Лекция №6

Немонотонная логика.

Немонотонные системы

Определение 1: Форм. система $\langle \mathcal{L}, R \rangle$ называется "*нормальной*", если

$\begin{cases} 1^\circ. & \forall \varphi \in \mathcal{L}, \ \neg\varphi \in \mathcal{L} \ \text{(есть оператор отрицания '}\neg\text{')} \\ 2^\circ. & \bot \in \mathcal{L}, \ (\bot - \text{утверждение, которое всегда ложно}) \\ 3^\circ. & \forall \varphi \in \mathcal{L}, \ \langle \{\varphi, \neg\varphi\}, \bot \rangle \in R. \end{cases}$

Очевидно, что любую формальную систему с "$\neg$" можно привести в "нормальный" вид, добавив $\bot$ к $\mathcal{L}$, и $\{\langle\{\varphi, \neg\varphi\}, \bot\rangle, \varphi \in \mathcal{L}\}$ к R.

Определение 2: Пусть $\langle \mathcal{L}, R \rangle$ - нормальная ФС. Тогда $\langle \mathcal{L}, R, A \rangle$ - *немонотонная система*, если $A \subseteq \mathcal{L}$.

(A - множество допустимых предположений), которые принято считать истинными, если не доказано противное.

Пример 1: $A = \{\neg \text{Виновен}(a),\ \text{виновен}(a) \in L\}$ 2

Пример 2: $A = \{\neg K(x),\ x$ – терм в ИП $\}$

$K(x)$ – "известно, что x", "я убежден, что x", "я знаю, что x"

Пусть $\langle L, R, A \rangle$ – немонотонная система, в которой $\langle L, R \rangle$ – нормальная форм. система.

Определение 3: Пусть $\Delta_1, \Delta_2 \subseteq A$.

Тогда Δ_1 исключает Δ_2 для T, если:

1) $T \cup \Delta_1 \nvdash \perp$
2) $T \cup \Delta_1 \cup \Delta_2 \vdash \perp$

Пример: $T = \{\neg p \supset q,\ \neg q \supset p,\ \neg r \supset s\}$

Тогда $\{\neg p\}$ исключает $\{\neg q\}$

$\{\neg q\}$ исключает $\{\neg p\}$.

Пусть $\langle L, R, A \rangle$ - нормальная немонотонная система т.е. $\langle L, R \rangle$ - нормальна, и пусть $\Delta \subseteq A$, $T \subseteq L$.

__Определение 4__: Δ __приемлема__ для T, если $T \cup \Delta \nvdash \bot$

__Определение 5__: Δ __сильно приемлема__ для T, если $\forall \Delta'$ - приемлемой для T, $T \cup \Delta' \cup \Delta \nvdash \bot$. То есть Δ - __сильно приемлема__ для T, если для любого Δ' - приемлемого для T, Δ приемлемо для $T \cup \Delta'$.

__Пример__: $T = \{\neg p \supset q, \neg q \supset p, \neg r \supset s\}$

$\{\neg p\}$ и $\{\neg q\}$ - приемлемы для T

$\{\neg r\}$ - сильно приемлема для T

Пусть $\langle \mathcal{L}, R, A \rangle$ – пропоз. немон. система,
$T \subseteq \mathcal{L}$, $\varphi \in \mathcal{L}$.

<u>Определение 6</u>: $T \vdash \varphi$ в $\langle \mathcal{L}, R, A \rangle$,
если существует $\varphi_1, \ldots \varphi_n \in \mathcal{L}$, такие, что $\forall i = \overline{1, n}$

- $\varphi_i \in T$, либо
- существует $\langle S, \varphi_i \rangle \in R$, т. что $S \subseteq T \cup \{\varphi_1, \ldots \varphi_{i-1}\}$,
- либо $\varphi_i \in A$, и $\{\varphi_i\}$ <u>приемлемо</u> для $T \cup \{\varphi_1, \ldots \varphi_{i-1}\}$.

<u>Определение 7</u>: $T \Vdash \varphi$ в $\langle \mathcal{L}, R, A \rangle$
если существует $\varphi_1, \ldots \varphi_n \in \mathcal{L}$, такие, что $\forall i = \overline{1, n}$

- $\varphi_i \in T$, либо
- существует $\langle S, \varphi_i \rangle \in R$, т. что $S \subseteq T \cup \{\varphi_1, \ldots \varphi_{i-1}\}$
- либо $\varphi_i \in A$ и $\{\varphi_i\}$ <u>строго приемлемо</u> для $T \cup \{\varphi_1, \ldots \varphi_{i-1}\}$

Теорема:

1). $T \mid\!\sim \varphi$, если существует конечное $\Delta \subseteq A$, т.что $T \cup \Delta \vdash \varphi$, и Δ – приемлема для T.

2) $T \mid\!\mid\!\sim \varphi$, если существует конечное $\Delta \subseteq A$, т.что $T \cup \Delta \vdash \varphi$, и Δ - строго приемлемо для T.

Определение 8: $Th(T) = \{\varphi \mid T \vdash \varphi\}$.

Определение 9: Пусть $S, T \subseteq L$. Тогда S - слабое расширение T, если $\exists \Delta \subseteq A$, такое, что

1): $S = Th(T \cup \Delta)$

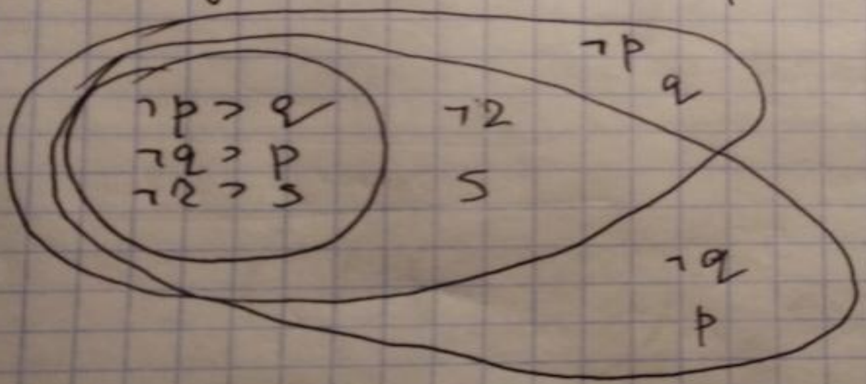
2): Δ – приемлемо для T

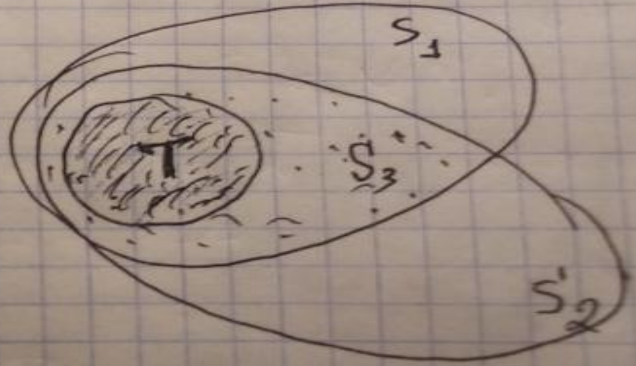
3): $\forall \varphi \in A$, $\Delta \cup \{\varphi\}$ не приемлемо для T.

Определение 10: Пусть $T, S \subseteq L$.

Тогда S — сильное расширение T, если S — пересечение всех слабых расширений T, то есть $S = \{\varphi \mid \exists S'\text{-слабое расширение } T, \text{ т.что } \varphi \in S'\}$

Пример: $T = \{\neg p \supset q,\ \neg q \supset p,\ \neg r \supset s\}$





$S_3 = S_1 \cap S_2$

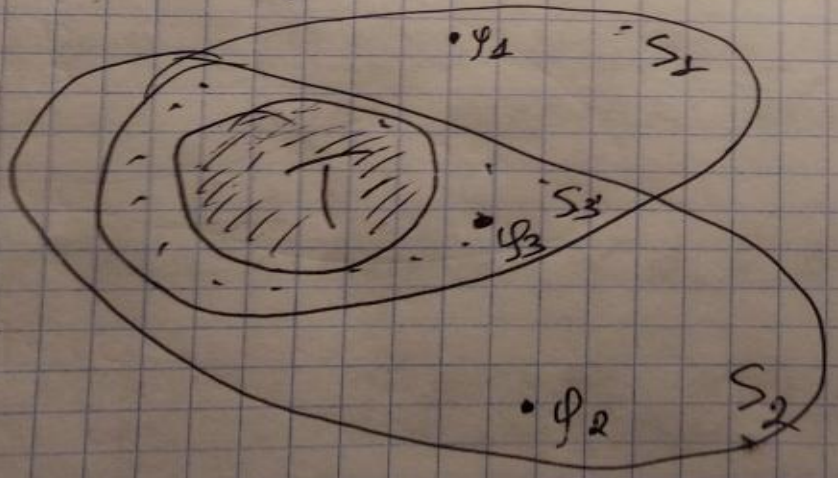
$T \mid\!\sim \varphi$!!!

~~$T \mid\!\sim \varphi$~~

<u>Теорема</u>: Пусть $\langle \mathcal{L}, R, \Delta \rangle$ норм. пол. система, $T \subseteq \mathcal{L}$, $\varphi \in \mathcal{L}$. Тогда

1). $T \mid\!\sim \varphi$ т. и т. т., если $\exists \bar{S}$ – слабое расширение T, такое, что $\varphi \in \bar{S}$.

2) $T \mid\!\approx \varphi$, т. и т. т., если φ принадлежит сильному расширению T, то есть пересечению всех расширений T



$$\left.\begin{array}{l} T \mid\!\sim \varphi_1 \\ T \mid\!\sim \varphi_2 \\ T \mid\!\approx \varphi_3 \end{array}\right\}$$

<u>Пример</u>: $\langle L, R, A \rangle$, где $\langle L, R \rangle$ пара ИП

Тогда $A = \{ \neg$ виновен(x), x – константа $L \}$

$T = \{$ совершил$(x$, преступление$) \supset$ виновен(x),
совершил(Петр, преступление) $\}$

$T \vdash$ виновен(Петр), $T \mid\!\sim$ виновен(Петр)

$T \nvdash \neg$ виновен(Петр), $T \not\mid\!\sim \neg$ виновен(Петр)

$T \vdash \neg$ виновен(Сергей), $T \mid\!\sim \neg$ виновен(Сергей)

<u>Недостаток такого подхода</u>: под каждую ситуацию надо создавать свою немонотонную систему

<u>Хотелось бы</u>:

1) Немон. система $\langle L, R, A \rangle$ описывает законы мышления

2) Каждая конкретная ситуация описывается множеством формул T – базой знаний

Пусть $\langle \mathcal{L}, R \rangle$ – нормальная ФС для ИП. (9)

Тогда $\langle \mathcal{L}^*, R^* \rangle$ – модальная логика, построенная на базе $\langle \mathcal{L}, R \rangle$

если:

(1) $\mathcal{L}^*$ получается из $\mathcal{L}$ добавлением оператора $\Box$, т.е.:

1°. Если $\varphi \in \mathcal{L}$, то $\Box\varphi \in \mathcal{L}$

2°. Если $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}^*$, то $\Box\varphi, \neg\varphi, \varphi_1 \supset \varphi_2, \forall x\, \varphi_1 \in \mathcal{L}^*$

3°. Других формул нет

(2). R^* получается из R добавлением (как минимум) следующих: аксиом и правил вывода:

1°. $\Box(\varphi \supset \psi) \supset (\Box\varphi \supset \Box\psi)$

2°. $\dfrac{\varphi}{\Box\varphi}$

$\Box\varphi$ – "я знаю, что φ", "известно, что φ",
"я убежден, что φ", "я верю, что φ"

Определение: Пусть $\langle \mathcal{L}, R \rangle$ – норм. ИП. 10

Тогда $\langle \mathcal{L}^*, R^*, A^* \rangle$ – немонотонная модальная логика, если

$A^* = \{ \neg\Box\varphi,\ \varphi \in \mathcal{L} \}$,

$\langle \mathcal{L}^*, R^* \rangle$ – модальная логика на базе $\langle \mathcal{L}, R \rangle$

Пример:

$T = \{ \neg\Box\, \text{виновен}(x) \supset \neg\, \text{виновен}(x) \} \cup$
$\{ \text{совершил}(x, \text{преступление}) \supset \text{виновен}(x) \} \cup$
$\{ \text{совершил}(\text{Петр}, \text{преступление}) \}$.

$T \vdash \text{виновен}(\text{Петр})$, $\quad T \mathrel{|\!\!\sim} \text{виновен}(\text{Петр})$

$T \nvdash \neg\, \text{виновен}(\text{Петр})$, $\quad T \not\mathrel{|\!\!\sim} \neg\, \text{виновен}(\text{Петр})$

$T \vdash \neg\, \text{виновен}(\text{Сергей})$, $\quad T \mathrel{|\!\!\sim} \neg\, \text{виновен}(\text{Сергей})$.