ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
Политехнический Университет
Петра Великого

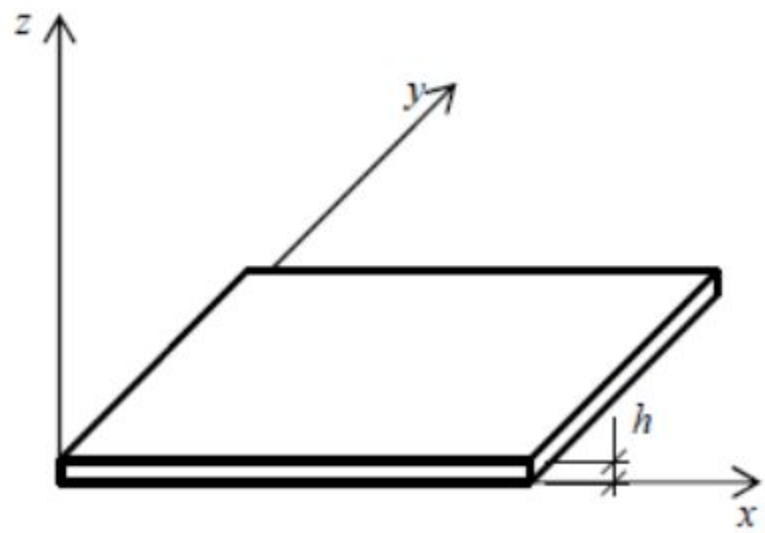
Использование современных программных комплексов в расчете строительных конструкций

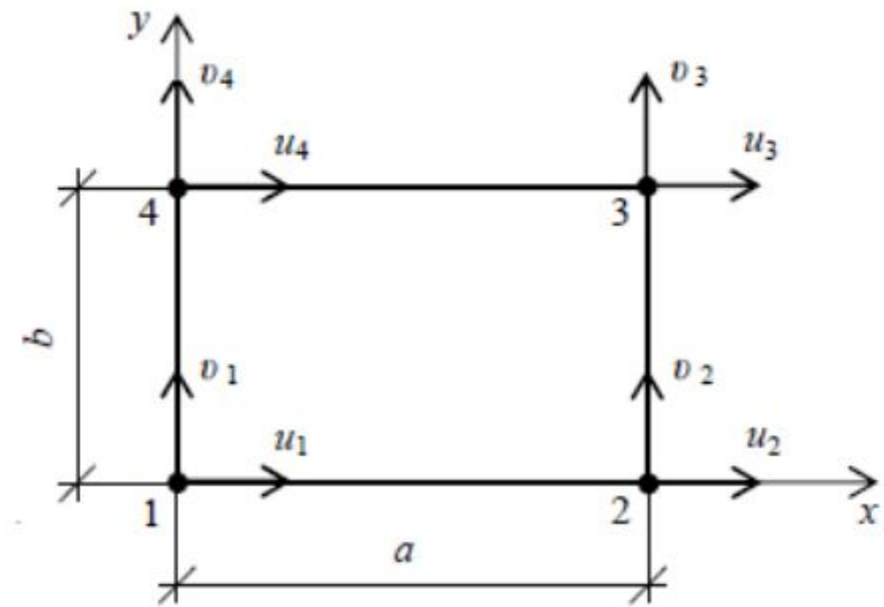
Яваров Александр Валерьевич, к. т.н., доцент СПбПУ (Политех)

Санкт-Петербург

2017 г.

Плоская деформация. Прямоугольный конечный элемент





$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy; \quad \upsilon(x,y) = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy.$$

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 xy + \alpha_4 y - 0.5\alpha_7 y^2; \; \upsilon(x,y) = \alpha_5 + \alpha_6 y + \alpha_7 xy + \alpha_8 x - 0.5\alpha_3 x^2.$$

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad \alpha_7 \quad \alpha_8\}^T$$

Функции формы

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad \alpha_7 \quad \alpha_8\}^T$$

$$\boldsymbol{q}^{\mathrm{e}} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ \upsilon_1 \\ u_2 \\ \upsilon_2 \\ u_3 \\ \upsilon_3 \\ u_4 \\ \upsilon_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{\alpha}.$$

$$u=\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}=Nq.$$

$$N_1=\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right);\ N_2=\frac{x}{a}\left(1-\frac{y}{b}\right);\ N_3=\frac{x}{a}\frac{y}{b};\ N_2=\frac{y}{b}\left(1-\frac{x}{a}\right).$$

$$B=AN=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}.$$

$$B=\frac{1}{ab}\begin{bmatrix} y-b & 0 & b-y & 0 & y & 0 & -y & 0 \\ 0 & x-a & 0 & -x & 0 & x & 0 & a-x \\ x-a & y-b & -x & b-y & x & y & a-x & -y \end{bmatrix}$$

Матрица жесткости КЭ определяется следующим выражением:

$$K^e = h\int_{\Omega^e} B^T E B d\Omega .$$

Здесь: ***B*** – матрица, элементы которой получены путем дифференцирования функции формы (матрица градиентов функций формы);

E – матрица упругих постоянных для изотропного материала (матрица упругости).

$$E=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Элементы матрицы жесткости вычисляются по формуле:

$$k_{ij} = h\int_0^a\int_0^b (EB_i)^T B_j dxdy.$$

Матрица жесткости прямоугольно КЭ будет иметь вид:

$$K := \frac{E\cdot h}{1-\nu^2}\cdot\begin{bmatrix}
\frac{2\cdot b^2+a^2-a^2\cdot\nu}{6\cdot a\cdot b} & \frac{1+\nu}{8} & \frac{a^2-a^2\cdot\nu-4\cdot b^2}{12\cdot a\cdot b} & \frac{3\cdot\nu-1}{8} & \frac{a^2\cdot\nu-a^2-2\cdot b^2}{12\cdot a\cdot b} & -\left(\frac{1+\nu}{8}\right) & \frac{b^2+a^2\cdot\nu-a^2}{6\cdot a\cdot b} & \frac{1-3\cdot\nu}{8} \\
\frac{1+\nu}{8} & \frac{2\cdot a^2+b^2-b^2\cdot\nu}{6\cdot a\cdot b} & \frac{1-3\cdot\nu}{8} & \frac{b^2\cdot\nu+a^2-b^2}{6\cdot a\cdot b} & -\left(\frac{1+\nu}{8}\right) & \frac{b^2\cdot\nu-2a^2-b^2}{12\cdot a\cdot b} & \frac{3\cdot\nu-1}{8} & \frac{b^2-4\cdot a^2-b^2\cdot\nu}{12\cdot a\cdot b} \\
\frac{a^2-a^2\cdot\nu-4\cdot b^2}{12\cdot a\cdot b} & \frac{1-3\cdot\nu}{8} & \frac{2\cdot b^2+a^2-a^2\cdot\nu}{6\cdot a\cdot b} & -\left(\frac{1+\nu}{8}\right) & \frac{b^2+a^2\cdot\nu-a^2}{6\cdot a\cdot b} & \frac{3\cdot\nu-1}{8} & \frac{a^2\cdot\nu-a^2-2\cdot b^2}{12\cdot a\cdot b} & \frac{1+\nu}{8} \\
\frac{3\cdot\nu-1}{8} & \frac{b^2\cdot\nu+a^2-b^2}{6\cdot a\cdot b} & -\left(\frac{1+\nu}{8}\right) & \frac{2\cdot a^2+b^2-b^2\cdot\nu}{6\cdot a\cdot b} & \frac{1-3\cdot\nu}{8} & \frac{b^2-4\cdot a^2-b^2\cdot\nu}{12\cdot a\cdot b} & \frac{1+\nu}{8} & \frac{b^2\cdot\nu-2a^2-b^2}{12\cdot a\cdot b} \\
\frac{a^2\cdot\nu-a^2-2\cdot b^2}{12\cdot a\cdot b} & -\left(\frac{1+\nu}{8}\right) & \frac{b^2+a^2\cdot\nu-a^2}{6\cdot a\cdot b} & \frac{1-3\cdot\nu}{8} & \frac{2\cdot b^2+a^2-a^2\cdot\nu}{6\cdot a\cdot b} & \frac{1+\nu}{8} & \frac{a^2-a^2\cdot\nu-4\cdot b^2}{12\cdot a\cdot b} & \frac{3\cdot\nu-1}{8} \\
-\left(\frac{1+\nu}{8}\right) & \frac{b^2\cdot\nu-2a^2-b^2}{12\cdot a\cdot b} & \frac{3\cdot\nu-1}{8} & \frac{b^2-4\cdot a^2-b^2\cdot\nu}{12\cdot a\cdot b} & \frac{1+\nu}{8} & \frac{2\cdot a^2+b^2-b^2\cdot\nu}{6\cdot a\cdot b} & \frac{1-3\cdot\nu}{8} & \frac{b^2\cdot\nu+a^2-b^2}{6\cdot a\cdot b} \\
\frac{b^2+a^2\cdot\nu-a^2}{6\cdot a\cdot b} & \frac{3\cdot\nu-1}{8} & \frac{a^2\cdot\nu-a^2-2\cdot b^2}{12\cdot a\cdot b} & \frac{1+\nu}{8} & \frac{a^2-a^2\cdot\nu-4\cdot b^2}{12\cdot a\cdot b} & \frac{1-3\cdot\nu}{8} & \frac{2\cdot b^2+a^2-a^2\cdot\nu}{6\cdot a\cdot b} & -\left(\frac{1+\nu}{8}\right) \\
\frac{1-3\cdot\nu}{8} & \frac{b^2-4\cdot a^2-b^2\cdot\nu}{12\cdot a\cdot b} & \frac{1+\nu}{8} & \frac{b^2\cdot\nu-2a^2-b^2}{12\cdot a\cdot b} & \frac{3\cdot\nu-1}{8} & \frac{b^2\cdot\nu+a^2-b^2}{6\cdot a\cdot b} & -\left(\frac{1+\nu}{8}\right) & \frac{2\cdot a^2+b^2-b^2\cdot\nu}{6\cdot a\cdot b}
\end{bmatrix}$$

Введем следующие обозначения:

$$k = \frac{Eh}{1-\nu^2};\; \mu = \frac{1-\nu}{2};\; c = \frac{a}{6b};\; d = \frac{b}{6a};\; d_\mu = d\mu;\; c_\mu = c\mu;\; s = \frac{\nu}{4};\; t = \frac{\mu}{4}.$$

Тогда матрица жесткости примет вид:

$$K := k\cdot\begin{bmatrix} 2\cdot(d + c\mu) & s + t & c\mu - 2\cdot d & s - t & -d - c\mu & -s - t & d - 2\cdot c\mu & t - s \\ s + t & 2\cdot(c + d\mu) & t - s & c - 2\cdot d\mu & -s - t & -c - d\mu & s - t & d\mu - 2\cdot c \\ c\mu - 2\cdot d & t - s & 2\cdot(d + c\mu) & -s - t & d - 2\cdot c\mu & s - t & -d - c\mu & s + t \\ s - t & c - 2\cdot d\mu & -s - t & 2\cdot(c + d\mu) & t - s & d\mu - 2\cdot c & s + t & -c - d\mu \\ -d - c\mu & -s - t & d - 2\cdot c\mu & t - s & 2\cdot(d + c\mu) & s + t & c\mu - 2\cdot d & s - t \\ -s - t & -c - d\mu & s - t & d\mu - 2\cdot c & s + t & 2\cdot(c + d\mu) & t - s & c - 2\cdot d\mu \\ d - 2\cdot c\mu & s - t & -d - c\mu & s + t & c\mu - 2\cdot d & t - s & 2\cdot(d + c\mu) & -s - t \\ t - s & d\mu - 2\cdot c & s + t & -c - d\mu & s - t & c - 2\cdot d\mu & -s - t & 2\cdot(c + d\mu) \end{bmatrix}$$

Спасибо за внимание!