

Интерполяционный многочлен Лагранжа



Приближением (аппроксимацией) функции $f(x)$ называется отыскание функции $g(x)$, близкой в некотором смысле к $f(x)$. Аппроксимирующая функция $g(x)$ должна быть «проще» исходной. Как понимается близость функций и в чем критерий простоты, об этом речь пойдет ниже.

Аппроксимация может потребоваться в следующих случаях:

1) известны, например из эксперимента, значения функции $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, \dots, f(x_n) = y_n$ (итак, функция $y = f(x)$ задана таблично). Требуется найти значение $f(x)$ при таком значении аргумента x^* , которого нет среди узлов x_1, x_2, \dots, x_n , но сделать это по каким-либо причинам затруднительно¹. В таком случае можно найти аппроксимирующую функцию $g(x)$; если она «близка» к $f(x)$ на множестве узлов $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, то и в нужной точке x^* , вероятно, $f(x^*) \approx g(x^*)$;

2) функция $f(x)$ задана аналитически, т.е. формулой, но эта формула слишком сложна² для регулярного использования. И в этом случае выгодно аппроксимировать $f(x)$ более простой функцией $g(x)$ и все расчеты выполнять с ней.

Какие функции наиболее «просты» и в силу этого удобны в качестве аппроксимирующих? Чаще всего используются полиномы (многочлены)

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n. \quad (2)$$

Действительно, полиномы легко складывать, умножать и делить; их можно элементарно дифференцировать и интегрировать.

Иногда (но не в данном курсе) применяют обобщенные полиномы вида

$$a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x),$$

где функции $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, предполагаются линейно независимыми. Например, функции $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx\}$ тоже обладают удобными свойствами и используются для разложения произвольных $f(x)$ при весьма общих условиях в тригонометрические ряды Фурье.

Рассмотрим теперь некоторые подходы к понятию близости функций.

1. Интерполяция. Требуется найти полином $P_n(x)$, принимающий те же значения, что и аппроксимируемая функция $f(x)$, в $(n+1)$ узле

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

В таком случае полином $P_n(x)$ называется интерполяционным, а точки x_0, x_1, \dots, x_n — узлами интерполяции.

Если число узлов велико, то отыскание интерполяционного полинома, как мы увидим далее, будет трудоемким. Кроме того, точное равенство $P_n(x_i) = f(x_i)$ может оказаться бессмысленным требованием, если сами значения $f(x_i)$ аппроксимируемой функции в узлах получены из эксперимента и потому заведомо неточно.

2. Наилучшее приближение. Пусть функция $f(x)$ задана таблично в узлах x_0, x_1, \dots, x_n . Подберем полином $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ так, чтобы сумма квадратов разностей значения аппроксимируемой функции и полинома по всем узлам минимизировалась

$$\sum_{i=0}^n (f(x_i) - P_n(x_i))^2 \rightarrow \min.$$

Из данного условия определяются коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_n искомого полинома.

На этом пути мы пришли бы к знаменитому методу наименьших квадратов, но рассматривать его здесь мы не будем.

Займемся интерполяцией. Итак, пусть функция $f(x)$ задана таблично в $(n+1)$ узле

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n.$$

Требуется найти интерполяционный полином, такой, что

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3)$$

Геометрически это означает, что график полинома проходит через точки $M_i(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ (рис. 1).

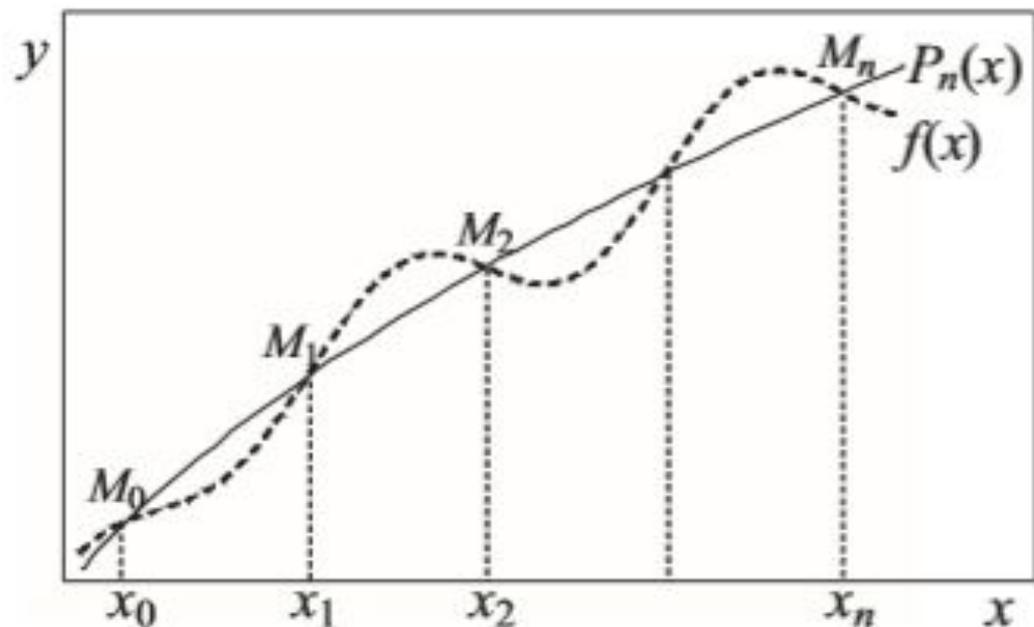


Рис. 1. Графики аппроксимируемой функции и ее интерполяционного полинома

Интерполяционный полином используется для приближенного вычисления значений функции $f(x)$ в точке, отличной от узлов интерполяции, $f(x) \approx P_n(x)$. Если значение x лежит между узлами интерполяции, то приближенное отыскание значения $f(x)$ называется **интерполированием** (в узком смысле); если же значение x лежит левее или правее всех узлов, то говорят об интерполировании в широком смысле (или **экстраполировании**).

Степень интерполяционного полинома, построенного по $(n+1)$ точке, в исключительных случаях может оказаться меньше n . Например, если все точки $M_i(x_i, y_i)$ лежат на одной прямой (наклонной или горизонтальной), то полином будет иметь первую (соответственно нулевую) степень. Понятно, что такие случаи крайне редки.

В общем случае по заданным значениям $f(x)$ в $(n+1)$ узле конструируется полином степени n , притом единственным образом. Покажем это. Подставляя в общий вид полинома (2) условия (3), получим систему из $(n+1)$ линейного уравнения

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_1^n = y_1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_0 + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

с $(n+1)$ неизвестными — коэффициентами полинома a_0, a_1, \dots, a_n . Решать эту систему можно, например, по правилу Крамера. Если главный определитель системы (составленный из коэффициентов при неизвестных) отличен от нуля, то система имеет решение и притом единственное. В нашем случае главный определитель имеет специальный вид (так называемый определитель Вандермонда):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Доказывается, что $\Delta \neq 0$, поскольку узлы интерполяции x_0, x_1, \dots, x_n — различные числа. Итак, решение системы — коэффициенты интерполяционного полинома a_0, a_1, \dots, a_n — существует и единственно. Поэтому по данным значениям $f(x)$ в $(n+1)$ узле можно построить полином $P_n(x)$ степени n , притом единственным образом. Есть несколько способов построения, приводящих к одинаковому результату. Мы рассмотрим простейший способ, предложенный Лагранжем (1736–1813).

Жозеф Луи Лагранж (1736-1813)

Французский математик и механик, иностранный почетный член Петербургской АН, член Парижской АН. Родился в семье обедневшего чиновника. Самостоятельно изучал математику. В 19 лет стал профессором в артиллерийской школе Турина.

Лагранжу принадлежат выдающиеся исследования по различным вопросам математического анализа (построение анализа на базе представления функций в степенные ряды, формула остаточного члена ряда Тейлора, формула конечных приращений - формула Лагранжа, теория условных экстремумов - метод множителей Лагранжа), алгебре (метод Лагранжа приведения квадратичной формы, симметрические функции корней уравнения, теория и приложения непрерывных дробей), дифференциальным уравнениям (теория особых решений, метод вариации постоянных), интерполированию (интерполяционная формула Лагранжа), математической картографии, астрономии и пр.



Интерполяционный полином Лагранжа

Для системы узлов x_0, x_1, \dots, x_n введем коэффициенты Лагранжа вида

$$L_n^i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}.$$

Здесь индекс i может принимать значения $0, 1, \dots, n$. В числителе каждый сомножитель представляет собой разность переменного x и значения одного из узлов (за исключением i -го узла, что отмечено верхним индексом в обозначении функции L_n^i). Знаменатель формально отличается от числителя тем, что вместо переменного x подставлено значение пропущенного, i -го, узла интерполяции x_i . После упрощений становится понятно, что коэффициент Лагранжа $L_n^i(x)$ является полиномом n -й степени (что отмечено нижним индексом в обозначении L_n^i).

При подстановке значения j -го узла в качестве аргумента коэффициента Лагранжа получится

$$L_n^i(x_j) = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$$

В таком случае полином Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_n^i(x) = f(x_0) L_n^0(x) + f(x_1) L_n^1(x) + \dots + f(x_n) L_n^n(x) \quad (4)$$

удовлетворяет условиям (3)

$$L_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

и имеет степень n , т. е. является искомым интерполяционным полиномом.

Пример. Функция $y = f(x)$ задана таблично своими значениями в четырех узлах:

i	0	1	2	3
узлы x_i	-1	0	2	5
$y_i = f(x_i)$	1	-3	2	4

Построить для $y = f(x)$ интерполяционный полином Лагранжа и, пользуясь им, приближенно найти значение y в точке $x = 1$, которой нет среди узлов.

Решение. Применяя формулу (4), получим

$$\begin{aligned}
 L_3(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \\
 &+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \\
 &= 1 \frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{(-1-0)(-1-2)(-1-5)} - 3 \frac{(x+1)(x-2)(x-5)}{(0+1)(0-2)(0-5)} + \\
 &+ 2 \frac{(x+1)(x-0)(x-5)}{(2+1)(2-0)(2-5)} + 4 \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(5+1)(5-0)(5-2)} = -\frac{19}{45}x^3 + \frac{233}{90}x^2 - \frac{89}{90}x - 3.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$f(1) \approx L_3(1) = -\frac{19}{45} + \frac{233}{90} - \frac{89}{90} - 3 = -\frac{82}{45} = -1.82.$$

Итак, ответ получен, но вопрос о его точности пока остается открытым. Заметим, что имела место интерполяция в узком смысле, поскольку точка $x=1$ лежит между узлами интерполяции.