

Вывод 32 точечных групп симметрии в обозначениях по Шенфлису.
Трансляционные элементы симметрии.

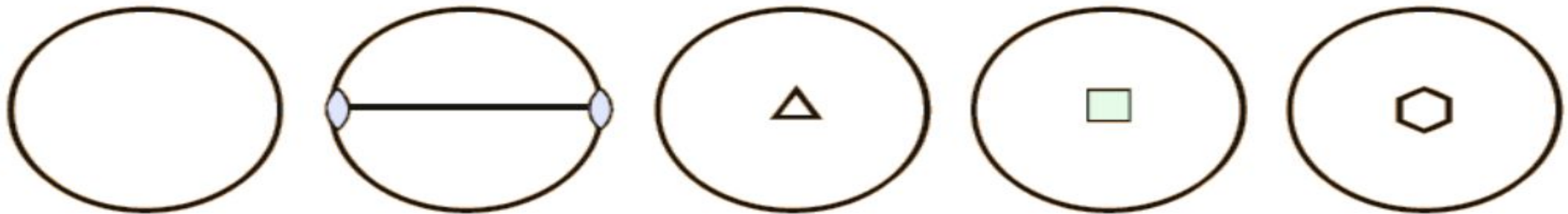
Выполнил: Студент 815
группы Заварзин Н.Н.

Вывод 32 точечных групп симметрии в обозначениях по Шенфлису.

Все точечные группы можно разбить на три категории симметрии: низшую, среднюю и высшую.

Вывод групп (классов) симметрии

За основу вывода можно взять все возможные в кристаллах поворотные оси симметрии. В результате получим 5 исходных классов L_n



ИТОГО - 5

Остальные классы с единичным направлением — поворотной осью, ориентированной вертикально в пространстве, можно получить добавлением к классу L_n

- 1) вертикальной зеркальной плоскости симметрии (P_v), проходящей вдоль каждой из осей L_n ;
- 2) горизонтальной зеркальной плоскости симметрии (P_h) перпендикулярной оси L_n ;
- 3) оси 2-го порядка, перпендикулярной оси L_n ;
- 4) операции инверсии в точке (i), т. е. центра симметрии, расположенного на оси L_n ;
- 5) любой комбинации перечисленных выше элементов симметрии.

2) Добавляем вертикальную зеркальную плоскость симметрии, проходящую вдоль каждой из осей (P_v)
Приходим к группам $L_n \cdot nP$.

$$(L_1)P_v \rightarrow P, L_2 \rightarrow L_2 2P, L_3 \rightarrow L_3 3P, L_4 \rightarrow L_4 4P, L_6 \rightarrow L_6 6P$$



ИТОГО - +5 = 10

3) Добавляем горизонтальную зеркальную плоскость симметрии, перпендикулярную оси (P_h).
Приходим к классам $L_n P_h$

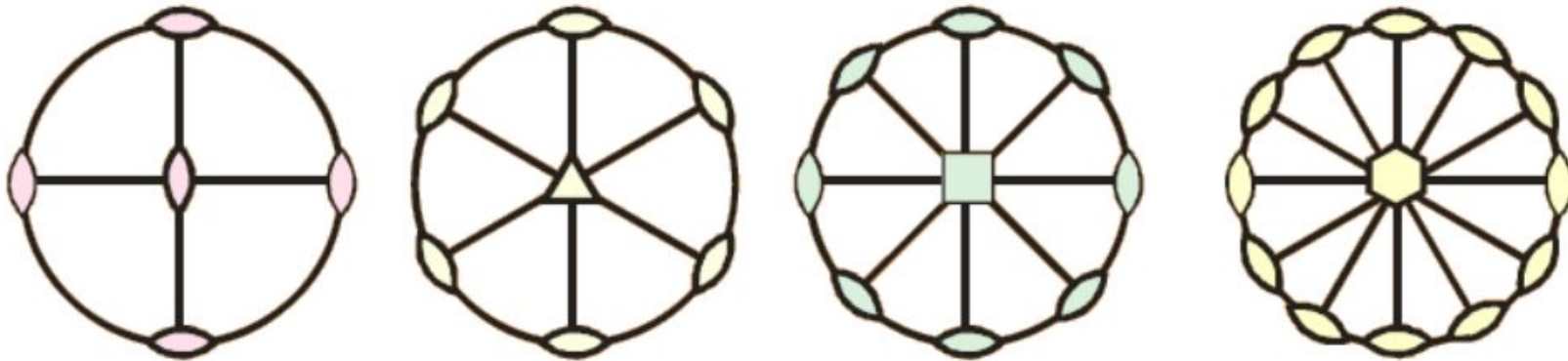
$(L_1)P_h \rightarrow P$, $L_2 \rightarrow L_2 PC$, $L_3 \rightarrow \cancel{L_3}$, $L_4 \rightarrow L_4 PC$, $L_6 \rightarrow L_6 PC$



ИТОГО - +4 = 14

4) Добавляем горизонтальную ось симметрии 2-го порядка, перпендикулярную главной оси ($L_2 \perp$).
Получаем классы $L_n \cdot nL_2$

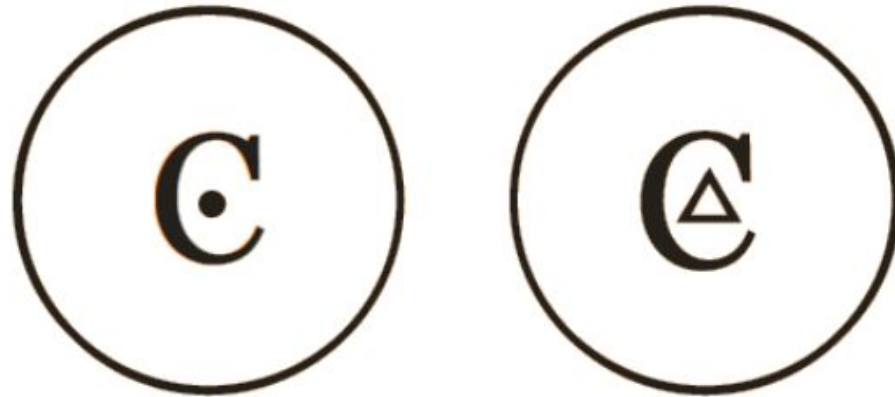
$L_1 \rightarrow L_2$, $L_2 \rightarrow 3L_2$, $L_3 \rightarrow L_3 3L_2$, $L_4 \rightarrow L_4 4L_2$, $L_6 \rightarrow L_6 6L_2$



ИТОГО - +4 = 18

5) Добавляем операцию инверсии в точке (i), т.е. центр симметрии

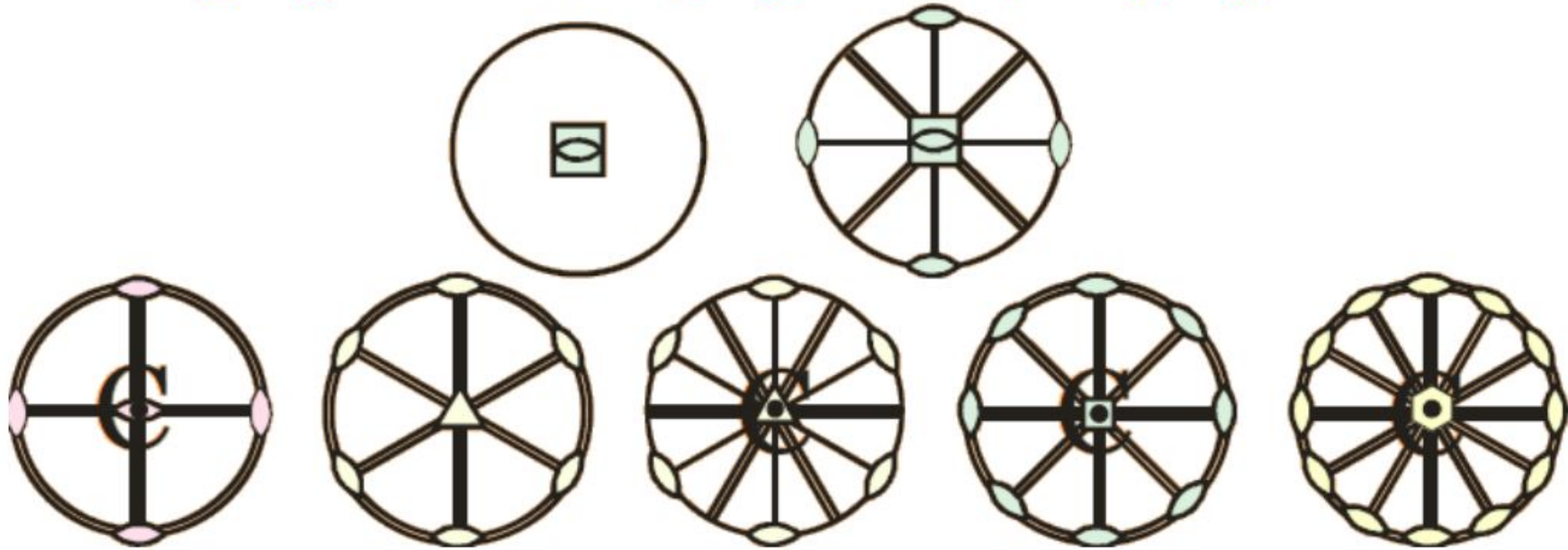
$$L_1 \rightarrow C, L_2 \rightarrow L_2PC, L_3 \rightarrow \sigma_3, L_4 \rightarrow L_4PC, L_6 \rightarrow L_6PC$$



ИТОГО - +2 = 20

б) Любую комбинацию перечисленных выше элементов симметрии (не забыв про существование инверсионных осей 4-ого порядка)

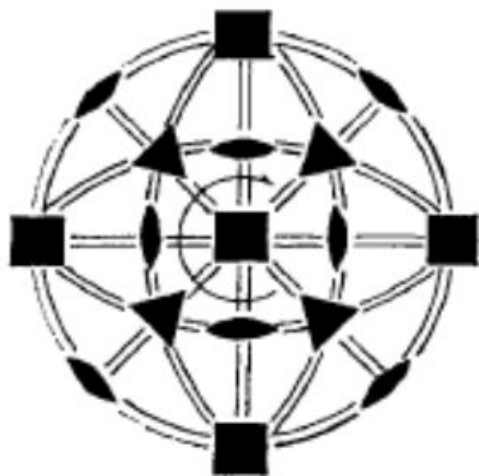
$\iota_4 \rightarrow \iota_4 2L_2 2P$, $L_2 \rightarrow 3L_2 3PC$, $L_3 \rightarrow L_3 3L_2 4P$,
 $L_3 3L_2 3PC$, $L_4 \rightarrow L_4 4L_2 5PC$, $L_6 \rightarrow L_6 6L_2 7PC$



ИТОГО - +7 = 27

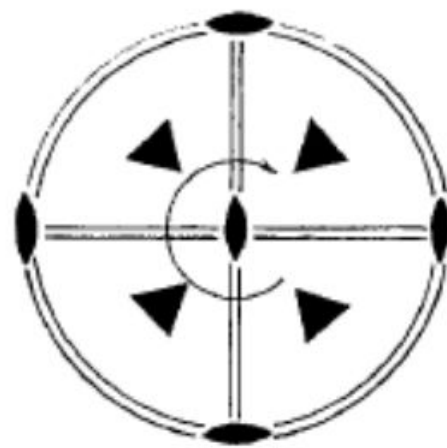
Вывод классов симметрии без единичных направлений

Добавим к классам $3L_44L_36L_6$ и $3L_24L_3$ зеркальную плоскость симметрии (P) или центр инверсии (C).



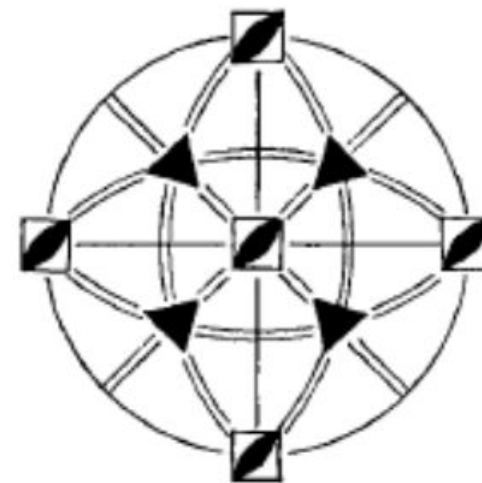
$3L_44L_36L_29PC$

a



$3L_24L_33PC$

б



$3L_44L_36P$

в

В итоге выведены еще пять классов симметрии с несколькими осями высшего порядка — классов без единичных направлений.

Таблица 2.2. Обозначения и названия 32 точечных групп (классов) симметрии

Сингония	Обозначение			Формула симметрии	Название класса
	международное	по Шубникову	по Шенфлису		
Триклинная	1	1	C_1	L^1	Моноклинический
	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$C_i = S_2$	C	Пинакoidalный
Моноклиническая	2	2	C_2	L^2	Диздрический осевой
	m	m	$C_{1h} = C_s$	P	Диздрический безосный
Ромбическая	$2/m$	$2:m$	C_{2h}	L^2PC	Призматический
	222	2:2	$D_2 = V$	$3L^2$	Ромбо-тетраэдрический
	mm^2	$2 \cdot m$	C_{2v}	L^2P	Ромбо-пирамидальный
Тригональная	mmm	$m \cdot 2 \cdot m$	D_{2h}	$3L^23PC$	Ромбо-дипирамидальный
	3	3	C_3	3	Тригонально-пирамидальный
	$\bar{3}2$	$3:2$	D_3	L^33L^2	Тригонально-трапецоэдрический
	$3m$	$3 \cdot m$	C_{3v}	L^33P	Дитригонально-пирамидальный
Тетрагональная	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$C_{3i} = S_6$	L^36C	Ромбоэдрический
	$\bar{3}m$	$\bar{6}m$	D_{3d}	L^33L^23PC	Дитригонально-скаленоэдрический
	4	4	C_4	L^4	Тетрагонально-пирамидальный
	422	4:2	D_4	L^4L^2	Тетрагонально-трапецоэдрический
	$4/m$	$4:m$	C_{4h}	L^4PC	Тетрагонально-дипирамидальный
	$4mm$	$4 \cdot m$	C_{4v}	L^4P	Дитетрагонально-пирамидальный
	$4/mmm$	$m \cdot 4:m$	D_{4h}	L^4L^25PC	Дитетрагонально-дипирамидальный
Гексагональная	$\bar{4}$	$\bar{4}$	S_4	L^2_4	Тетрагонально-тетраэдрический
	$\bar{4}2m$	$\bar{4} \cdot m$	$D_{2d} = V_d$	$L^2_42L^2P$	Тетрагонально-скаленоэдрический
	$\bar{6}$	$3:m$	C_{3h}	L^3P	Тригонально-дипирамидальный
	$\bar{6}m2$	$m \cdot 3:m$	D_{3h}	L^3L^24P	Дитригонально-дипирамидальный
	6	6	C_6	L^6	Гексагонально-пирамидальный
Кубическая	622	6:2	D_6	L^6L^2	Гексагонально-трапецоэдрический
	$6/m$	$6:m$	C_{6h}	L^6PC	Гексагонально-дипирамидальный
	$6mm$	$6 \cdot m$	C_{6v}	L^6P	Дигексагонально-пирамидальный
	$6/mmm$	$m \cdot 6:m$	D_{6h}	L^6L^27PC	Дигексагонально-дипирамидальный
	23	$3/2$	T	$3L^24L^3$	Тритетраэдрический
$m\bar{3}$	$\bar{6}/2$	T_h	$3L^24L^33PC$	Дидодекаэдрический	
$\bar{4}3m$	$3/\bar{4}$	T_d	$3L^2_4L^36P$	Гексатетраэдрический	
432	$3/4$	O	$3L^44L^36L^2$	Триоктаэдрический	
$m\bar{3}m$	$\bar{6}/4$	O_h	$3L^44L^36L^29PC$	Гексоктаэдрический	

Примечание. В международной и шубниковской системах обозначений приведены элементы симметрии, из которых можно вывести остальные. В графе «Формула симметрии» приведены все элементы симметрии данного класса: L — ось, C — центр, P — плоскость симметрии; перед каждым символом стоит число соответствующих элементов.

Трансляционные элементы симметрии

Одномерная

Бесконечные цепи (бордюры)

$$\vec{T} = n\vec{a} \quad n \in Z$$

Двумерная

Бесконечные слои

$$\vec{T} = u\vec{a} + v\vec{b} \quad u, v \in Z$$

Трёхмерная

Кристаллические структуры

$$\vec{T} = u\vec{a} + v\vec{b} + w\vec{c} \quad u, v, w \in Z$$

Множество векторов \vec{T} образуют группу, если в качестве умножения принять геометрическое сложение векторов.

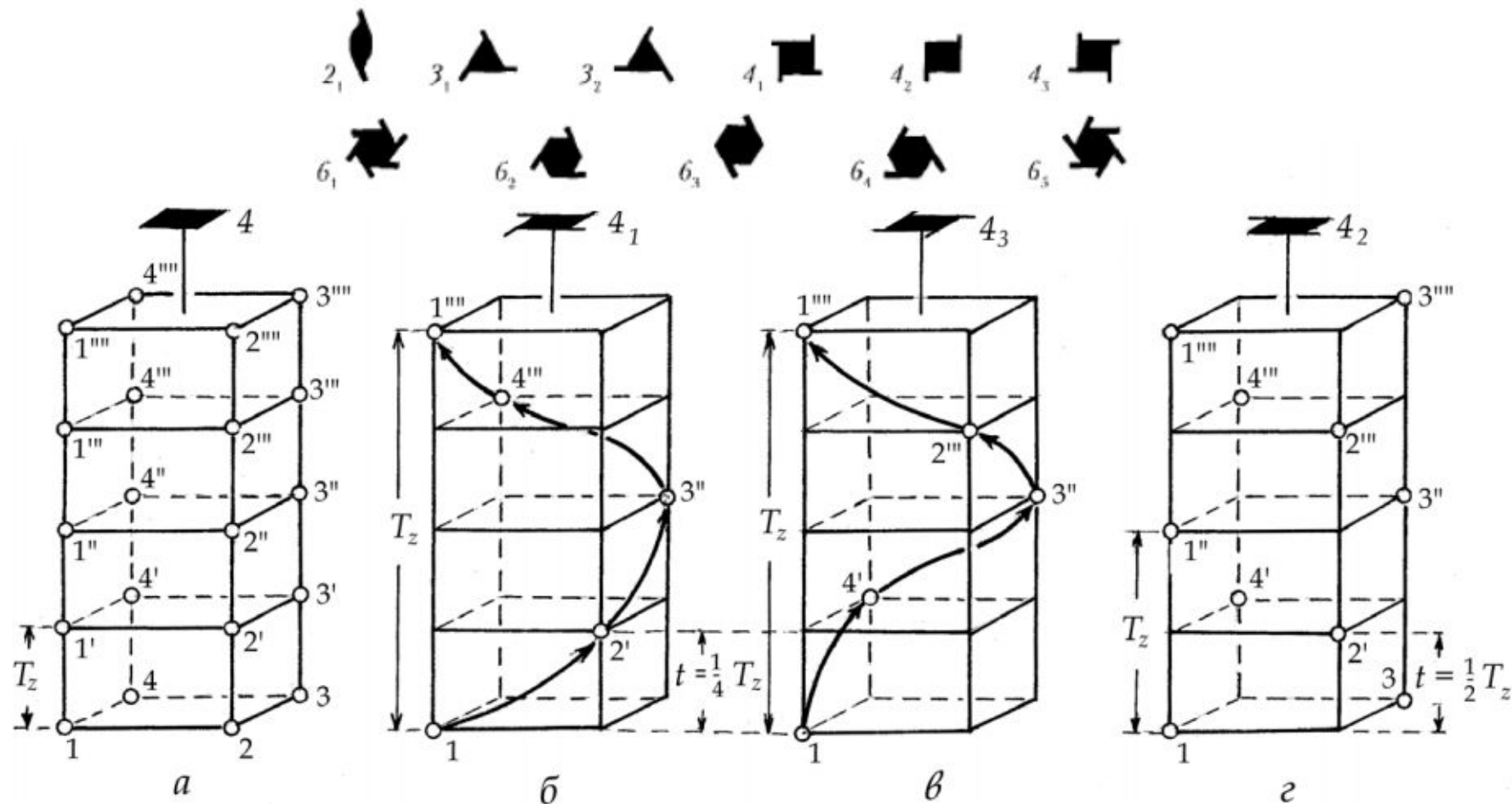
$$e = \vec{0}$$

Обратный элемент: $\vec{t}^{-1} = -\vec{t}$

Множество векторов трансляций, совмещающих структуру саму с собой, образуют группу трансляций (ГТ) данной структуры.

Число элементов группы трансляции бесконечно. Генераторами ГТ являются вектора элементарных трансляций.

Трансляционные элементы симметрии



**Иллюстрация действия осей 4-го порядка:
а – поворотной оси 4, б – винтовой оси 4₁,
в – винтовой оси 4₂, г – винтовой оси 4₃**

Библиографический список

- 1). Костов, И. КРИСТАЛЛОГРАФИЯ / И. Костов.: Москва.: МИР, 1965. -528 с.
- 2). Сироткин, Ю.В. Основы кристаллографии / Ю.И. Сироткин, М.П. : Шаскольская. : Москва.: Наука, 1979. -640 с.
- 3). Лекция 3. Симметрия кристаллов [Онлайн].– Режим доступа : <http://portal.tpu.ru/SHARED/e/EIKUPREKOVA/Teaching/Tab3/Tab/lection%203.pdf>, свободный. – Загл. с экрана.