ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Глава II
Системы линейных алгебраических уравнений

Лекция № 1

ИЯФиТ

доцент ***Волков Н.П.***

Глава II
Системы линейных алгебраических уравнений

§ 1. Решение систем линейных алгебраических уравнений

1.1. Основные понятия. Теорема Крамера.

Определение 1.1. Система m уравнений относительно неизвестных $x_1, x_2, \cdots, x_n$ вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2\,, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\,, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

называется системой m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными (СЛАУ), при этом заданные числа a_{ij} называются *коэффициентами системы*, а b_i – *свободными членами* $\forall\, i=\overline{1,m}$, $\forall\, j=\overline{1,n}$.

Замечание 1.1. Запись (1) называется *поэлементной*, а записи

$$\underset{\downarrow}{a}_1 x_1 + \underset{\downarrow}{a}_2 x_2 + \cdots + \underset{\downarrow}{a}_n x_n = \underset{\downarrow}{b} \tag{1'}$$

и

$$A \cdot \underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b} \tag{1''}$$

– *векторной* и *матричной*, соответственно,

где $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(\underset{\downarrow}{a}_1, \cdots, \underset{\downarrow}{a}_n\right) = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{pmatrix}$, $\underset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\underset{\downarrow}{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Пример 1.1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$ – система двух уравнений с тремя неизвестными.

Определение 1.2. Система линейных алгебраических уравнений (1) называется *однородной* (*неоднородной*), если $\underset{\downarrow}{b} = \underset{\downarrow}{0}$ $(\underset{\downarrow}{b} \neq \underset{\downarrow}{0})$.

Определение 1.3. Вектор-столбец $\underset{\downarrow}{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ называется *решением системы линейных алгебраических уравнений* $(1'')$ (а его координаты – *решением* (1) или $(1')$), если при подстановке $\underset{\downarrow}{\alpha}$ вместо $\underset{\downarrow}{x}$ в $(1'')$ получаем правильное векторное равенство.

Определение 1.4. Любое решение системы линейных алгебраических уравнений (1) при фиксированных α_j, $j = \overline{1,n}$ называется *частным решением этой системы*.

Определение 1.5. Решение системы линейных алгебраических уравнений (1) вида $\underset{\downarrow}{\alpha} = \underset{\downarrow}{\alpha}(C_1, \ldots, C_p)$, $1 \leq p < n$ (C_k – константы из R) называется *общим решением*, если

а) при любых константах $C_k \in \mathrm{R}$, $k = \overline{1,p}$ координаты вектора $\underset{\downarrow}{\alpha}$ являются решениями системы (1);

б) для любого частного решения $\underset{\downarrow}{\alpha'}$ существуют константы $C'_k \in \mathrm{R}$, $k = \overline{1,p}$ такие, что $\underset{\downarrow}{\alpha'} = \underset{\downarrow}{\alpha}(C'_1, \cdots, C'_p)$, т.е. частное решение $\underset{\downarrow}{\alpha'}$ может быть получено из общего, подставляя в него найденные константы.

Определение 1.6. Если у системы линейных алгебраических уравнений (1)

1) существует единственное решение, то система (1) называется *определенной*,

2) существует более одного решения, то система (1) называется *неопределенной*,

3) не существует решений, то система (1) называется *несовместной*.

В случаях 1) и 2) система (1) называется *совместной*.

Замечание 1.2. Решить систему (1) – значит: либо установить ее несовместность, либо для совместной системы (1) найти все ее решения.

Определение 1.7. Две системы линейных алгебраических уравнений называются *эквивалентными* или *равносильными*, если множества их решений совпадают.

Пример 1.2. Система $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ эквивалентна системе $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 1$, поскольку множество их решений является пустым.

Теорема 1.1. (Теорема Крамера) *Пусть у системы линейных алгебраических уравнений матрица* $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ *невырождена, т.е.* $\det \mathbf{A} = \Delta \neq 0$.

Тогда существует единственное решение этой системы $\underset{\downarrow}{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, *где* $\alpha_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta}$ (2)

$\forall\, k = \overline{1,n}$, *а* $\Delta_k = \det\left(\underset{\downarrow}{a_1}, \cdots, \underset{\downarrow}{a_{k-1}}, \underset{\downarrow}{b}, \underset{\downarrow}{a_{k+1}}, \cdots, \underset{\downarrow}{a_n}\right)$.

Доказательство. Пусть $\det \mathbf{A} = \Delta \neq 0$, тогда существует обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$.

Возьмем $\underset{\downarrow}{\alpha} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \underset{\downarrow}{b}$ и докажем: 1) $\underset{\downarrow}{\alpha}$ есть решение данной системы, т.е.

$\mathbf{A} \cdot \underset{\downarrow}{\alpha} = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{-1} \cdot \underset{\downarrow}{b}\right) = \left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}\right)\underset{\downarrow}{b} = \mathbf{E} \cdot \underset{\downarrow}{b} = \underset{\downarrow}{b}$. Начало и конец цепочки равенств доказывает наше предположение.

2) Единственность докажем от противного. Предположим, что у этой системы существует два решения $\underset{\downarrow}{\alpha}$ и $\underset{\downarrow}{\tilde{\alpha}}$. Рассмотрим $\underset{\downarrow}{\alpha} - \underset{\downarrow}{\tilde{\alpha}}$. Вычислим $\mathbf{A}\left(\underset{\downarrow}{\alpha} - \underset{\downarrow}{\tilde{\alpha}}\right) = \mathbf{A}\,\underset{\downarrow}{\alpha} - \mathbf{A}\,\underset{\downarrow}{\tilde{\alpha}} = \underset{\downarrow}{b} - \underset{\downarrow}{b} = \underset{\downarrow}{0}$, тогда для начала и конца цепочки равенств запишем $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}\left(\underset{\downarrow}{\alpha} - \underset{\downarrow}{\tilde{\alpha}}\right) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \underset{\downarrow}{0}$ или $\underset{\downarrow}{\alpha} - \underset{\downarrow}{\tilde{\alpha}} = \underset{\downarrow}{0}$ или

$\underset{\downarrow}{\alpha} = \underset{\downarrow}{\tilde{\alpha}}$ – противоречие предположению.

3) Выведем формулу (2)

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_k\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\underset{\downarrow}{\alpha}=\mathrm{A}^{-1}\cdot\underset{\downarrow}{b}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}\mathcal{A}_{11} & \dots & \mathcal{A}_{n1}\\ \dots & \dots & \dots\\ \mathcal{A}_{1k} & \dots & \mathcal{A}_{nk}\\ \dots & \dots & \dots\\ \mathcal{A}_{1n} & \dots & \mathcal{A}_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ \vdots\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n}\mathcal{A}_{j1}b_j\\ \dots\\ \sum\limits_{j=1}^{n}\mathcal{A}_{jk}b_j\\ \dots\\ \sum\limits_{j=1}^{n}\mathcal{A}_{jn}b_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\Delta_1}{\Delta}\\ \vdots\\ \frac{\Delta_k}{\Delta}\\ \vdots\\ \frac{\Delta_n}{\Delta}\end{pmatrix}.$$

Теорема полностью д о к а з а н а .

Пример 1.2. Решить систему $\begin{cases}x_1-x_2=1,\\ x_1+x_2=3.\end{cases}$

Р е ш е н и е. Вычислим $\Delta=\mathbf{det}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=2\neq 0$,

$\Delta_1=\mathbf{det}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}=4$, $\Delta_2=\mathbf{det}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=2$.

Тогда в силу формулы (2) $\alpha_1=2$, $\alpha_2=1$. Следовательно, решение имеет вид $\underset{\downarrow}{\alpha}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$.

1.2. Метод Гаусса решения системы линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (1) $A \cdot \underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$

и матрицы: матрицу этой системы $\mathrm{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ и *расширенную матрицу* этой системы $\hat{\mathrm{A}} = \left(\mathrm{A}, \underset{\downarrow}{b}\right) = \left(\underset{\downarrow}{a_1}, \cdots, \underset{\downarrow}{a_n}, \underset{\downarrow}{b}\right)$.

Определение 1.8. *Элементарными преобразованиями системы линейных алгебраических уравнений* называются элементарные преобразования строк расширенной матрицы $\hat{\mathrm{A}}$.

Замечание 1.2. Элементарные преобразования переводят систему линейных алгебраических уравнений (1) в некоторую систему, любое решение которой является решением системы (1) и, наоборот, любое решение системы (1) будет решением преобразованной системы, т.е. эти системы эквивалентны.

Метод Гаусса состоит в том, что матрица $\hat{\mathbf{A}}$ приводится элементарными преобразованиями к трапецевидной матрице $\hat{\mathbf{A}}^{(r)} = \mathbf{Q}$ вида:

$$\hat{\mathbf{A}}^{(r)} = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & a_{12}^{(r)} & \dots & a_{1r}^{(r)} & \dots & a_{1n}^{(r)} & b_1^{(r)} \\ 0 & 1 & \dots & a_{2r}^{(r)} & \dots & a_{2n}^{(r)} & b_2^{(r)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & a_{rn}^{(r)} & b_r^{(r)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_{r+1}^{(r)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_m^{(r)} \end{array}\right),$$ которой соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 + a_{12}^{(r)}\tilde{x}_2 + \dots + a_{1r}^{(r)}\tilde{x}_r + \dots\dots\dots + a_{1n}^{(r)}\tilde{x}_n = b_1^{(r)}, \\ \qquad\quad \tilde{x}_2 + \dots + a_{2r}^{(r)}\tilde{x}_r + \dots\dots\dots + a_{2n}^{(r)}\tilde{x}_n = b_2^{(r)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \tilde{x}_r + \dots\dots\dots + a_{rn}^{(r)}\tilde{x}_n = b_r^{(r)}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0\,\tilde{x}_{r+1} + \dots + 0\,\tilde{x}_n = b_{r+1}^{(r)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0\,\tilde{x}_{r+1} + \dots + 0\,\tilde{x}_n = b_m^{(r)}, \end{cases} \qquad (1^r)$$

где $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_n$ – неизвестные, полученные (при необходимости) после перенумерования неизвестных $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

Вывод 1.1.

1) Если существует номер $i_0 = \overline{r+1, m}$ такой, что $b_{i_0}^{(r)} \neq 0$, тогда система (1^r) будет несовместной.

2) Если $b_i^{(r)} = 0$ при всех $i = \overline{r+1, m}$, тогда система (1^r) будет совместной.

При этом систему (1^r) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 + \cdots + a_{1r}^{(r)}\,\tilde{x}_r = b_1^{(r)} - a_{1(r+1)}^{(r)}\,\tilde{x}_{r+1} - \cdots - a_{1n}^{(r)}\,\tilde{x}_n\ , \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \qquad\qquad \tilde{x}_r = b_r^{(r)} - a_{r(r+1)}^{(r)}\,\tilde{x}_{r+1} - \cdots - a_{rn}^{(r)}\,\tilde{x}_n\ , \end{cases} \qquad (1^{\tilde{r}})$$

где $\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_r$ называются *главными неизвестными*, а $\tilde{x}_{r+1}, \cdots, \tilde{x}_n$ – *свободными*.

а) Если теперь $r = n \leq m$, тогда система (1^r) будет определенной.

б) Если же $r < n$, тогда система (1^r) будет неопределенной.

1.2. Теорема Кронекера-Капелли, ее следствие и геометрическая интерпретация.

Вернемся к системе линейных алгебраических уравнений (1).

Теорема 1.2. (Теорема Кронекера-Капелли)

Система линейных алгебраических уравнений (1) *совместна тогда и только тогда, когда* $\mathbf{Rg}\,\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{Rg}\,\mathbf{A}$.

\# На основании вывода 1.1 система линейных алгебраических уравнений (1^r) совместной в том и только в том случае, если $b_i^{(r)} = 0$ при всех $i = \overline{r+1, m}$.

А это означает, что $\mathbf{Rg}\,\hat{\mathbf{A}}^{(r)} = \mathbf{Rg}\,\mathbf{A}^{(r)}$. Но ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях матриц, т.е. $\mathbf{Rg}\,\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{Rg}\,\mathbf{A}$. #

Следствие 6.1. *Система линейных алгебраических уравнений* (1) *несовместна тогда и только тогда, когда* $\mathbf{Rg}\,\hat{\mathbf{A}} > \mathbf{Rg}\,\mathbf{A}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем от противного.

Н е о б х о д и м о с т ь. Предположим, что система линейных алгебраических уравнений (1) несовместна, но $\mathbf{Rg}\,\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{Rg}\,\mathbf{A}$. Тогда на основании теоремы 1.2 система (1) должна быть совместной. А это противоречит предположению. Итак, $\mathbf{Rg}\,\hat{\mathbf{A}} > \mathbf{Rg}\,\mathbf{A}$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $\mathbf{Rg}\,\hat{\mathbf{A}} > \mathbf{Rg}\,\mathbf{A}$, но система линейных алгебраических уравнений (1) совместна. Тогда в силу теоремы 1.2 $\mathbf{Rg}\,\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{Rg}\,\mathbf{A}$, что противоречит предположению. Следовательно, система (1) является несовместной. #

Пример 1.2. (Геометрическая интерпретация)

Рассмотрим систему $\begin{cases} A_1x + B_1y - D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y - D_2 = 0. \end{cases}$

Уравнения этой системы в $\mathbb{R}^2$ описывают две прямые l_1 и l_2,

т.е. l_1: $A_1x + B_1y - D_1 = 0$ и l_2: $A_2x + B_2y - D_2 = 0$.

Исследуем данную систему.

1) Пусть $\mathbf{Rg}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Rg}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = 2$.

В силу вывода 1.1 данная система имеет единственное решение.
С геометрической точки зрения прямые l_1 и l_2 пересекаются в одной точке.

2) Пусть $\mathbf{Rg}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Rg}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = 1$.

На основании вывода 1.1 данная система имеет бесконечное множество решений.
С геометрической точки зрения прямые l_1 и l_2 совпадают.

3) Пусть $\mathbf{Rg}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \end{pmatrix} > \mathbf{Rg}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}$.

В силу вывода 1.1 данная система не имеет решений.

С геометрической точки зрения прямые l_1 и l_2 параллельны.

§ 2. Однородные системы линейных алгебраических уравнений

2.1. Свойства решений однородной системы линейных алгебраических уравнений. Критерий наличия нетривиальных решений однородной системы линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим однородную систему m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \cdots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (1_0)$$

или в матричной форме

$$\mathbf{A} \cdot \underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{0}\,, \qquad (1_0'')$$

где $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ есть матрица системы (1_0).

Замечание 2.1. Однородная система линейных алгебраических уравнений (1_0) всегда совместна, так как $\underset{\downarrow}{\alpha} = \underset{\downarrow}{0}$ является решением системы (1_0), которое называется *нулевым* или *тривиальным*. Если же у системы (1_0) существует решение $\underset{\downarrow}{\alpha} \neq \underset{\downarrow}{0}$, то оно называется *нетривиальным*.

Лемма 2.1. *Пусть* $\underset{\downarrow}{\alpha}^{1},\cdots,\underset{\downarrow}{\alpha}^{k}$ *–* $\boldsymbol{k}$ *произвольных решений однородной системы линейных алгебраических уравнений* (1_0).

Тогда для любых постоянных $C_1,\cdots,C_k \in \mathrm{R}$ *вектор* $\underset{\downarrow}{y} = C_1\underset{\downarrow}{\alpha}^{1}+\cdots+C_k\underset{\downarrow}{\alpha}^{k}$ *является решением системы* (1_0).

\# Пусть $\underset{\downarrow}{\alpha}^{1},\cdots,\underset{\downarrow}{\alpha}^{k}$ – $\boldsymbol{k}$ произвольных решений системы (1_0). Рассмотрим вектор $\underset{\downarrow}{y} = C_1\underset{\downarrow}{\alpha}^{1}+\cdots+C_k\underset{\downarrow}{\alpha}^{k}$, $\forall C_1,\cdots,C_k \in \mathrm{R}$.

Вычислим $A\underset{\downarrow}{y} = A\left(C_1\underset{\downarrow}{\alpha}^{1}+\cdots+C_k\underset{\downarrow}{\alpha}^{k}\right) = \underset{\downarrow}{0}+\cdots+\underset{\downarrow}{0} = \underset{\downarrow}{0}$. Начало и конец цепочки равенств

д о к а з ы в а ю т данную лемму. #

Следствие 2.1. *Если* $\underset{\downarrow}{\alpha} \neq \underset{\downarrow}{0}$ *– решение однородной системы* (1_0), *то у данной системы существует бесконечно много решений.*

\# Пусть $\underset{\downarrow}{\alpha} \neq \underset{\downarrow}{0}$ является решением системы (1_0). Тогда в силу леммы 2.1

$\forall\, C \in \mathrm{R},\ C \neq 0$ вектор $\underset{\downarrow}{\tilde{y}} = C\underset{\downarrow}{\alpha}$ есть решение системы (1_0). #

Теорема 2.1. *При* $\boldsymbol{n} \leq \boldsymbol{m}$ *у однородной системы линейных алгебраических уравнений* (1_0) *существует единственное решение* $\underset{\downarrow}{\alpha} = \underset{\downarrow}{0}$ *в том и только в том случае, когда* $\mathbf{Rg\,A} = \boldsymbol{n}$.

\# Равенство $\mathbf{Rg\,\hat{A}} = \mathbf{Rg\,A} = \boldsymbol{n}$ возможно тогда и только тогда, когда однородная система (1_0) совместна, и $\boldsymbol{r} = \mathbf{Rg\,A} = \boldsymbol{n} \leq \boldsymbol{m}$. Согласно выводу 1.1 это возможно в том и только в том случае, когда система (1_0) определена, т.е. существует единственное решение $\underset{\downarrow}{\alpha} = \underset{\downarrow}{0}$ однородной системы (1_0). #

Теорема 2.2. *Однородная система линейных алгебраических уравнений* (1_0) *имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда* $\mathbf{Rg\,A} < \boldsymbol{n}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем от противного.

Н е о б х о д и м о с т ь. Предположим, что однородная система (1_0) имеет решение $\underset{\downarrow}{\alpha} \neq \underset{\downarrow}{0}$, но $\mathbf{Rg\,A} = \boldsymbol{n}$. Тогда по теореме 2.1 решение $\underset{\downarrow}{\alpha}$ должно быть нулевым – противоречие предположению. Следовательно $\mathbf{Rg\,A} < \boldsymbol{n}$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $\mathbf{Rg\,A} < \boldsymbol{n}$, но система (1_0) имеет единственное решение $\underset{\downarrow}{\alpha} = \underset{\downarrow}{0}$. Тогда по теореме 2.1 $\mathbf{Rg\,A} = \boldsymbol{n}$, а это противоречит предположению. #

Следствие 2.2. *Однородная система линейных алгебраических уравнений* (1_0), *у которой* $\boldsymbol{m} < \boldsymbol{n}$, *имеет нетривиальное решение.*

По теореме о ранге матрицы $\mathbf{Rg\,A} \leq \boldsymbol{m}$, но $\boldsymbol{m} < \boldsymbol{n}$. Следовательно, $\mathbf{Rg\,A} < \boldsymbol{n}$. А по теореме 2.2 система (1_0) должна иметь нетривиальное решение.

Следствие 2.3. *Однородная система линейных алгебраических уравнений* (1_0), *у которой* $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}$, *и* $\mathbf{det\,A} = \boldsymbol{0}$, *имеет нетривиальное решение.*

Поскольку $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}$, и $\mathbf{det\,A} = \boldsymbol{0}$, то $\mathbf{Rg\,A} < \boldsymbol{m}$, а значит и $\mathbf{Rg\,A} < \boldsymbol{n}$. Тогда по теореме 2.2 система (1_0) будет иметь нетривиальное решение.