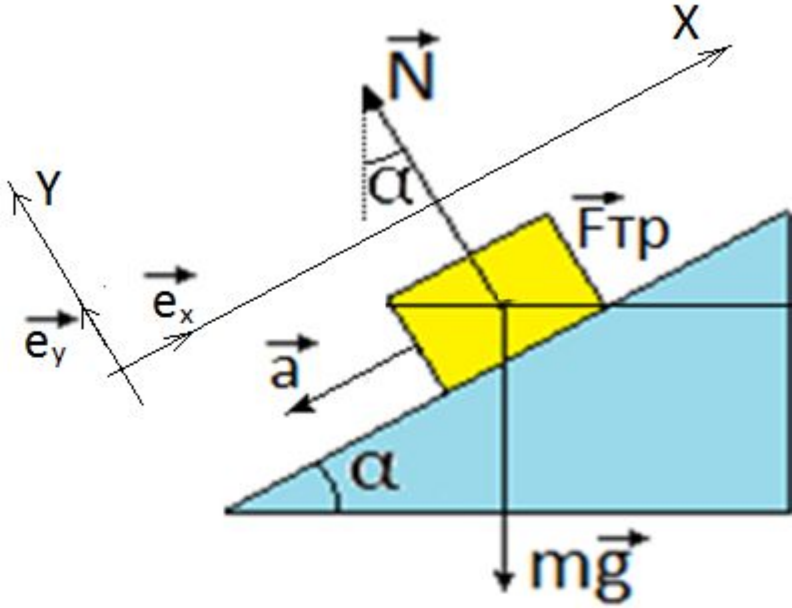
Пример 1. Тело массой m=10 кг находится на плоскости с углом наклона α=30^{o}. Определить ускорение скатывания тела – a и силу реакции - N. Коэффициент трения тела о плоскость μ=0.1.



Решение: Построим на чертеже векторы сил, действующих на тело. Это сила тяжести, действующая вертикально вниз и сила реакции опоры – $\vec{R}$. Разложим реакцию на две составляющие: нормальную силу реакции – $\vec{N}$ и силу трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Направления действия всех сил известны из условия задачи. Для определения ускорения движения тела необходимо воспользоваться вторым законом Ньютона в форме (2.9)

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$$

Уравнение движения составлено, но оно в векторной форме, из которой не видно решения. Далее следует стандартный прием: введение системы координат и проецирование уравнения на координатные оси. ***Спроецировать уравнение на ось – это умножить скалярно левую и правую части уравнения на единичный вектор оси.***



Выбор осей для проецирования не принципиален, но при удачном выборе решение упрощается. Возьмем оси X и Y, как показано на рисунке.

Проецируем уравнение на ось X:

$$m\vec{a} \cdot \vec{e}_x = m\vec{g} \cdot \vec{e}_x + \vec{N} \cdot \vec{e}_x + \vec{F}_{\text{тр}} \cdot \vec{e}_x$$

Удачность выбора оси для проецирования состоит в том, что почти все векторы уравнения либо параллельны (антипараллельны) оси либо составляют с ней прямой угол. При этом вычисление скалярного произведения оказывается очень простым. В данном случае только произведение $\vec{g} \cdot \vec{e}_x$ требует внимания для вычисления. Выполнив умножения, получим:

$$-ma = -mgsin(\alpha) + F_{\text{тр}}$$

Проделаем ту же операцию проецирования на ось Y:

$$m\vec{a} \cdot \vec{e}_y = m\vec{g} \cdot \vec{e}_y + \vec{N} \cdot \vec{e}_y + \vec{F}_{\text{тр}} \cdot \vec{e}_y$$

После скалярных перемножений будем иметь

$$N = mgcos(\alpha)$$

В полученной системе уравнений 3 неизвестные величины a, Fтр N. Для их определения необходимо третье уравнение. Оно есть $F_{тр}=N\mu$

$$-ma = -mgsin(\alpha) + F_{тр}$$

$$N = mgcos(\alpha)$$

$$F_{тр}=N\mu$$

Эта система уравнений легко решается:

$$a = g(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha)) = -4.051\,\frac{м}{с^2}$$

$$N = mgcos(\alpha) = 8.66\,\frac{кг * м}{с^2} = 8.66Н$$

$$F_{тр}=N\mu=0.866Н$$

Знак минус в значении ускорения говорит о том, что его проекция на ось X отрицательна.

Сила тяжести – частный вид гравитационной силы. Величина гравитационной силы притяжения двух точечных масс m_1 и m_2 определена Ньютоном и известна как закон всемирного тяготения:

$$F_{\text{грав}} = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,, \tag{2.15}$$

где r - расстояние между массами, а G = 6,67 10 $^{-11}$ Нм^2/кг^2 - гравитационная постоянная. В частности, для силы тяжести на поверхности земли:

$$F_{\text{тяж}} = G\,\frac{M_{\text{земл}}}{R_{\text{земл}}^2}\,m = gm \tag{2.16}$$

Откуда определится формула для ускорения свободного падения:

$$g = G\,\frac{M_{\text{земл}}}{R_{\text{земл}}^2}$$

Радиус земли известен $R_{\text{земл}}$=6380 км. Данная формула позволяет вычислить массу земли.

Пятиминутка: вычислить массу земли если известно ускорение свободного падения на поверхности g=9.8 м/с2, радиус земли R=6380 км, гравитационная постоянная $G = 6{,}67\ 10^{-11}$ $Нм^2/кг^2$.

Особое внимание уделить вычислению размерности результата.

(Отв. $M_{земл}=5.98*10^{24}$ кг)