



ПОЛИТЕХ

Санкт-Петербургский
Политехнический Университет
Петра Великого

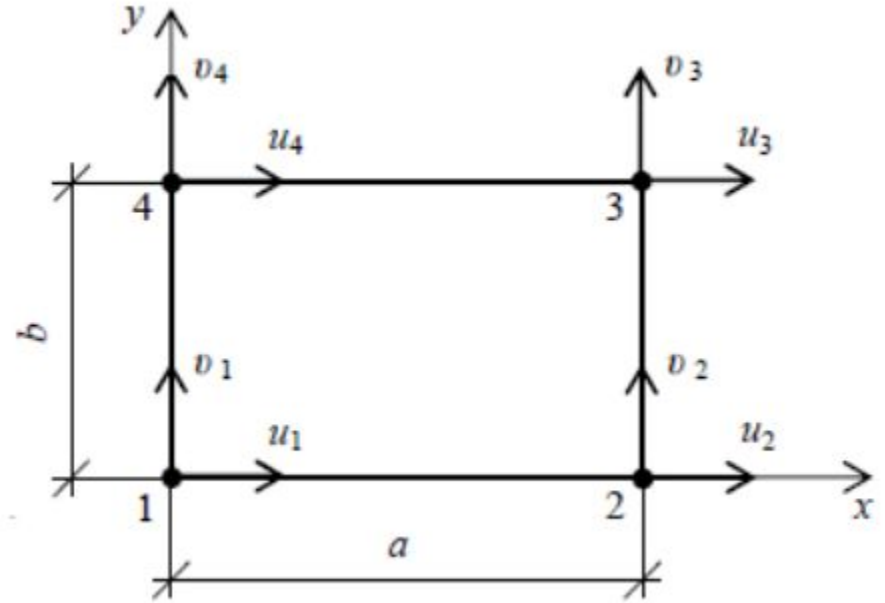
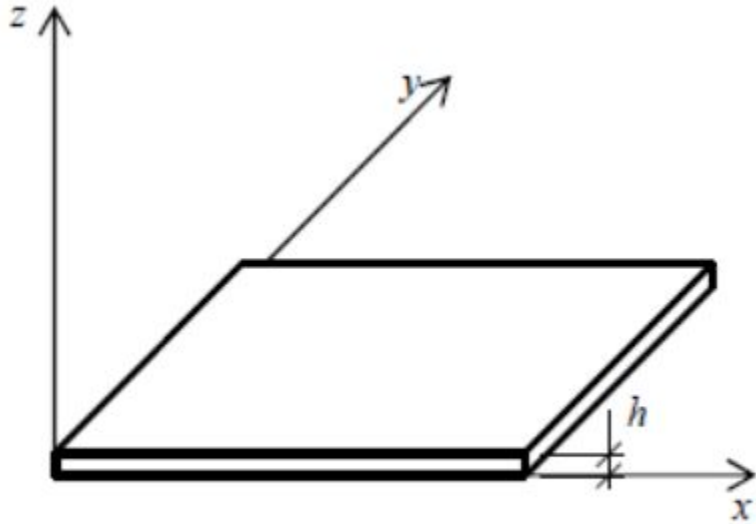
Использование современных программных комплексов в расчете строительных конструкций

*Яваров Александр
Валерьевич, к.
т.н.,
доцент СПбПУ (Политех)*

Санкт-Петербург

2017 г.

Плоская деформация. Прямоугольный конечный элемент



$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy; \quad v(x, y) = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy.$$

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 xy + \alpha_4 y - 0.5\alpha_7 y^2; \quad v(x, y) = \alpha_5 + \alpha_6 y + \alpha_7 xy + \alpha_8 x - 0.5\alpha_3 x^2.$$

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad \alpha_7 \quad \alpha_8\}^T$$

Функции формы

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad \alpha_7 \quad \alpha_8\}^T$$

$$q^e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} = C a.$$

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = Nq.$$

$$N_1 = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right); \quad N_2 = \frac{x}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right); \quad N_3 = \frac{xy}{ab}; \quad N_4 = \frac{y}{b} \left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

$$B = AN = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}.$$

$$B = \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} y-b & 0 & b-y & 0 & y & 0 & -y & 0 \\ 0 & x-a & 0 & -x & 0 & x & 0 & a-x \\ x-a & y-b & -x & b-y & x & y & a-x & -y \end{bmatrix}$$

Матрица жесткости КЭ определяется следующим выражением:

$$K^e = h \int_{\Omega^e} B^T E B d\Omega .$$

Здесь: \mathbf{B} – матрица, элементы которой получены путем дифференцирования функции формы (матрица градиентов функций формы);

\mathbf{E} – матрица упругих постоянных для изотропного материала (матрица упругости).

$$E = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Элементы матрицы жесткости вычисляются по формуле:

$$k_{ij} = h \int_0^a \int_0^b (EB_i)^T B_j dx dy.$$

Матрица жесткости прямоугольно КЭ будет иметь вид:

$$K := \frac{E \cdot h}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} \frac{2 \cdot b^2 + a^2 - a^2 \cdot \nu}{6 \cdot a \cdot b} & \frac{1 + \nu}{8} & \frac{a^2 - a^2 \cdot \nu - 4 \cdot b^2}{12 \cdot a \cdot b} & \frac{3 \cdot \nu - 1}{8} & \frac{a^2 \cdot \nu - a^2 - 2 \cdot b^2}{12 \cdot a \cdot b} & -\left(\frac{1 + \nu}{8}\right) & \frac{b^2 + a^2 \cdot \nu - a^2}{6 \cdot a \cdot b} & \frac{1 - 3 \cdot \nu}{8} \\ \frac{1 + \nu}{8} & \frac{2 \cdot a^2 + b^2 - b^2 \cdot \nu}{6 \cdot a \cdot b} & \frac{1 - 3 \cdot \nu}{8} & \frac{b^2 \cdot \nu + a^2 - b^2}{6 \cdot a \cdot b} & -\left(\frac{1 + \nu}{8}\right) & \frac{b^2 \cdot \nu - 2a^2 - b^2}{12 \cdot a \cdot b} & \frac{3 \cdot \nu - 1}{8} & \frac{b^2 - 4a^2 - b^2 \cdot \nu}{12 \cdot a \cdot b} \\ \frac{a^2 - a^2 \cdot \nu - 4 \cdot b^2}{12 \cdot a \cdot b} & \frac{1 - 3 \cdot \nu}{8} & \frac{2 \cdot b^2 + a^2 - a^2 \cdot \nu}{6 \cdot a \cdot b} & -\left(\frac{1 + \nu}{8}\right) & \frac{b^2 + a^2 \cdot \nu - a^2}{6 \cdot a \cdot b} & \frac{3 \cdot \nu - 1}{8} & \frac{a^2 \cdot \nu - a^2 - 2 \cdot b^2}{12 \cdot a \cdot b} & \frac{1 + \nu}{8} \\ \frac{3 \cdot \nu - 1}{8} & \frac{b^2 \cdot \nu + a^2 - b^2}{6 \cdot a \cdot b} & -\left(\frac{1 + \nu}{8}\right) & \frac{2 \cdot a^2 + b^2 - b^2 \cdot \nu}{6 \cdot a \cdot b} & \frac{1 - 3 \cdot \nu}{8} & \frac{b^2 - 4a^2 - b^2 \cdot \nu}{12 \cdot a \cdot b} & \frac{1 + \nu}{8} & \frac{b^2 \cdot \nu - 2a^2 - b^2}{12 \cdot a \cdot b} \\ \frac{a^2 \cdot \nu - a^2 - 2 \cdot b^2}{12 \cdot a \cdot b} & -\left(\frac{1 + \nu}{8}\right) & \frac{b^2 + a^2 \cdot \nu - a^2}{6 \cdot a \cdot b} & \frac{1 - 3 \cdot \nu}{8} & \frac{2 \cdot b^2 + a^2 - a^2 \cdot \nu}{6 \cdot a \cdot b} & \frac{1 + \nu}{8} & \frac{a^2 - a^2 \cdot \nu - 4 \cdot b^2}{12 \cdot a \cdot b} & \frac{3 \cdot \nu - 1}{8} \\ -\left(\frac{1 + \nu}{8}\right) & \frac{b^2 \cdot \nu - 2a^2 - b^2}{12 \cdot a \cdot b} & \frac{3 \cdot \nu - 1}{8} & \frac{b^2 - 4a^2 - b^2 \cdot \nu}{12 \cdot a \cdot b} & \frac{1 + \nu}{8} & \frac{2 \cdot a^2 + b^2 - b^2 \cdot \nu}{6 \cdot a \cdot b} & \frac{1 - 3 \cdot \nu}{8} & \frac{b^2 \cdot \nu + a^2 - b^2}{6 \cdot a \cdot b} \\ \frac{b^2 + a^2 \cdot \nu - a^2}{6 \cdot a \cdot b} & \frac{3 \cdot \nu - 1}{8} & \frac{a^2 \cdot \nu - a^2 - 2 \cdot b^2}{12 \cdot a \cdot b} & \frac{1 + \nu}{8} & \frac{a^2 - a^2 \cdot \nu - 4 \cdot b^2}{12 \cdot a \cdot b} & \frac{1 - 3 \cdot \nu}{8} & \frac{2 \cdot b^2 + a^2 - a^2 \cdot \nu}{6 \cdot a \cdot b} & -\left(\frac{1 + \nu}{8}\right) \\ \frac{1 - 3 \cdot \nu}{8} & \frac{b^2 - 4a^2 - b^2 \cdot \nu}{12 \cdot a \cdot b} & \frac{1 + \nu}{8} & \frac{b^2 \cdot \nu - 2a^2 - b^2}{12 \cdot a \cdot b} & \frac{3 \cdot \nu - 1}{8} & \frac{b^2 \cdot \nu + a^2 - b^2}{6 \cdot a \cdot b} & -\left(\frac{1 + \nu}{8}\right) & \frac{2 \cdot a^2 + b^2 - b^2 \cdot \nu}{6 \cdot a \cdot b} \end{bmatrix}$$

Введем следующие обозначения:

$$k = \frac{Eh}{1-\nu^2}; \quad \mu = \frac{1-\nu}{2}; \quad c = \frac{a}{6b}; \quad d = \frac{b}{6a}; \quad d_\mu = d\mu; \quad c_\mu = c\mu; \quad s = \frac{\nu}{4}; \quad t = \frac{\mu}{4}.$$

Тогда матрица жесткости примет вид:

$$K := k \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot (d + c\mu) & s + t & c\mu - 2 \cdot d & s - t & -d - c\mu & -s - t & d - 2 \cdot c\mu & t - s \\ s + t & 2 \cdot (c + d\mu) & t - s & c - 2 \cdot d\mu & -s - t & -c - d\mu & s - t & d\mu - 2 \cdot c \\ c\mu - 2 \cdot d & t - s & 2 \cdot (d + c\mu) & -s - t & d - 2 \cdot c\mu & s - t & -d - c\mu & s + t \\ s - t & c - 2 \cdot d\mu & -s - t & 2 \cdot (c + d\mu) & t - s & d\mu - 2 \cdot c & s + t & -c - d\mu \\ -d - c\mu & -s - t & d - 2 \cdot c\mu & t - s & 2 \cdot (d + c\mu) & s + t & c\mu - 2 \cdot d & s - t \\ -s - t & -c - d\mu & s - t & d\mu - 2 \cdot c & s + t & 2 \cdot (c + d\mu) & t - s & c - 2 \cdot d\mu \\ d - 2 \cdot c\mu & s - t & -d - c\mu & s + t & c\mu - 2 \cdot d & t - s & 2 \cdot (d + c\mu) & -s - t \\ t - s & d\mu - 2 \cdot c & s + t & -c - d\mu & s - t & c - 2 \cdot d\mu & -s - t & 2 \cdot (c + d\mu) \end{bmatrix}$$

Спасибо за внимание!