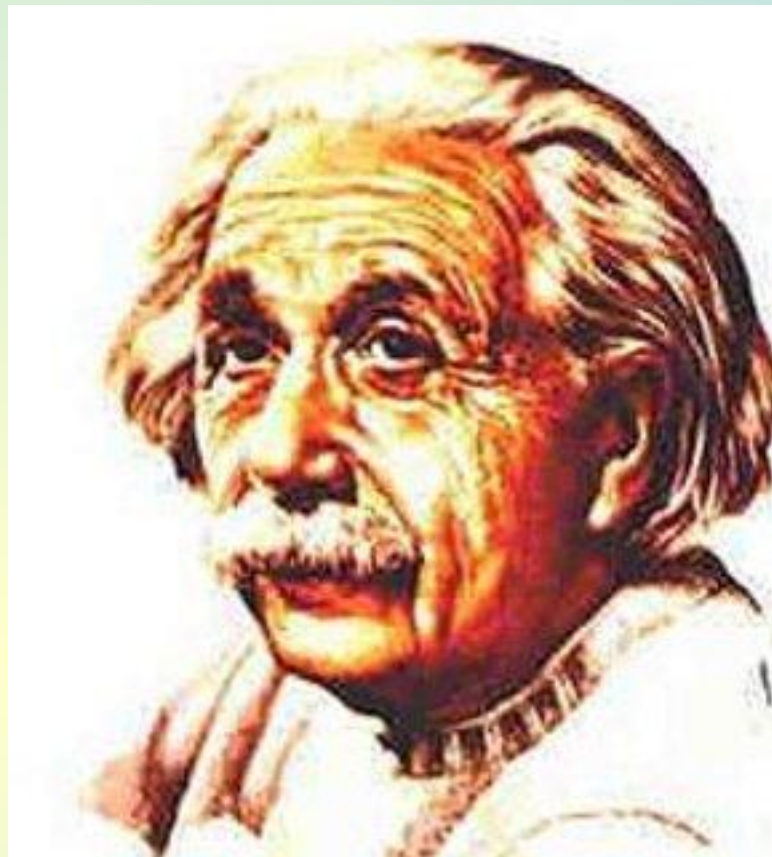


Решение показательных неравенств



**« Мне приходится делить
своё время между
политикой и решением
уравнений и неравенств .
Однако решение уравнений
и неравенств , по-моему,
гораздо важнее , потому
что политика существует
только для данного
момента , а уравнения и
неравенства будут
существовать вечно .»**



Альберт Эйнштейн

Определение 1:

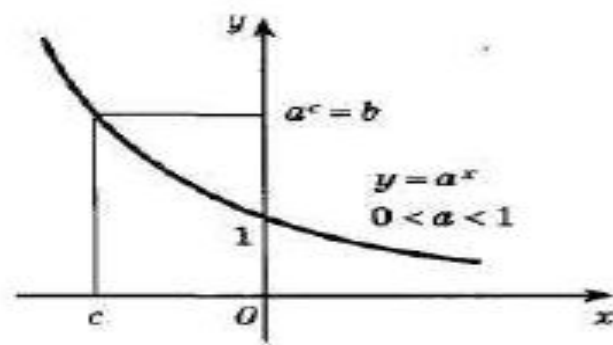
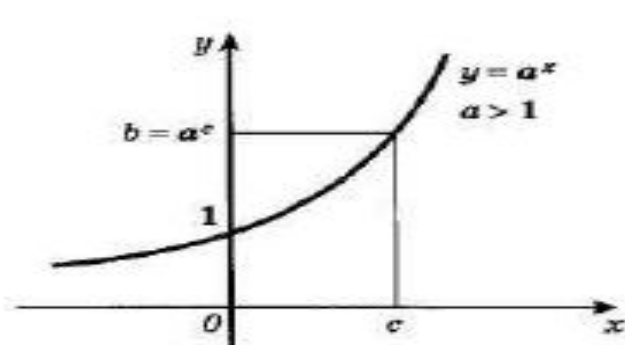
Неравенство, содержащее неизвестную в показателе степени, называется **показательным неравенством**.

Определение 2:

Неравенство в и д а $a^{f(x)} > a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1$

называется **простейшим показательным неравенством**.

- Решение показательных неравенств основано на строгой монотонности показательной функции. Известно, что
 - при основании, большем единицы, показательная функция возрастает,
 - при положительном основании, меньшем единицы, показательная функция убывает.



- Неравенство вида

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

в зависимости от основания эквивалентно следующему:

- при $a > 1$ $f(x) > g(x)$;
- при $0 < a < 1$ $f(x) < g(x)$.

- Неравенство вида

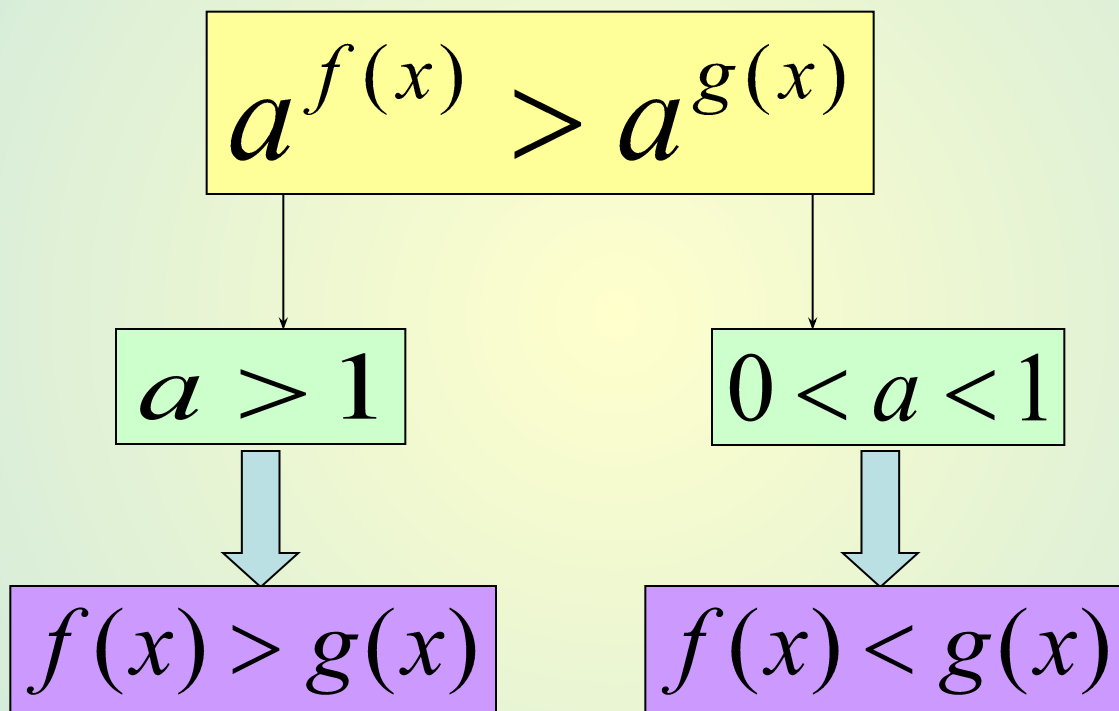
$$a^{f(x)} < a^{g(x)}$$

эквивалентно следующему неравенству:

- при $a > 1$ $f(x) < g(x)$;
- при $0 < a < 1$ $f(x) > g(x)$.

Решение простейших показательных неравенств

$$a > 0, a \neq 1$$



Знак неравенства

Сохраняется

Меняется

Что нужно учесть при решении показательных неравенств ?

**1. Привести основания степени к
одинаковому основанию**

**2. Использовать свойства монотонной
функции**

Пример 1

$$2^{2x-4} > 64$$

$$2^{2x-4} > 2^6$$

т.к. функция $y = 2^t$ монотонно
возрастает на \mathbb{R} , то

$$2x - 4 > 6$$

$$x > 5$$

Ответ: $(5; +\infty)$

Пример 2

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$$

т.к. функция $y = \left(\frac{1}{3}\right)^t$

монотонно убывает на \mathbb{R} , то

$$2x - 3,5 > 0,5$$

$$x > 2$$

Ответ: $(2; +\infty)$

Пример 3

$$0,5^{x^2-3x} \leq 0,5^{3x-8}$$

т.к. функция $y = (0,5)^t$

монотонно убывает на \mathbb{R} , то

$$x^2 - 3x \geq 3x - 8$$

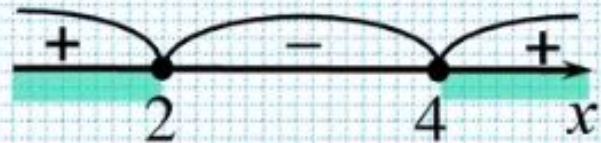
$$x^2 - 6x + 8 \geq 0$$

н.ф.: $x^2 - 6x + 8 = 0$

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

$$x \in (-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$



Пример 4

Решить неравенство:

$$2^x < \frac{1}{8}$$

Решение:

$$2^x < \frac{1}{8}$$

Поскольку $\frac{1}{8} = 2^{-3}$, то

$2^x < 2^{-3}$, т.к. $2 > 1$, функция $y = 2^t$ - возрастает

$$x < -3$$

Пример 5

$$2^{x^2} > 2^{x+2}$$

Решение:

$$2^{x^2} > 2^{x+2}$$

$x^2 > x + 2$, т.к. $2 > 1$ функция $y = 2^t$ возрастает

$$x^2 - x - 2 > 0$$

$$x < -1, x > 2$$

$$x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$$

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

Пример 6

Решить неравенство: $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-5x+10} \geq \frac{16}{81}$.

Решение. Неравенство переписывается в виде:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-5x+10} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^4.$$

Функция $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ монотонно убывает, поэтому неравенство $\left(\frac{2}{3}\right)^a \geq \left(\frac{2}{3}\right)^b$ эквивалентно неравенству $a \leq b$. Основание степени отбрасывается с изменением знака неравенства:

$$x^2 - 5x + 10 \leq 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3.$$

Ответ: $[2; 3]$.

Пример 7

$$\left(\frac{7}{12}\right)^{-2x+3} \geq \left(\frac{12}{7}\right)^{4-3x}$$

Решение:

Приведем обе части неравенства к одному основанию, используя свойства степени:

$$\left(\frac{7}{12}\right)^{-2x+3} \geq \left(\frac{7}{12}\right)^{-(4-3x)}$$

Основание $a = \frac{7}{12}$; $0 < a < 1$;

функция убывающая, знак неравенства меняется на противоположный
 $-2x + 3 \leq -(4 - 3x)$; $-2x + 3 \leq 4 + 3x$; $-5x \leq 1$; $x \geq -\frac{1}{5}$;

Ответ: $x \geq -\frac{1}{5}$; или $x \in \left[-\frac{1}{5}; +\infty\right)$

Пример 8

$$6^{x^2-7x+12} > 1$$

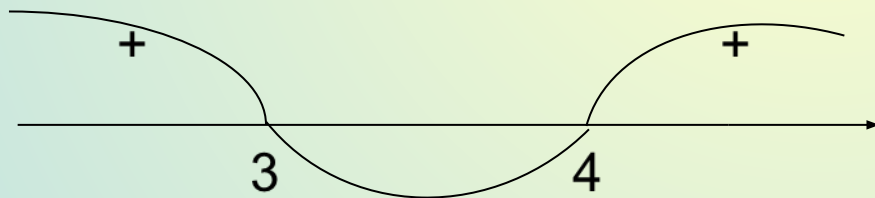
Приведем обе части неравенства к одному основанию, используя свойства степени:

$$6^{x^2-7x+12} > 6^0$$

Основание $a = 6$; $a > 1$;

функция возрастающая, знак неравенства не меняется

$$x^2 - 7x + 12 > 0; \quad x^2 - 7x + 12 = 0; \quad D = 1; \quad x = 4; 3$$



ответ:

$$x \in (-\infty; 3) \cup (4; +\infty)$$

Решение показательных неравенств методом логарифмирования обеих частей .

--	--

Примеры

9. $5^x > 3$; $x > \log_5 3$

10. $2^x \leq \frac{1}{7}$ $x \leq \log_2 \frac{1}{7}$

11. $\left(\frac{1}{4}\right)^x > 3$; $x < \log_{\frac{1}{4}} 3$

12. $\left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{3}{5}$; $x > \log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{5}$