

Инженерная ХИМИЯ

Лекция 1.

Лектор: к.т.н. Таран Ю.А.

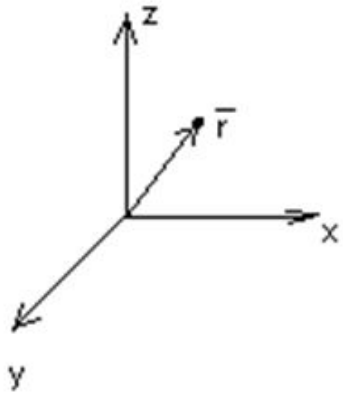
Положение материальной точки характеризуется радиус – вектором \bar{r}

$$\bar{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = f(x, y, z)$$

$$\bar{w} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \bar{i}w_x + \bar{j}w_y + \bar{k}w_z = \bar{w}_x + \bar{w}_y + \bar{w}_z = f(x, y, z, \tau)$$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{w}}{d\tau} = \bar{a}_x + \bar{a}_y + \bar{a}_z$$

$$\bar{a}_x = \frac{dw_x}{d\tau} = \frac{\partial w_x}{\partial \tau} \frac{d\tau}{d\tau} + \frac{\partial w_x}{\partial y} \frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial w_x}{\partial z} \frac{dz}{d\tau} + \frac{\partial w_x}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial w_x}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z}$$



Изменение во времени – *нестационарная составляющая*. Изменение w_x по x, y, z – *конвективная составляющая*.

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial}{\partial x} + w_y \frac{\partial}{\partial y} + w_z \frac{\partial}{\partial z} - \text{субстанциональная производная.}$$

Поверхностные и массовые силы. Вывод уравнения неразрывности сплошной однокомпонентной среды.

Единичная массовая сила – сила, отнесенная к единице массы:

$$\bar{P}_i \left[\frac{\text{Н}}{\text{кг}} \right] = \frac{P}{m} = \frac{ma}{m} = a \left| \frac{\text{М}}{\text{с}^2} \right| = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta m} = \frac{dP}{dm} \Rightarrow P = \int_m P_i dm = \int_{V(\tau)} P_i \rho_i dV$$

Единичная поверхностная сила – сила, отнесенная к единице поверхности (напряжение силы):

$$N_i \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right] = [\text{Па}] = \frac{P}{S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta S} = \frac{dP}{dS} \Rightarrow P = \int_{S(\tau)} N_i dS = \int_{V(\tau)} \text{div } N_i dV$$

$$\rho_i = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \Rightarrow m = \int_V \rho_i dV = \int_m dm = \sum \Delta m$$

$$\frac{dm}{d\tau} = 0 = \frac{d}{d\tau} \left(\int_{V(\tau)} \rho_i dV \right) = \int_{V(\tau)} \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial \tau} + \text{div} (w_n, \rho_i) \right) dV = 0$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial \tau} + \text{div} (w_n, \rho_i) = 0 \text{ – уравнение неразрывности однокомпонентной среды}$$

Гидродинамика. Уравнение Навье-Стокса.

$$\frac{d}{d\tau} \left[\int_{V(\tau)} w \rho_l dV \right] = \int_{V(\tau)} [\rho_l P_l dV + \int_{S(\tau)} N_l dS]$$

$\rho_l \frac{dw}{d\tau} = \rho_l P_l + \text{div} N_l$ - уравнение Навье-Стокса в векторной форме.

$$\rho_l \left[\frac{\partial w_x}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} + P_l \rho_l + \frac{\partial \tau_{\text{гп}}^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{\text{гп}}^{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{\text{гп}}^{xz}}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial x} + P_l \rho_l + \mu \left[\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right] -$$

проекция на ось x

$$\rho_l \left[\frac{\partial w_y}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_y}{\partial z} \right] = - \frac{\partial p}{\partial y} + P_l \rho_l + \frac{\partial \tau_{\text{гп}}^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{\text{гп}}^{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{\text{гп}}^{xz}}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial y} + P_l \rho_l + \mu \left[\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial z^2} \right] -$$

проекция на ось y

$$\rho_l \left[\frac{\partial w_z}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} \right] = - \frac{\partial p}{\partial z} + P_l \rho_l + \frac{\partial \tau_{\text{гп}}^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{\text{гп}}^{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{\text{гп}}^{xz}}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial z} + P_l \rho_l + \mu \left[\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right] -$$

проекция на ось z

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial \tau} + \text{div}(\rho_l w) = 0$$
 - уравнение неразрывности

$p = f(\rho_l)$ - уравнение состояния системы.

Гидростатика.

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = P_x - \frac{dw_x}{d\tau} + v \nabla^2 w_x \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = P_y - \frac{dw_y}{d\tau} + v \nabla^2 w_y \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = P_z - \frac{dw_z}{d\tau} + v \nabla^2 w_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = P_x & * dx \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = P_y & * dy \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = P_z & * dz \end{cases} \quad \text{-система уравнений Эйлера}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho_l (P_x dx + P_y dy + P_z dz);$$

$dp = \rho_l (P_x dx + P_y dy + P_z dz)$ – основное уравнение гидростатики.

Изобарическая поверхность – поверхность уровня. Тогда:

$$dp = 0 \Rightarrow P_x dx + P_y dy + P_z dz = 0 \text{ -уравнение поверхности уровня.}$$

Уравнение Бернулли для идеальной ЖИДКОСТИ

Допущения:

1. Течение установившееся

$$\frac{\partial w_{x,y,z}}{\partial \tau} = 0$$

2. Течение осуществляется в поле сил тяжести.

$$P_{x,y} = 0, P_z = -g$$

3. Жидкость является идеальной

$$\rho_l = \text{const}, \mu = 0$$

4. Течение является безвихревым.

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} = \frac{\partial w^2}{2\partial x} + 2[\overline{w_x w}]_x = \frac{\partial w^2}{2\partial x}$$

Записываем проекции уравнения Навье-Стокса на оси x, y, z , домножаем их соответственно на dx, dy, dz и складываем. Получаем:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial w^2}{\partial x} dx + \frac{\partial w^2}{\partial y} dy + \frac{\partial w^2}{\partial z} dz \right] = - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right] - g dz$$

$w, p = f(x, y, z)$, тогда имеем полные дифференциалы соответствующих выражений.

$$\frac{dw^2}{2} + \frac{dp}{\rho} + g dz = 0 \Rightarrow d \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{w^2}{2g} \right) = 0, \text{ - дифференциал Бернулли.}$$

p, w, z – давление, скорость, координата в точке – их истинное значение

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{w^2}{2g} = \text{const} = H \text{ - интеграл (уравнение) Бернулли}$$

p - среднее давление, w - средняя скорость, z - координата от живого сечения потока - усредненные параметры.

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g}$$

Уравнение Бернулли для реальной жидкости.

$$Z + \frac{p}{\rho g} + \frac{w^2}{2g} + h_{\Pi} = H - \text{полный напор}$$

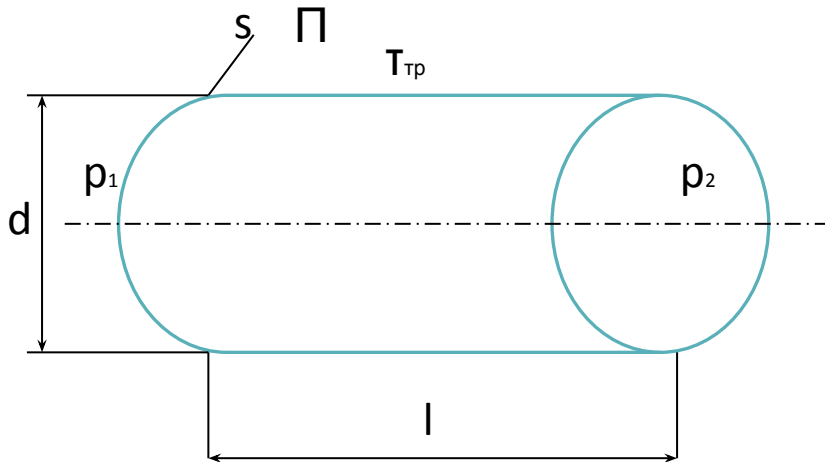
Потерянный напор включает потери на местном сопротивлении h_M и потери трения h_T

$$h_{\Pi} = h_T + h_M,$$

Потери на местном сопротивлении пропорциональны скоростному напору $\frac{w^2}{2g}$

$h_M = \xi \frac{w^2}{2g}$, ξ – коэффициент пропорциональности (местного сопротивления).

Вывод уравнения равномерного движения Дарси – Вейсбаха



$$p_1 f = p_2 f + \tau_{\text{тр}} \Pi l$$

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\tau_{\text{тр}} \Pi l}{\rho g f}$$

Уравнение Бернулли: $z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g} + h_{\Pi}$, где $z_1 = z_2$; $w_1 = w_2$, $h_{\Pi} = h_T$, тогда:

$h_{\Pi} = h_T = \frac{\tau_{\text{тр}} \Pi l}{\rho g f} = \frac{4\tau_{\text{тр}} l}{\rho g d_3}$; Поскольку: $\frac{\Pi}{f} = \left[\frac{1}{M} \right]$, то обратная величина есть:

$R = \frac{f}{\Pi}$ - гидравлический радиус (для труб не круглого сечения)

f - живое сечение струи - нормальное к вектору скорости сечение струи трубы;

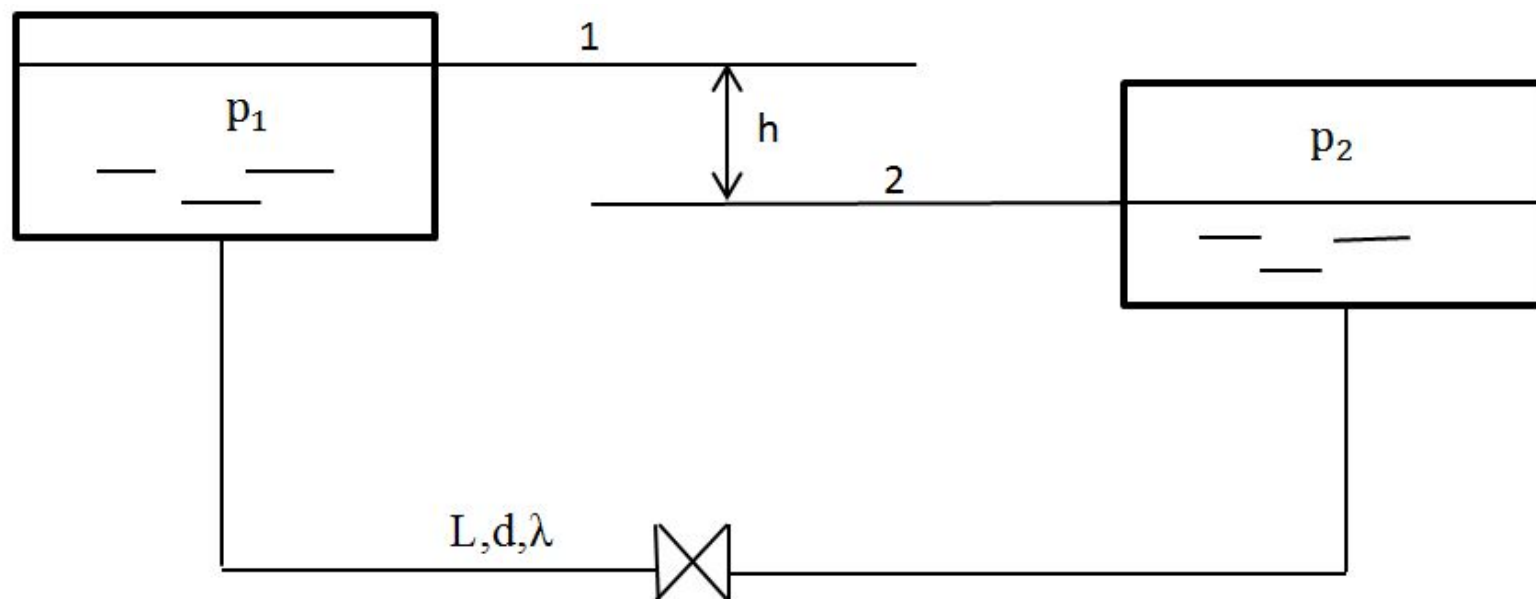
Π - смоченный периметр

$\frac{f}{\Pi} = \frac{\pi d^2}{4\pi d} \Rightarrow d = 4R_r \Rightarrow d_3 = 4R_r$ - эквивалентный диаметр

$h_T = \lambda \frac{lw^2}{d_3 2g}$ а потерянный напор $h_{\Pi} = h_T + h_M$ равен:

$h_{\Pi} = h_T + h_M = \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \xi \right) \frac{w^2}{2g}$ - уравнение Дарси - Вейсбаха

Расчет простого



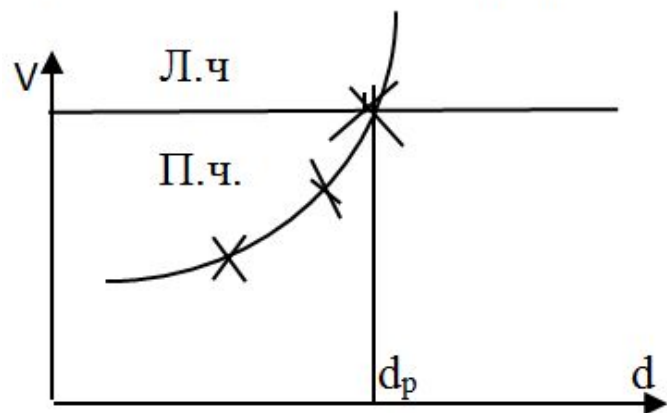
$$h + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g} + h_n$$

$h_n = (\lambda l/d + \sum \xi) \frac{w^2}{2g} = h + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = H$ - располагаемый напор. Он тратится на преодоление гидравлических потерь

Откуда скорость в трубе w и расход равны:

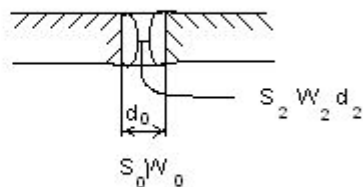
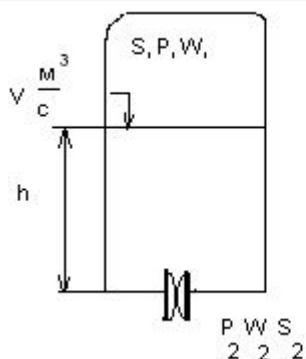
$$w = \sqrt{\frac{2gH}{\lambda \frac{l}{d} + \sum \xi}}; \quad V = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2gH}{\lambda \frac{l}{d} + \sum \xi}}$$

Поскольку $\lambda=C/Re^n$ часто не удается рассчитать w и V аналитически, тогда это можно сделать численно или графически, вычисляя левую л.ч. и правую п.ч. уравнения:



Формула для расхода скорости, где вместо коэффициента местных сопротивлений используется эквивалентная длина трубы, дающая те же потери на трении, что и на местных сопротивлениях имеет вид:

$$V = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2gH}{\lambda \left(\frac{1}{d} + \sum \frac{l_a}{d} \right)}} \Rightarrow H = \frac{16V^2}{\pi d^5} \lambda \frac{l_a}{2g} = 0,083 \lambda \frac{1}{d^5} V^2$$



Истечение жидкости из резервуара через отверстие в дне сосуда.

$$\alpha = \frac{f_2}{f_0} = \left(\frac{d_2}{d_0}\right)^2 \leq 1 - \text{коэффициент сжатия струи}$$

Для сечений 1 и 2:

$$h + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} = 0 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g} + h_{\text{п}}$$

Уравнение расхода $V = w_1 f_1 = w_2 f_2$, где V – расход

$$\frac{w_1^2}{2g} = \frac{w_2^2}{2g} \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2$$

$$H_{\text{ст}} = h + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \left[1 + \xi - \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2\right] \frac{w_2^2}{2g}, \text{ где } H_{\text{ст}} - \text{статический напор}$$

$$w_2 = \frac{1}{\left[1 + \xi - \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2\right]^{1/2}} \sqrt{2gH_{\text{ст}}} = \varphi \sqrt{2gH_{\text{ст}}}, \text{ где } \varphi < 1 - \text{коэффициент скорости истечения}$$

При $p_1 = p_2$, $w_2 = \varphi \sqrt{2gh}$ - например, сосуд открыт в атмосферу

$$V = w_1 f_1 = w_2 f_2 = w_0 f_0 = \frac{f_2}{f_0} f_0 w_2 = f_0 \alpha \varphi \sqrt{2gH_{\text{ст}}} = \mu_p f_0 \sqrt{2g \left(h + \frac{p_1 - p_2}{\rho g}\right)}, \text{ где } \mu_p < 1 -$$

коэффициент расхода.