

Теоретическая механика

Часть 1

Кинематика

Глава 3. Движение твёрдой среды

§ 3. Поступательное движение твердой среды

Рассмотрим две декартовы системы отсчета: «неподвижную» $S = (O, E_1, E_2, E_3)$ и «подвижную» $S' = (O', E'_1, E'_2, E'_3)$. Пусть твердая среда Σ неподвижна относительно ДСО S' (система S' жестко связана со средой Σ).

И пусть D – матрица перехода от S к S' .

Определение 1. Движение твердой среды Σ относительно ДСО S называется *поступательным*, если все точки среды Σ движутся относительно S с одинаковыми скоростями :

$$(\forall A, B \in \Sigma)(\forall t \in (\alpha, \beta))[v_A(t) = v_B(t)].$$

Определение 2. Говорят, что направленный отрезок $\overline{AB} \subset \Sigma$ *перемещается параллельно самому себе* относительно ДСО S , если координаты вектора \overline{AB} в S не изменяются со временем (то есть координатное представление вектора \overline{AB} в S $r_{AB}(t) = const$).

Лемма. Твердая среда Σ движется поступательно относительно ДСО S тогда и только тогда, когда для каждой пары точек $A, B \in \Sigma$ направленный отрезок $\overline{AB} \subset \Sigma$ перемещается параллельно самому себе.

Доказательство. Необходимость. Пусть среда Σ движется поступательно относительно ДСО S , то есть

$$(\forall A, B \in \Sigma)(\forall t \in (\alpha, \beta))[v_A(t) = v_B(t)].$$

Тогда

$$(\forall A, B \in \Sigma)(\forall t \in (\alpha, \beta))[\dot{r}_{AB} = \dot{r}_{OB} - \dot{r}_{OA} = v_B - v_A = 0],$$

следовательно, $(\forall A, B \in \Sigma)[r_{AB}(t) = \text{const}]$.

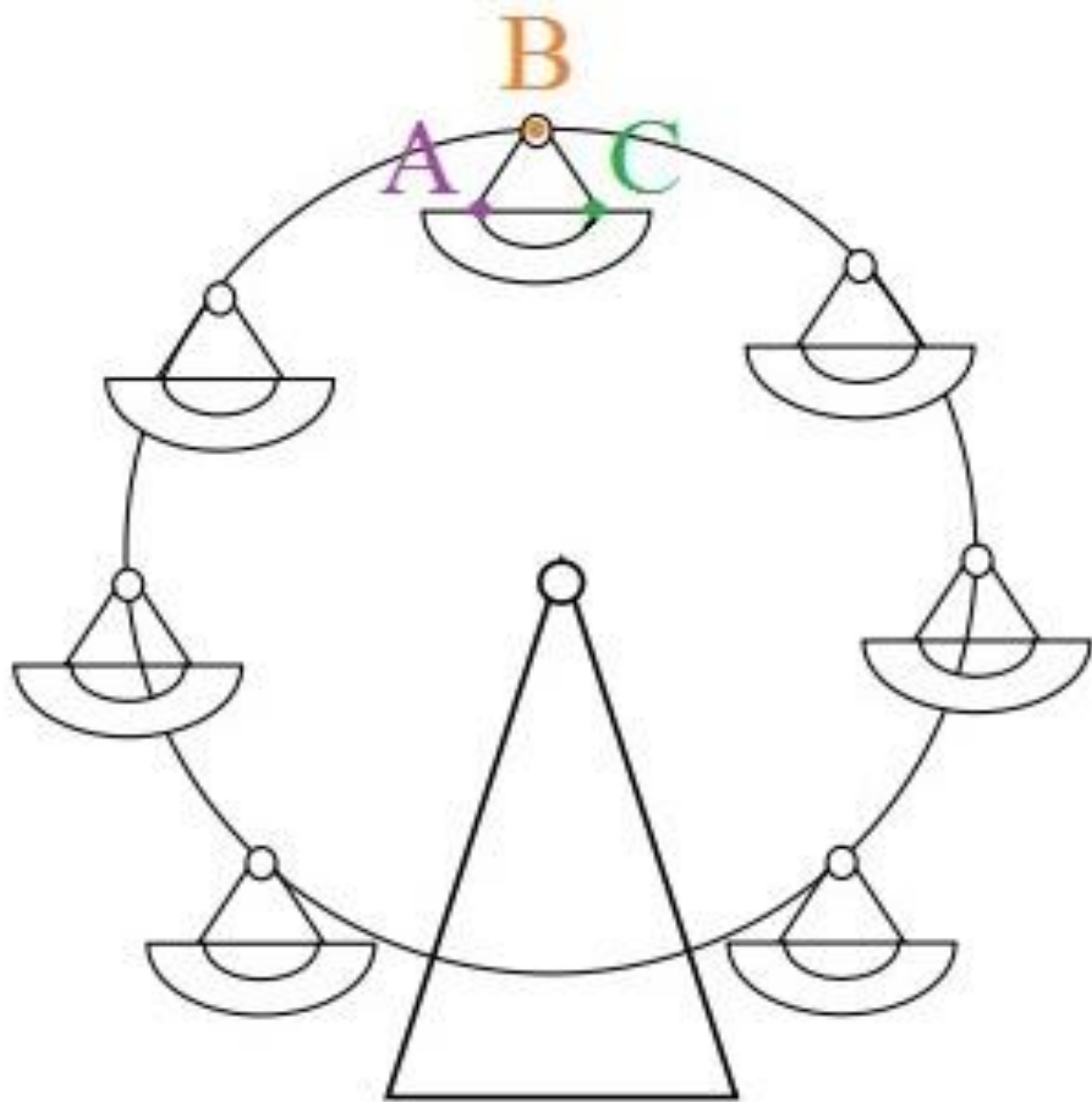
Достаточность. Доказать самостоятельно.

Теорема (критерий поступательного движения).

Твердая среда Σ движется поступательно относительно ДСО S тогда и только тогда, когда в среде Σ существуют два неколлинеарных отрезка, перемещающихся относительно S параллельно самим себе.

Задача. Докажите, что твердая среда Σ движется поступательно относительно ДСО S тогда и только тогда, когда матрица перехода от S к S' постоянна (не зависит от времени).

В качестве **примера** можно привести движение твердой среды Σ , связанной с любой кабиной «колеса обзора». Очевидно, неколлинеарные отрезки $AB \subset \Sigma$ и $BC \subset \Sigma$ перемещаются параллельно самим себе.



§ 5. Вращательное движение твердой среды

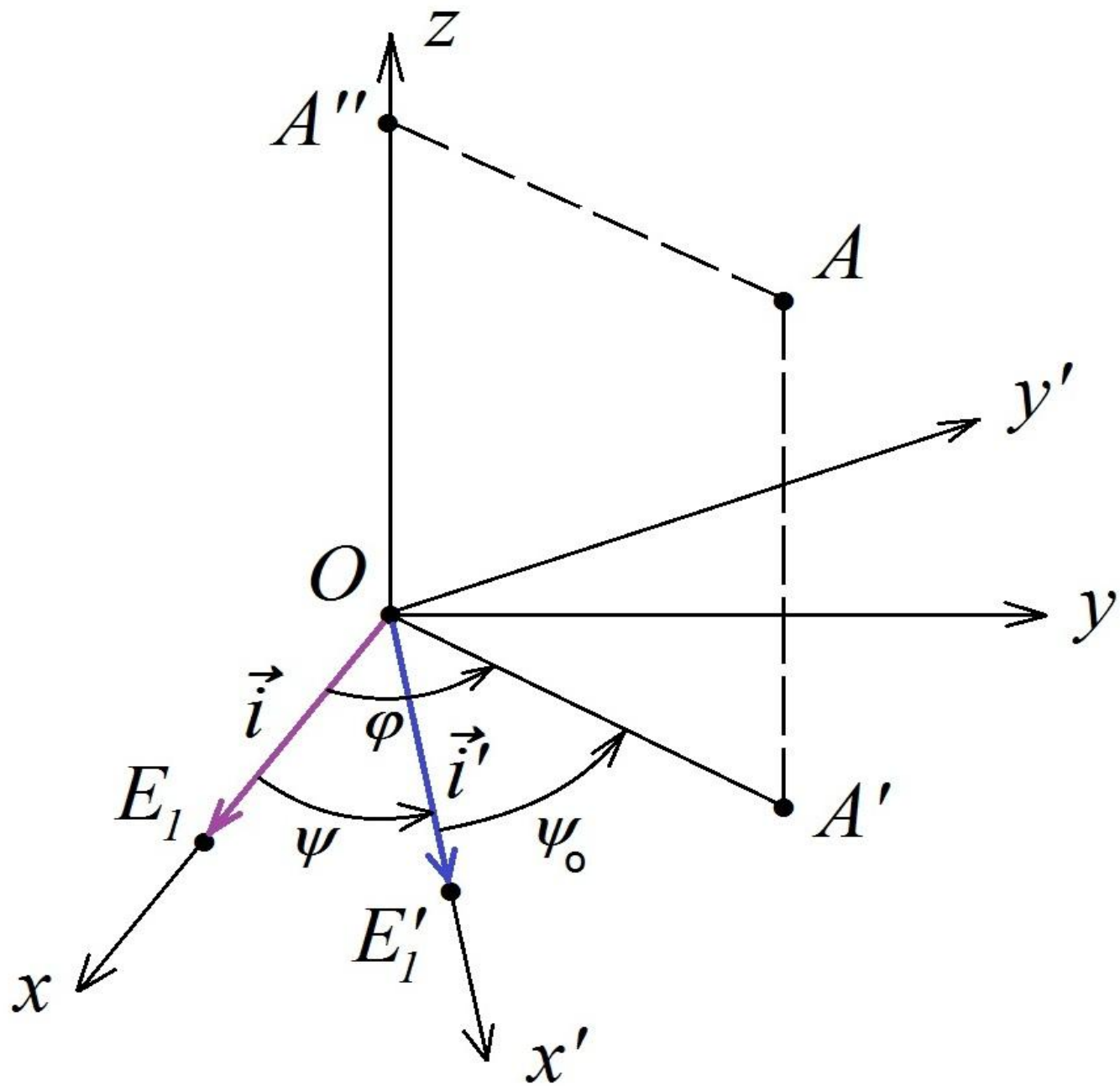
Рассмотрим «неподвижную» декартову систему отсчета \hat{S} . Пусть твердая среда Σ движется относительно ДСО \hat{S} .

Определение. Если существует прямая $l \subset \Sigma$, все точки которой неподвижны относительно системы \hat{S} , то движение твердой среды Σ относительно ДСО \hat{S} называется *вращательным* или *вращением вокруг неподвижной прямой l* .

Прямая l в этом случае называется *осью вращения* среды Σ .

Упражнение. Докажите, что, если в среде Σ имеются две различные точки, неподвижные относительно \hat{S} , то движение среды Σ является вращением вокруг неподвижной прямой, проходящей через эти две точки.

Рассмотрим другую ДСО $S = (O, E_1, E_2, E_3)$, неподвижную относительно ДСО \hat{S} , такую, что точки O и E_3 лежат на неподвижной прямой $l \subset \Sigma$. «Подвижную» систему $S' = (O', E'_1, E'_2, E'_3)$ (жестко связанную со средой Σ) выберем так, чтобы $O' = O$ и $E'_3 = E_3$ (это возможно в силу того, что $O, E_3 \in l \subset \Sigma$). Тогда оси Oz и Oz' будут совпадать друг с другом и с осью вращения l .



Заметим, что векторы $\vec{i} = \overrightarrow{OE_1}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OE_2}$,
 $\vec{i}' = \overrightarrow{OE'_1}$, $\vec{j}' = \overrightarrow{OE'_2}$ компланарны, $\vec{k}' = \overrightarrow{OE_3} = \vec{k}$, а
 положение системы S' определяется направленным углом
 $\psi = \angle(\vec{i}, \vec{i}')_{\text{напр}} = \angle(\vec{j}, \vec{j}')_{\text{напр}}$.

Пусть точка $A \in \Sigma$, A' – проекция точки A на
 «подвижную» плоскость $Ox'y' \subset \Sigma$ системы S' , A'' –
 проекция точки A на ось $Oz \subset \Sigma$, φ – направленный
 угол между векторами \vec{i} и $\overrightarrow{OA'}$, ψ_0 – направленный
 угол между векторами $\vec{i}' = \overrightarrow{OE'_1}$ и $\overrightarrow{OA'}$ (см. рис.).
 Заметим, что $\psi_0 = \text{const}$, $\rho := |OA'| = \text{const}$ и координата
 z точки A тоже постоянна (в силу того, что точки
 $O, E'_1, A, A', A'' \in \Sigma$).

Тогда верно равенство $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OA''}$, которое, при переходе к соответствующим координатным векторам (в системе S), приобретает вид

$$r = r_{OA} = r_{OA'} + r_{OA''}. \quad (5.1)$$

Перейдем к цилиндрическим координатам ρ, φ, z :

$$e_\rho = \rho^{-1} r_{OA'} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

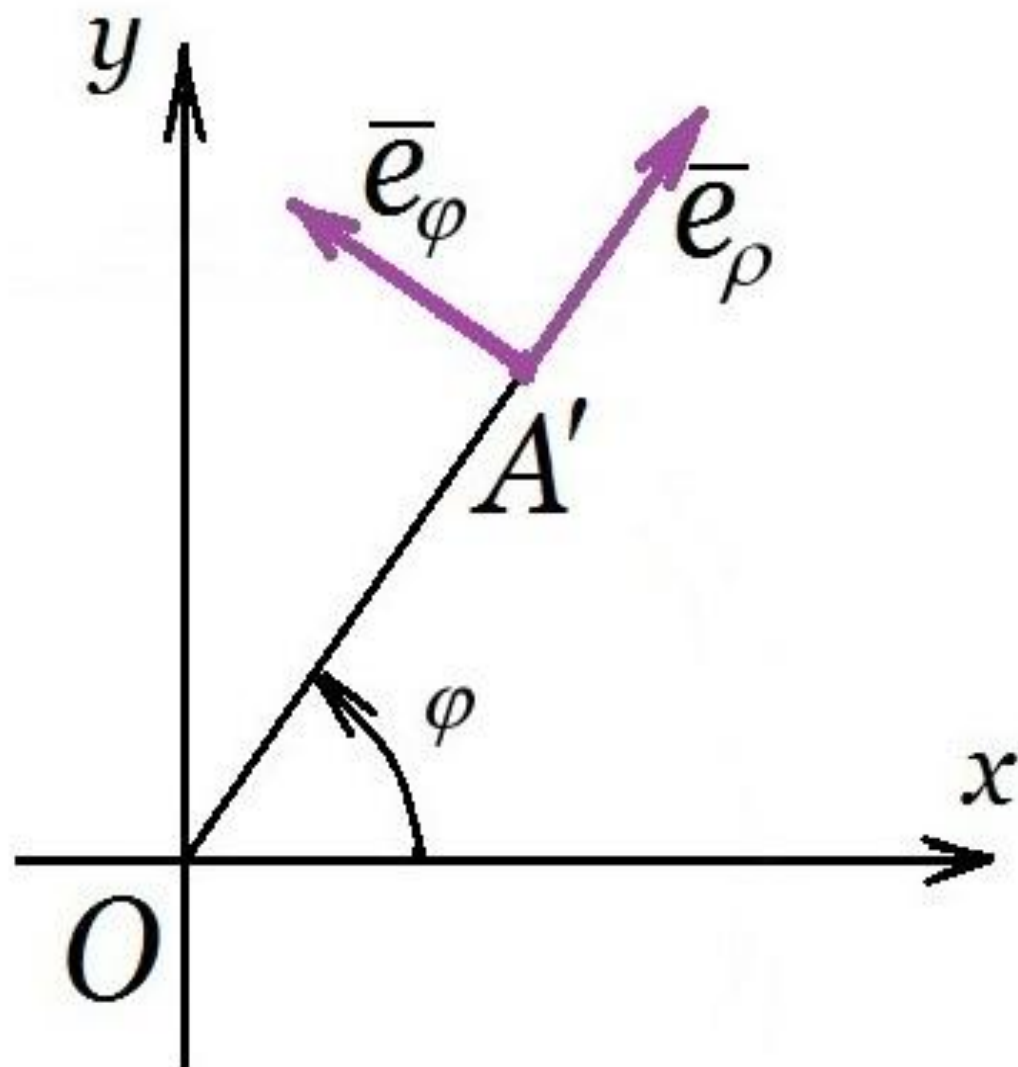
тогда $r_{OA'} = \rho e_\rho$, $r_{OA''} = z e_z$. Следовательно, в силу (5.1),

$$r = r_{OA} = \rho e_\rho + z e_z. \quad (5.2)$$

Так как ρ, z, e_z не зависят от времени, скорость точки A

$$v = \dot{r} = \rho \dot{\varphi} e_\varphi = \rho \omega e_\varphi, \quad (5.3)$$

где $e_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$.



Отметим, что угловая скорость $\omega = \dot{\varphi}$ одинакова для всех точек среды Σ , поскольку полярные углы ее точек отличаются друг от друга на константы:
 $\varphi = \psi + \psi_0 \Rightarrow \omega = \dot{\varphi} = \dot{\psi}$, а угол $\psi = \angle(\vec{i}, \vec{i}')_{напр}$ не зависит от точки среды.

Определим *вектор угловой скорости* Ω среды Σ относительно S равенством

$$\Omega = \omega e_z.$$

Тогда, в силу (5.2) и (5.3), скорость точки A

$$v = \dot{r} = \rho \dot{\varphi} e_\varphi = \rho \omega e_\varphi = \rho \omega (e_z \times e_\rho) = (\omega e_z) \times (\rho e_\rho + z e_z) = \Omega \times r.$$

Итак, для любой точки $A \in \Sigma$ верно равенство

$$v = \Omega \times r.$$

В рассматриваемой ситуации вектор $\vec{\Omega}$ параллелен оси вращения l , однако его величина и направление, задаваемые функцией ω , могут изменяться (он сонаправлен с \vec{e}_z при $\omega = \dot{\varphi} \geq 0$ и с $(-\vec{e}_z)$ в противном случае).

Отметим, что с конца этого вектора вращение кажется происходящим против часовой стрелки. Ниже будет доказана теорема Эйлера, устанавливающая существование вектора мгновенной угловой скорости в случае произвольного движения твердой среды.

§ 6. Две леммы о матрицах

Лемма 6.1. Если матрица $B = B(t)$ ортогональна при $\forall t$, то матрица $\dot{B}B^T = \dot{B}B^{-1}$ является кососимметрической при $\forall t$, то есть в каждый момент времени t

$$(\dot{B}B^T)^T = -\dot{B}B^T. \quad (6.1)$$

Доказательство. Продифференцировав по времени t тождество

$$I = BB^T,$$

получим:

$$0 = \dot{B}B^T + B\dot{B}^T = \dot{B}B^T + (\dot{B}B^T)^T.$$

Отсюда следует (6.1). Лемма доказана.

Лемма 6.2. Если M – кососимметрическая матрица размера 3×3 , то существует и единственен такой вектор $\Omega \in \mathbb{R}^3$, что равенство

$$Mq = \Omega \times q \quad (6.2)$$

выполняется для любого вектора $q \in \mathbb{R}^3$.

Доказательство. Кососимметрическую матрицу M можно записать в виде:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда для любого вектора $q = (q_1, q_2, q_3)^T \in \mathbb{R}^3$

$$Mq = \begin{pmatrix} aq_2 + bq_3 \\ -aq_1 + cq_3 \\ -bq_1 - cq_2 \end{pmatrix}.$$

По определению векторного произведения, для векторов $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ и $q = (q_1, q_2, q_3)^T$ имеем :

$$\Omega \times q = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 q_3 - \omega_3 q_2 \\ \omega_3 q_1 - \omega_1 q_3 \\ \omega_1 q_2 - \omega_2 q_1 \end{pmatrix}$$

(с учетом того, что

$$i = (1, 0, 0)^T, \quad j = (0, 1, 0)^T, \quad k = (0, 0, 1)^T).$$

Для нахождения вектора Ω приравниваем правые части последних двух равенств:

$$\begin{pmatrix} aq_2 + bq_3 \\ -aq_1 + cq_3 \\ -bq_1 - cq_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2q_3 - \omega_3q_2 \\ \omega_3q_1 - \omega_1q_3 \\ \omega_1q_2 - \omega_2q_1 \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Далее рассматриваем последовательно три случая :

1) $q = i = (1, 0, 0)^T$, 2) $q = j = (0, 1, 0)^T$, 3) $q = k = (0, 0, 1)^T$.

Подставляя эти значения вектора q в равенство (6.3), получаем следующие однозначно определенные значения координат вектора Ω :

Подставляя эти значения вектора q в равенство (6.3), получаем следующие однозначно определенные значения координат вектора Ω :

$$\omega_3 = -a, \quad \omega_2 = b, \quad \omega_1 = -c.$$

Итак, $\Omega = (-c, b, -a)^T$ и $Mq = \Omega \times q$ для любого $q \in \mathbb{R}^3$, причем вектор Ω определен однозначно.

Лемма доказана.

§ 7. Теорема Эйлера о скоростях точек твердой среды

Рассмотрим две декартовы системы отсчета: «неподвижную» $S = (O, E_1, E_2, E_3)$ и «подвижную» $S' = (O', E'_1, E'_2, E'_3)$, жестко связанную со средой Σ (то есть твердая среда Σ неподвижна относительно ДСО S').

И пусть D – матрица перехода от S к S' .

Рассмотрим две точки $A, B \in \Sigma$. Арифметический вектор $r_{AB} = r_{OB} - r_{OA}$ — это координатное представление геометрического вектора \overrightarrow{AB} в системе S , векторы $v_A = \dot{r}_{OA}$ и $v_B = \dot{r}_{OB}$ — скорости точек A и B в системе S , вектор $v_{AB} = \dot{r}_{AB} = \dot{r}_{OB} - \dot{r}_{OA} = v_B - v_A$ — скорость направленного отрезка \overrightarrow{AB} в S . Заметим также, что $D^T r_{AB} = r'_{AB} = const$ (r'_{AB} — координатное представление вектора \overrightarrow{AB} в системе S').

Теорема (Эйлера). В каждый момент времени t существует и единственен такой вектор $\Omega = \Omega(t) \in \mathbb{R}^3$, что для любых точек $A, B \in \Sigma$ имеет место равенство

$$v_B = v_A + \Omega \times r_{AB}.$$

При этом $(\forall t) (\forall q \in \mathbb{R}^3) [\dot{D}D^T q = \Omega \times q]$.

Замечание. Равенство $v_B = v_A + \Omega \times r_{AB}$ равносильно равенству $v_{AB} = \Omega \times r_{AB}$.

Доказательство. Докажем сначала, что

$$(\forall t)(\exists \text{ единственный } \Omega = \Omega(t) \in \mathbb{R}^3)(\forall q \in \mathbb{R}^3)[\dot{D}D^T q = \Omega \times q].$$

В силу леммы 6.1, при $\forall t$ матрица $M = \dot{D}D^T$ является кососимметрической. Тогда, в силу леммы 6.2, при $\forall t$ для матрицы $M = \dot{D}D^T$ (\exists единственный $\Omega = \Omega(t) \in \mathbb{R}^3$)

$$(\forall q \in \mathbb{R}^3)[\dot{D}D^T q = Mq = \Omega \times q].$$

Второе предложение доказано. Докажем первое предложение.

Фиксируем произвольный момент времени t и возьмем две произвольные точки $A, B \in \Sigma$. Пусть $q = r_{AB}$. Тогда из доказанного выше, учитывая, что $DD^T = I$ и $D^T r_{AB} = r'_{AB} = \text{const}$, получаем:

$$v_{AB} = \dot{r}_{AB} = \frac{d}{dt}(DD^T r_{AB}) = \dot{D}(D^T r_{AB}) = (\dot{D}D^T)r_{AB} = \Omega \times r_{AB},$$

или, что равносильно, $v_B = v_A + \Omega \times r_{AB}$. При этом вектор $\Omega(t)$ не зависит от точек $A, B \in \Sigma$.

Осталось заметить, что, в силу леммы 6.2, вектор $\Omega(t)$ однозначно определяется матрицей $M = \dot{D}D^T$.

Теорема доказана.

Вектор $\Omega = \Omega(t)$, существование и единственность которого утверждается в данной теореме, называется *вектором мгновенной угловой скорости твердой среды Σ по отношению к системе отсчета S .*