

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Глава II

Системы линейных алгебраических уравнений

Лекция № 1

ИЯФиТ

доцент Волков Н.П.

Глава II

Системы линейных алгебраических уравнений

§ 1. Решение систем линейных алгебраических уравнений

1.1. Основные понятия. Теорема Крамера.

Определение 1.1. Система m уравнений относительно неизвестных x_1, x_2, \dots, x_n вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

называется *системой m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными (СЛАУ)*,

при этом заданные числа a_{ij} называются *коэффициентами системы*, а b_i – *свободными*

членами $\forall i = \overline{1, m}$, $\forall j = \overline{1, n}$.

Замечание 1.1. Запись (1) называется *поэлементной*, а записи

$$\underset{\downarrow}{a_1}x_1 + \underset{\downarrow}{a_2}x_2 + \dots + \underset{\downarrow}{a_n}x_n = \underset{\downarrow}{b} \quad (1')$$

и $A \cdot \underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$ $(1'')$

– *векторной* и *матричной*, соответственно,

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(\underset{\downarrow}{a_1}, \dots, \underset{\downarrow}{a_n} \right) = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \vdots \\ \bar{a}_m \end{pmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Пример 1.1.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$
 – система двух уравнений с тремя неизвестными.

Определение 1.2. Система линейных алгебраических уравнений (1) называется *однородной (неоднородной)*, если $\underset{\downarrow}{\mathbf{b}} = \underset{\downarrow}{\mathbf{0}}$ ($\underset{\downarrow}{\mathbf{b}} \neq \underset{\downarrow}{\mathbf{0}}$).

Определение 1.3. Вектор-столбец $\underset{\downarrow}{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ называется *решением системы линейных*

алгебраических уравнений (1'') (а его координаты – *решением (1) или (1')*), если при подстановке $\underset{\downarrow}{\alpha}$ вместо $\underset{\downarrow}{x}$ в (1'') получаем правильное векторное равенство.

Определение 1.4. Любое решение системы линейных алгебраических уравнений (1) при фиксированных $\alpha_j, j = \overline{1, n}$ называется *частным решением этой системы*.

Определение 1.5. Решение системы линейных алгебраических уравнений (1) вида $\underset{\downarrow}{\alpha} = \underset{\downarrow}{\alpha}(C_1, \dots, C_p), 1 \leq p < n$ (C_k – константы из \mathbb{R}) называется *общим решением*, если

- при любых константах $C_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1, p}$ координаты вектора $\underset{\downarrow}{\alpha}$ являются решениями системы (1);
- для любого частного решения $\underset{\downarrow}{\alpha}'$ существуют константы $C_k' \in \mathbb{R}, k = \overline{1, p}$ такие, что $\underset{\downarrow}{\alpha}' = \underset{\downarrow}{\alpha}(C_1', \dots, C_p')$, т.е. частное решение $\underset{\downarrow}{\alpha}'$ может быть получено из общего, подставляя в него найденные константы.

Определение 1.6. Если у системы линейных алгебраических уравнений (1)

- 1) существует единственное решение, то система (1) называется *определенной*,
- 2) существует более одного решения, то система (1) называется *неопределенной*,
- 3) не существует решений, то система (1) называется *несовместной*.

В случаях 1) и 2) система (1) называется *совместной*.

Замечание 1.2. Решить систему (1) – значит: либо установить ее несовместность, либо для совместной системы (1) найти все ее решения.

Определение 1.7. Две системы линейных алгебраических уравнений называются *эквивалентными* или *равносильными*, если множества их решений совпадают.

Пример 1.2. Система $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ эквивалентна системе $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 1$, поскольку

множество их решений является пустым.

Теорема 1.1. (Теорема Крамера) Пусть у системы линейных алгебраических уравнений матрица $A = (a_{ij})_{n \times n}$ невырождена, т.е. $\det A = \Delta \neq 0$.

Тогда существует единственное решение этой системы $\alpha_{\downarrow} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, где $\alpha_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$ (2)

$$\forall k = \overline{1, n}, \alpha \Delta_k = \det \begin{pmatrix} a_{1\downarrow}, \dots, a_{k-1\downarrow}, b_{\downarrow}, a_{k+1\downarrow}, \dots, a_{n\downarrow} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть $\det A = \Delta \neq 0$, тогда существует обратная матрица A^{-1} .

Возьмем $\alpha_{\downarrow} = A^{-1} \cdot b_{\downarrow}$ и докажем: 1) α_{\downarrow} есть решение данной системы, т.е.

$A \cdot \alpha_{\downarrow} = A(A^{-1} \cdot b_{\downarrow}) = (A \cdot A^{-1})b_{\downarrow} = E \cdot b_{\downarrow} = b_{\downarrow}$. Начало и конец цепочки равенств доказывает наше предположение.

2) Единственность докажем от противного. Предположим, что у этой системы существует два решения α_{\downarrow} и $\tilde{\alpha}_{\downarrow}$. Рассмотрим $\alpha_{\downarrow} - \tilde{\alpha}_{\downarrow}$. Вычислим $A(\alpha_{\downarrow} - \tilde{\alpha}_{\downarrow}) = A\alpha_{\downarrow} - A\tilde{\alpha}_{\downarrow} = b_{\downarrow} - b_{\downarrow} = 0_{\downarrow}$, тогда для начала и конца цепочки равенств запишем $A^{-1} \cdot A(\alpha_{\downarrow} - \tilde{\alpha}_{\downarrow}) = A^{-1} \cdot 0_{\downarrow}$ или $\alpha_{\downarrow} - \tilde{\alpha}_{\downarrow} = 0_{\downarrow}$ или

$\alpha_{\downarrow} = \tilde{\alpha}_{\downarrow}$ – противоречие предположению.

3) Выведем формулу (2)

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \underset{\downarrow}{\alpha} = A^{-1} \cdot \underset{\downarrow}{b} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \dots & \mathcal{A}_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{A}_{1k} & \dots & \mathcal{A}_{nk} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{A}_{1n} & \dots & \mathcal{A}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \mathcal{A}_{j1} b_j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n \mathcal{A}_{jk} b_j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n \mathcal{A}_{jn} b_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \vdots \\ \frac{\Delta_k}{\Delta} \\ \vdots \\ \frac{\Delta_n}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Теорема полностью доказана.

Пример 1.2. Решить систему $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$

Решение. Вычислим $\Delta = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$,

$$\Delta_1 = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 4, \quad \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 2.$$

Тогда в силу формулы (2) $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$. Следовательно, решение имеет вид $\underset{\downarrow}{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.2. Метод Гаусса решения системы линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (1) $A \cdot \underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{b}$

и матрицы: матрицу этой системы $A = (a_{ij})_{m \times n}$ и расширенную матрицу этой системы

$$\hat{A} = (A, \underset{\downarrow}{b}) = \left(\underset{\downarrow}{a_1}, \dots, \underset{\downarrow}{a_n}, \underset{\downarrow}{b} \right).$$

Определение 1.3. *Элементарными преобразованиями системы линейных алгебраических уравнений* называются элементарные преобразования строк расширенной матрицы \hat{A} .

Замечание 1.2. Элементарные преобразования переводят систему линейных алгебраических уравнений (1) в некоторую систему, любое решение которой является решением системы (1) и, наоборот, любое решение системы (1) будет решением преобразованной системы, т.е. эти системы эквивалентны.

Метод Гаусса состоит в том, что матрица \hat{A} приводится элементарными преобра-

зованиями к трапецевидной матрице $\hat{A}^{(r)} = Q$ вида:

$$\hat{A}^{(r)} = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & a_{12}^{(r)} & \dots & a_{1r}^{(r)} & \dots & a_{1n}^{(r)} & b_1^{(r)} \\ 0 & 1 & \dots & a_{2r}^{(r)} & \dots & a_{2n}^{(r)} & b_2^{(r)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & a_{rn}^{(r)} & b_r^{(r)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_{r+1}^{(r)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_m^{(r)} \end{array} \right), \text{ которой соответствует система уравнений:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}_1 + a_{12}^{(r)} \tilde{x}_2 + \dots + a_{1r}^{(r)} \tilde{x}_r + \dots + a_{1n}^{(r)} \tilde{x}_n = b_1^{(r)}, \\ \tilde{x}_2 + \dots + a_{2r}^{(r)} \tilde{x}_r + \dots + a_{2n}^{(r)} \tilde{x}_n = b_2^{(r)}, \\ \dots \\ \tilde{x}_r + \dots + a_{rn}^{(r)} \tilde{x}_n = b_r^{(r)}, \\ 0 \tilde{x}_{r+1} + \dots + 0 \tilde{x}_n = b_{r+1}^{(r)}, \\ \dots \\ 0 \tilde{x}_{r+1} + \dots + 0 \tilde{x}_n = b_m^{(r)}, \end{array} \right. \quad (1^r)$$

где $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ — неизвестные, полученные (при необходимости) после перенумерования

неизвестных x_1, x_2, \dots, x_n .

Вывод 1.1.

1) Если существует номер $i_0 = \overline{r+1, m}$ такой, что $b_{i_0}^{(r)} \neq 0$, тогда система (1^r) будет несовместной.

2) Если $b_i^{(r)} = 0$ при всех $i = \overline{r+1, m}$, тогда система (1^r) будет совместной.

При этом систему (1^r) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 + \dots + a_{1r}^{(r)} \tilde{x}_r = b_1^{(r)} - a_{1(r+1)}^{(r)} \tilde{x}_{r+1} - \dots - a_{1n}^{(r)} \tilde{x}_n, \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \tilde{x}_r = b_r^{(r)} - a_{r(r+1)}^{(r)} \tilde{x}_{r+1} - \dots - a_{rn}^{(r)} \tilde{x}_n, \end{cases} \quad (1^r)$$

где $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_r$ называются *главными неизвестными*, а $\tilde{x}_{r+1}, \dots, \tilde{x}_n$ — *свободными*.

а) Если теперь $r = n \leq m$, тогда система (1^r) будет определенной.

б) Если же $r < n$, тогда система (1^r) будет неопределенной.

1.2. Теорема Кронекера-Капелли, ее следствие и геометрическая интерпретация.

Вернемся к системе линейных алгебраических уравнений (1).

Теорема 1.2. (Теорема Кронекера-Капелли)

Система линейных алгебраических уравнений (1) совместна тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{Rg} \hat{A} = \mathbf{Rg} A .$$

На основании вывода 1.1 система линейных алгебраических уравнений (1') совместной в том и только в том случае, если $b_i^{(r)} = 0$ при всех $i = \overline{r+1, m}$.

А это означает, что $\mathbf{Rg} \hat{A}^{(r)} = \mathbf{Rg} A^{(r)}$. Но ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях матриц, т.е. $\mathbf{Rg} \hat{A} = \mathbf{Rg} A$. #

Следствие 6.1. *Система линейных алгебраических уравнений (1) несовместна тогда и только тогда, когда $\mathbf{Rg} \hat{A} > \mathbf{Rg} A$.*

Доказательство проведем от противного.

Необходимость. Предположим, что система линейных алгебраических уравнений (1) несовместна, но $\mathbf{Rg} \hat{A} = \mathbf{Rg} A$. Тогда на основании теоремы 1.2 система (1) должна быть совместной. А это противоречит предположению. Итак, $\mathbf{Rg} \hat{A} > \mathbf{Rg} A$.

Достаточность. Пусть $\text{Rg } \hat{A} > \text{Rg } A$, но система линейных алгебраических уравнений (1) совместна. Тогда в силу теоремы 1.2 $\text{Rg } \hat{A} = \text{Rg } A$, что противоречит предположению. Следовательно, система (1) является несовместной. #

Пример 1.2. (Геометрическая интерпретация)

Рассмотрим систему
$$\begin{cases} A_1x + B_1y - D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y - D_2 = 0. \end{cases}$$

Уравнения этой системы в \mathbb{R}^2 описывают две прямые l_1 и l_2 , т.е. $l_1: A_1x + B_1y - D_1 = 0$ и $l_2: A_2x + B_2y - D_2 = 0$.

Исследуем данную систему.

1) Пусть $\text{Rg} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \end{pmatrix} = \text{Rg} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = 2$.

В силу вывода 1.1 данная система имеет единственное решение.

С геометрической точки зрения прямые l_1 и l_2 пересекаются в одной точке.

2) Пусть $\text{Rg} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \end{pmatrix} = \text{Rg} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = 1$.

На основании вывода 1.1 данная система имеет бесконечное множество решений.

С геометрической точки зрения прямые l_1 и l_2 совпадают.

3) Пусть $\text{Rg} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \end{pmatrix} > \text{Rg} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}$.

В силу вывода 1.1 данная система не имеет решений.

С геометрической точки зрения прямые l_1 и l_2 параллельны.

§ 2. Однородные системы линейных алгебраических уравнений

2.1. Свойства решений однородной системы линейных алгебраических уравнений. Критерий наличия нетривиальных решений однородной системы линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим однородную систему m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (1_0)$$

или в матричной форме

$$A \cdot \underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{0}, \quad (1'')$$

где $A = (a_{ij})_{m \times n}$ есть матрица системы (1_0) .

Замечание 2.1. Однородная система линейных алгебраических уравнений (1_0) всегда совместна, так как $\underset{\downarrow}{\alpha} = \underset{\downarrow}{0}$ является решением системы (1_0) , которое называется *нулевым* или *тривиальным*. Если же у системы (1_0) существует решение $\underset{\downarrow}{\alpha} \neq \underset{\downarrow}{0}$, то оно называется *нетривиальным*.

Лемма 2.1. Пусть $\alpha^1, \dots, \alpha^k$ — k произвольных решений однородной системы линейных алгебраических уравнений (1_0) .

Тогда для любых постоянных $C_1, \dots, C_k \in \mathbb{R}$ вектор $y = C_1 \alpha^1 + \dots + C_k \alpha^k$ является решением системы (1_0) .

Пусть $\alpha^1, \dots, \alpha^k$ — k произвольных решений системы (1_0) . Рассмотрим вектор $y = C_1 \alpha^1 + \dots + C_k \alpha^k, \forall C_1, \dots, C_k \in \mathbb{R}$.

Вычислим $A y = A(C_1 \alpha^1 + \dots + C_k \alpha^k) = \underset{\downarrow}{0} + \dots + \underset{\downarrow}{0} = \underset{\downarrow}{0}$. Начало и конец цепочки равенств

доказывают данную лемму. #

Следствие 2.1. Если $\alpha \neq \underset{\downarrow}{0}$ — решение однородной системы (1_0) , то у данной системы существует бесконечно много решений.

Пусть $\alpha \neq \underset{\downarrow}{0}$ является решением системы (1_0) . Тогда в силу леммы 2.1

$\forall C \in \mathbb{R}, C \neq 0$ вектор $\tilde{y} = C \alpha$ есть решение системы (1_0) . #

Теорема 2.1. При $n \leq m$ у однородной системы линейных алгебраических уравнений (1_0) существует единственное решение $\alpha = \underset{\downarrow}{0}$ в том и только в том случае, когда $\mathbf{Rg} A = n$.

Равенство $\mathbf{Rg} \hat{A} = \mathbf{Rg} A = n$ возможно тогда и только тогда, когда однородная система (1_0) совместна, и $r = \mathbf{Rg} A = n \leq m$. Согласно выводу 1.1 это возможно в том

и только в том случае, когда система (1_0) определена, т.е. существует единственное решение $\alpha_{\downarrow} = \theta_{\downarrow}$ однородной системы (1_0) . #

Теорема 2.2. *Однородная система линейных алгебраических уравнений (1_0) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $\mathbf{Rg} A < n$.*

Доказательство проведем от противного.

Необходимость. Предположим, что однородная система (1_0) имеет решение $\alpha_{\downarrow} \neq \theta_{\downarrow}$, но $\mathbf{Rg} A = n$. Тогда по теореме 2.1 решение α_{\downarrow} должно быть нулевым – противоречие предположению. Следовательно $\mathbf{Rg} A < n$.

Достаточность. Пусть $\mathbf{Rg} A < n$, но система (1_0) имеет единственное решение $\alpha_{\downarrow} = \theta_{\downarrow}$. Тогда по теореме 2.1 $\mathbf{Rg} A = n$, а это противоречит предположению. #

Следствие 2.2. *Однородная система линейных алгебраических уравнений (1_0) , у которой $m < n$, имеет нетривиальное решение.*

По теореме о ранге матрицы $\mathbf{Rg} A \leq m$, но $m < n$. Следовательно, $\mathbf{Rg} A < n$. А по теореме 2.2 система (1_0) должна иметь нетривиальное решение.

! **Следствие 2.3.** *Однородная система линейных алгебраических уравнений (1_0) , у которой $m = n$, и $\det A = 0$, имеет нетривиальное решение.*

Поскольку $m = n$, и $\det A = 0$, то $\mathbf{Rg} A < m$, а значит и $\mathbf{Rg} A < n$. Тогда по теореме 2.2 система (1_0) будет иметь нетривиальное решение.

