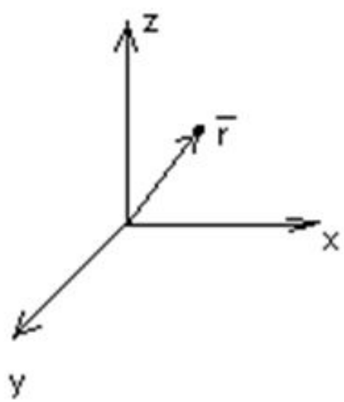
Инженерная химия Лекция 1.

Лектор: к.т.н. Таран Ю.А.



Положение материальной точки характеризуется радиус – вектором $\bar{r}$

$$\bar{r}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\mathrm{f}(\mathrm{x,y,z})$$

$$\bar{w}=\frac{d\bar{r}}{dt}=\frac{\partial\bar{r}}{\partial x}\frac{dx}{d\tau}+\frac{\partial\bar{r}}{\partial y}\frac{dy}{d\tau}+\frac{\partial\bar{r}}{\partial z}\frac{dz}{d\tau}=\bar{i}w_x+\bar{j}w_y+\bar{k}w_z=\bar{w}_x+\bar{w}_y+\bar{w}_z=f(x,y,z,\tau)$$

$$\bar{a}=\frac{d\bar{w}}{d\tau}=\bar{a}_x+\bar{a}_y+\bar{a}_z$$

$$\bar{a}_x=\frac{dw_x}{d\tau}=\frac{\partial w_x}{\partial\tau}\frac{d\tau}{d\tau}+\frac{\partial w_x}{\partial y}\frac{dy}{d\tau}+\frac{\partial w_x}{\partial z}\frac{dz}{d\tau}+\frac{\partial w_x}{\partial x}\frac{dx}{d\tau}=\frac{\partial w_x}{\partial\tau}+w_x\frac{\partial w_x}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_x}{\partial y}+w_z\frac{\partial w_x}{\partial z}$$

Изменение во времени – *нестационарная составляющая*. Изменение w_x по x,y,z– *конвективная составляющая.*

$\frac{d}{d\tau}=\frac{\partial}{\partial\tau}+w_x\frac{\partial}{\partial x}+w_y\frac{\partial}{\partial y}+w_z\frac{\partial}{\partial z}$ – *субстанциональная производная.*

Поверхностные и массовые силы. Вывод уравнения неразрывности сплошной однокомпонентной среды.

Единичная массовая сила – сила, отнесенная к единице массы:

$$\overline{P}_i \left[\frac{Н}{кг}\right] = \frac{P}{m} = \frac{ma}{m} = a \left|\frac{м}{с^2}\right| = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta m} = \frac{dP}{dm} \Rightarrow P = \int_m P_i dm = \int_{V(\tau)} P_i \rho_i dV$$

Единичная поверхностная сила – сила, отнесенная к единице поверхности (напряжение силы):

$$N_i \left[\frac{Н}{м^2}\right] = [Па] = \frac{P}{S} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta S} = \frac{dP}{dS} \Rightarrow P = \int_{S(\tau)} N_i \, dS = \int_{V(\tau)} \mathrm{div}\; N_i \, dV$$

$$\rho_i = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \Rightarrow m = \int_V \rho_i dV = \int_m dm = \sum \Delta m$$

$$\frac{dm}{d\tau} = 0 = \frac{d}{d\tau}\left(\int_{V(\tau)} \rho_i dV\right) = \int_{V(\tau)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \mathrm{div}\,(w_n, \rho_i)\right) dV = 0$$

$\frac{\partial \rho_i}{\partial \tau} + \mathrm{div}(w_n, \rho_i) = 0$ – уравнение неразрывности однокомпонентной среды

Гидродинамика. Уравнение Навье-Стокса.

$$\frac{d}{d\tau}[\int_{v(\tau)} w\rho_\iota dV] = \int_{V(\tau)}[\rho_\iota P_\iota dV + \int_{S(\tau)} N_\iota dS$$

$\rho_\iota \dfrac{dw}{d\tau} = \rho_\iota P_i + div N_i$ - *уравнение Навье-Стокса в векторной форме.*

$$\rho_\iota[\frac{\partial w_x}{\partial \tau} + w_x\frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y\frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z\frac{\partial w_x}{\partial z}] = -\frac{\partial p}{\partial x} + P_\iota\rho_\iota + \frac{\partial\tau_{\text{тр}}^{xx}}{dx} + \frac{\partial\tau_{\text{тр}}^{xy}}{dy} + \frac{\partial\tau_{\text{тр}}^{xz}}{dz} = -\frac{\partial p}{\partial x} + P_\iota\rho_\iota + \mu[\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2}]$$

\- проекция на ось x

$$\rho_\iota[\frac{\partial w_y}{\partial \tau} + w_x\frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y\frac{\partial w_y}{\partial y} + w_z\frac{\partial w_y}{\partial z}] = -\frac{\partial p}{\partial y} + P_\iota\rho_\iota + \frac{\partial\tau_{\text{тр}}^{xx}}{dx} + \frac{\partial\tau_{\text{тр}}^{xy}}{dy} + \frac{\partial\tau_{\text{тр}}^{xz}}{dz} = -\frac{\partial P}{\partial y} + P_\iota\rho_\iota + \mu[\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial z^2}]$$

\- проекция на ось y

$$\rho_\iota[\frac{\partial w_z}{\partial \tau} + w_x\frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y\frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z\frac{\partial w_z}{\partial z}] = -\frac{\partial p}{\partial z} + P_\iota\rho_\iota + \frac{\partial\tau_{\text{тр}}^{xx}}{dx} + \frac{\partial\tau_{\text{тр}}^{xy}}{dy} + \frac{\partial\tau_{\text{тр}}^{xz}}{dz} = -\frac{\partial p}{\partial z} + P_\iota\rho_\iota + \mu[\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2}]$$

\- проекция на ось z

$\dfrac{\partial\rho_\iota}{\partial\tau} + \mathrm{div}(\rho_\iota w) = 0$ - уравнение неразрывности

$p = f(\rho_i)$ - уравнение состояния системы.

Гидростатика.

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = P_x - \frac{dw_x}{d\tau} + \nu\nabla^2 w_x \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = P_y - \frac{dw_y}{d\tau} + \nu\nabla^2 w_y \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = P_z - \frac{dw_z}{d\tau} + \nu\nabla^2 w_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = P_x & \Big| * dx \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = P_y & \Big| * dy \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = P_z & \Big| * dz \end{cases}$$

-система уравнений Эйлера

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz = \rho_\iota(P_x dx + P_y dy + P_z dz);$$

$dp=\rho_\iota(P_x dx + P_y dy + P_z dz)$ –основное уравнение гидростатики.

Изобарическая поверхность- поверхность уровня. Тогда:

$dp=0 \Rightarrow P_x dx + P_y dy + P_z dz = 0$ -уравнение поверхности уровня.

Уравнение Бернулли для идеальной жидкости

Допущения:

1.Течение установившееся

$$\frac{\partial w_{xy,z}}{\partial \tau}=0$$

2.Течение осуществляется в поле сил тяжести.

$P_{x,y}=0, P_z=-g$

3.Жидкость является идеальной

$\rho_l=\text{const}\ ,\ \mu=0$

4.Течение является безвихревым.

$$w_x\frac{\partial w_x}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_x}{\partial y}+w_z\frac{\partial w_x}{\partial z}=\frac{\partial w^2}{2\partial x}+2[\overline{\mathrm{w}}\mathrm{x}\overline{\mathrm{w}}]_x=\frac{\partial w^2}{2\partial x}$$

Записываем проекции уравнения Навье-Стокса на оси x,y,z, домножаем их соответственно на dx,dy,dz и складываем. Получаем:

$$\tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial w^2}{\partial x}dx+\frac{\partial w^2}{\partial y}dy+\frac{\partial w^2}{\partial z}dz\right] = -1/\rho\left[\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right]-gdz$$

w,p=f(x,y,z), тогда имеем полные дифференциалы соответствующих выражений.

$\frac{dw^2}{2}+\frac{dp}{\rho}+gdz=0 \Rightarrow d\left(z+\frac{p}{\rho g}+\frac{w^2}{2g}\right)=0$,- дифференциал Бернулли.

p, w, z –давление, скорость, координата в точке – их истинное значение

$z+\frac{p}{\rho g}+\frac{w^2}{2g}=const=H$- интеграл (уравнение) Бернулли

p - среднее давление, w- средняя скорость, z- координата от живого сечения потока- усредненные параметры.

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{w_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{w_2^2}{2g}$$

Уравнение Бернулли для реальной жидкости.

$Z + \frac{p}{\rho g} + \frac{w^2}{2g} + h_п = H$ – полный напор

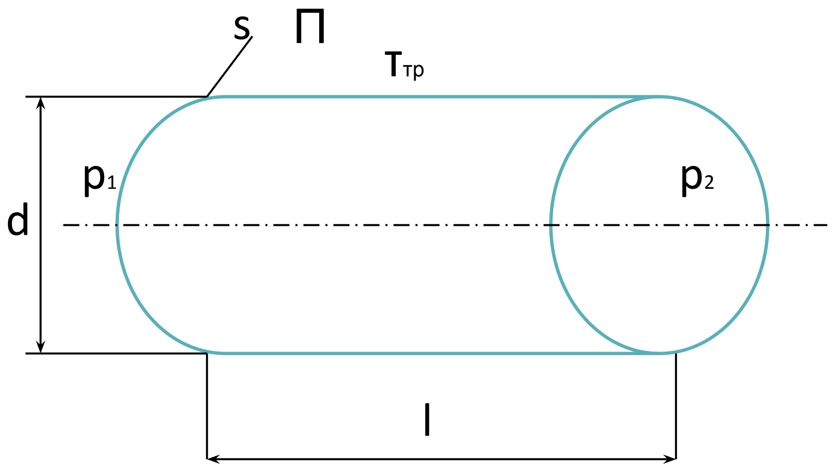
Потерянный напор включает потери на местном сопротивлении $h_м$ и потери трения $h_т$

$h_п = h_т + h_м$,

Потери на местном сопротивлении пропорциональны скоростному напору $\frac{w^2}{2g}$

$h_м = \xi \frac{w^2}{2g}$, ξ – коэффициент пропорциональности (местного сопротивления).

Вывод уравнения равномерного движения Дарси – Вейсбаха



$$p_1 f = p_2 f + \tau_{тр} П\, l$$

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\tau_{тр} П l}{\rho g f}$$

Уравнение Бернулли: $z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1{}^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2{}^2}{2g} + h_п$, где $z_1=z_2$; $w_1=w_2$, $h_п= h_т$, тогда:

$h_п = h_т = \frac{\tau_{тр}\,П l}{\rho g f} = \frac{4\tau_{тр}\, l}{\rho g d_э}$; Поскольку: $\frac{П}{f}$ - $\left[\frac{1}{м}\right]$, то обратная величина есть:

$R = \frac{f}{П}$ - гидравлический радиус (для труб не круглого сечения)

f – живое сечение струи – нормальное к векторy скорости сечение струи трубы;

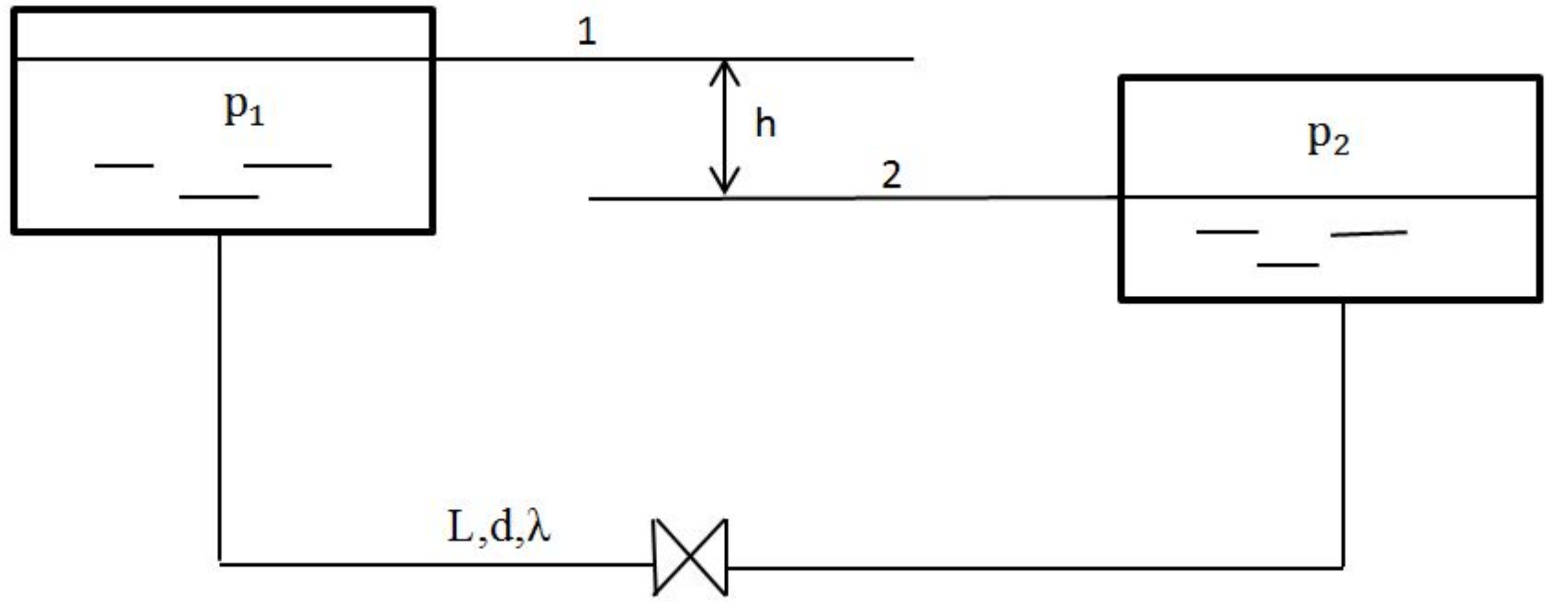
П – смоченный периметр

$\frac{f}{П} = \frac{\pi d^2}{4\pi d}$ => $d = 4R_г$ => $d_э = 4R_г$ – эквивалентный диаметр

$h_т = \lambda \frac{l w^2}{d_э 2g}$ а потерянный напор $h_п = h_т + h_м$ равен:

$h_п = h_т + h_м = (\lambda \frac{l}{d} + \sum \xi) \frac{w^2}{2g}$ - уравнение Дарси – Вейсбаха

Расчет простого



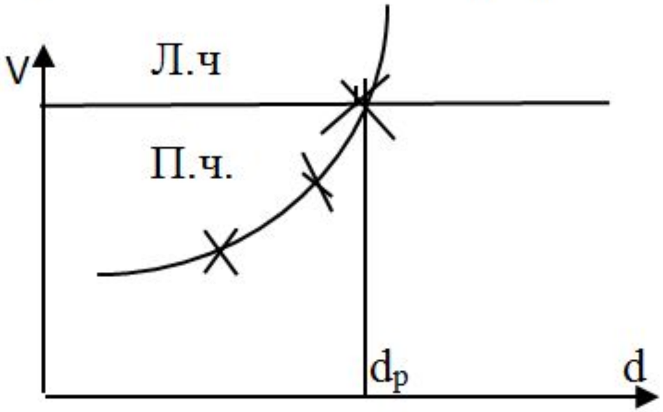
$$h+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{w_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{w_2^2}{2g}+\ h_n$$

$h_n=(\lambda l/d+\sum\xi)\frac{w^2}{2g}=h+\frac{p_1-p_2}{\rho g}=H$- располагаемый напор. Он тратится на преодоление гидравлических потерь

Откуда скорость в трубе w и расход равны:

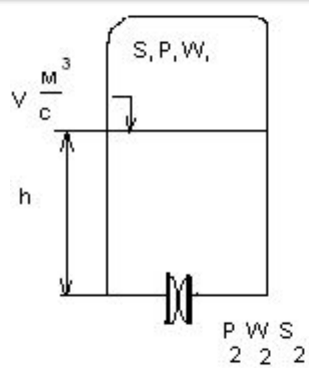
$$w=\sqrt{\frac{2gH}{\lambda\frac{l}{d}+\sum\xi}};\ V=\frac{\pi d^2}{4}\sqrt{\frac{2gH}{\lambda\frac{l}{d}+\sum\xi}}$$

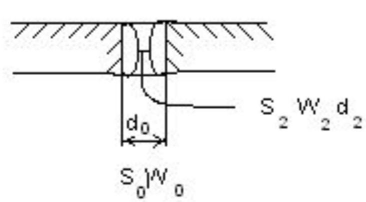
Поскольку $\lambda = C/Re^n$ часто не удается рассчитать w и V аналитически, тогда это можно сделать численно или графически, вычисляя левую л.ч. и правую п.ч. уравнения:



Формула для расхода скорости, где вместо коэффициента местных сопротивлений используется эквивалентная длина трубы, дающая те же потери на трении, что и на местных сопротивлениях имеет вид:

$$V = \frac{\pi d^2}{4}\sqrt{\frac{2gH}{\lambda\left(\frac{l}{d} + \Sigma\frac{l_э}{d}\right)}} \Rightarrow H = \frac{16V^2}{\pi d^5}\lambda\frac{l_э}{2g} = 0{,}083\lambda\frac{l}{d^5}V^2$$





Истечение жидкости из резервуара через отверстие в дне сосуда.

$\alpha = \frac{f_2}{f_0} = (\frac{d_2}{d_0})^2 \leq 1$ - *коэффициент сжатия струи*

Для сечений 1 и 2:

$$h + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{w_1{}^2}{2g} = 0 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{w_2{}^2}{2g} + h_п$$

Уравнение расхода $V = w_1 f_1 = w_2 f_2$, Где V – расход

$$\frac{w_1{}^2}{2g} = \frac{w_2{}^2}{2g}\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2$$

$H_{ст} = h + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \left[1 + \xi - \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2\right]\frac{w_2{}^2}{2g}$, где $H_{ст}$ – статический напор

$w_2 = \frac{1}{\left[1+\xi-\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2\right]^{1/2}}\sqrt{2gH_{ст}} = \varphi\sqrt{2gH_{ст}}$, где $\varphi<1$ - коэффициент скорости истечения

При $p_1 = p_2$, $w_2 = \varphi\sqrt{2gh}$ - например, сосуд открыт в атмосферу

$V = w_1 f_1 = w_2 f_2 = w_0 f_0 = \frac{f_2}{f_0} f_0 w_2 = f_0 \alpha \varphi \sqrt{2gHст} = \mu_p f_0 \sqrt{2g\left(h + \frac{p_1 - p_2}{\rho g}\right)}$, где $\mu_p < 1$ –

коэффициент расхода.