Модуль 1

Теория множеств и бинарные отношения

Занятие 1.3. Функции и операции

2020 г.

Содержание

Связи между понятиями

Декартово произведение

- Бинарное отношение
- Функция
- Операция

Бинарное отношение

Бинарным отношением ***T(M)*** **на множестве *M* называется подмножество** $M^2 = M \times M$ **,**

$T(M) \subseteq M^2$

Инфиксная форма записи бинарного отношения

a T b $= \{(a,b) / (a,b) \in T \subseteq M \times M\}$

Виды бинарных отношений

Обратное отношение

$$R^{-1} = \{(x, y) / (y, x) \in R\}$$

Дополнительное отношение

$$\overline{R} = \{(x, y) / (x, y) \notin R\}$$

Виды бинарных отношений

Тождественное отношение

$$U = \{(x, x) / x \in M\}$$

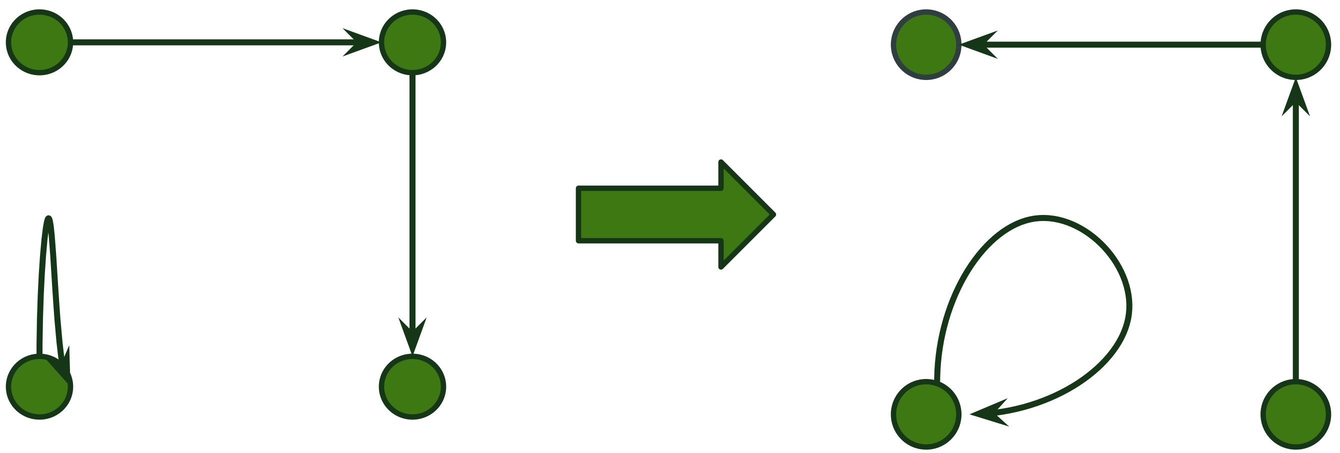
Универсальное отношение

$$I = \{(x, y) / x \in M \;\_\;\;\_\;\; \in \;\;\}$$

Обратное отношение

Обратное отношение

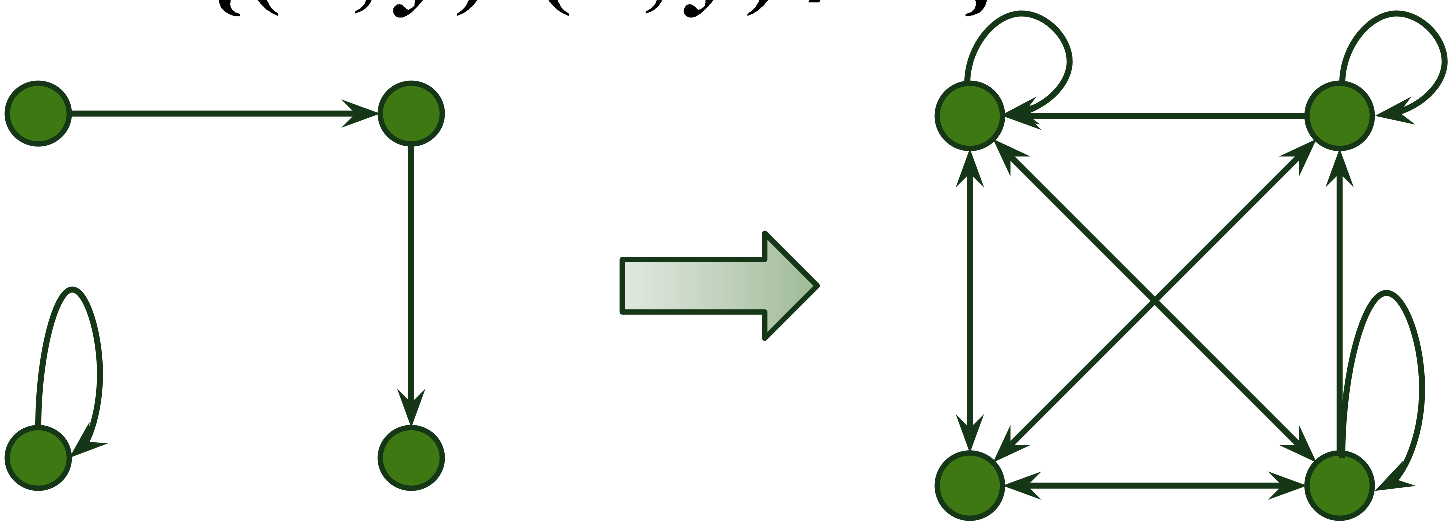
$$R^{-1} = \{(x, y) / (y, x) \in R\}$$



Дополнительное отношение

Дополнительное отношение

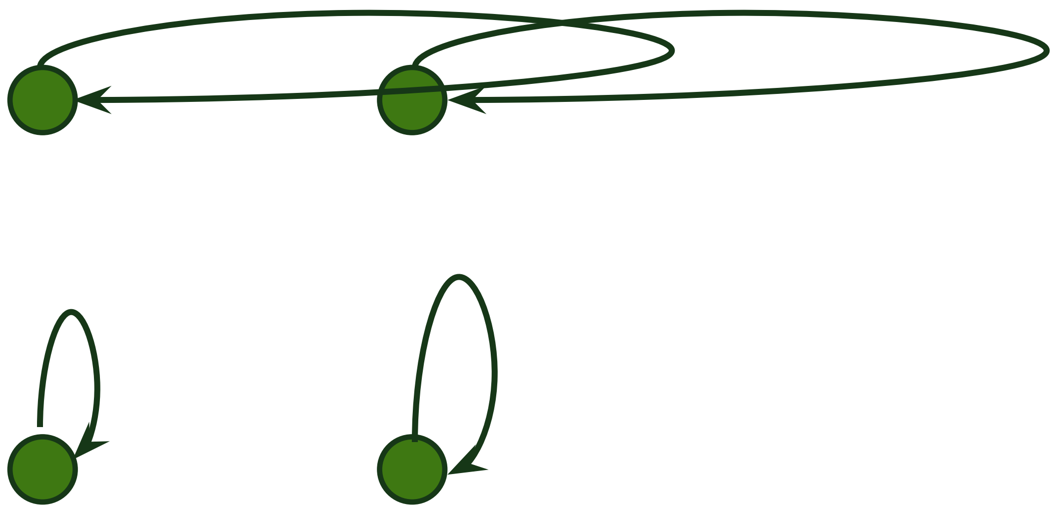
$$\overline{R} = \{(x, y) / (x, y) \notin R\}$$



Тождественное отношение

Тождественное отношение

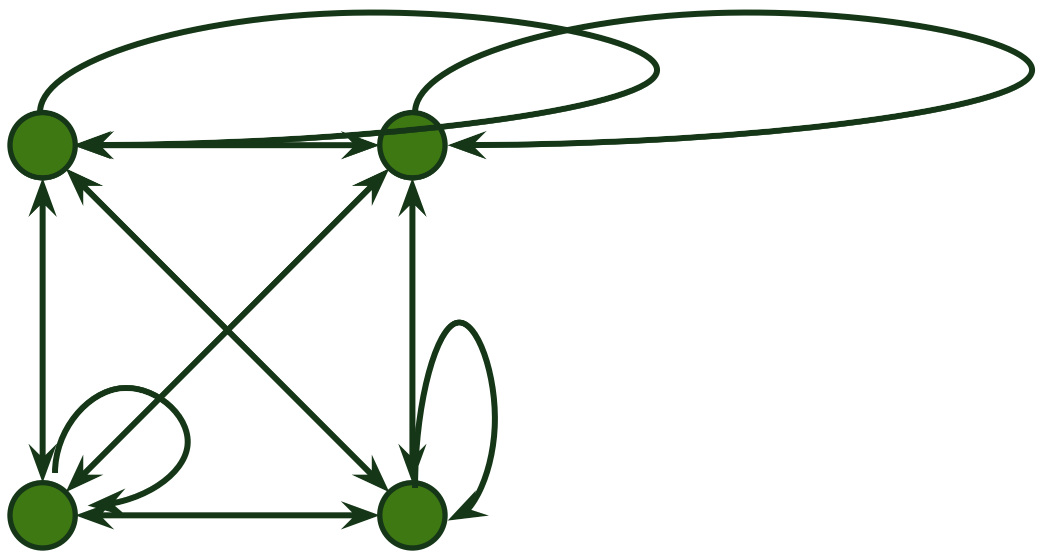
$$U = \{(x, x) / x \in M\}$$



Универсальное отношение

Универсальное отношение

$$U = \{(x,y) / x \in M \;\_\;\_\; \in \;\}$$



Функция

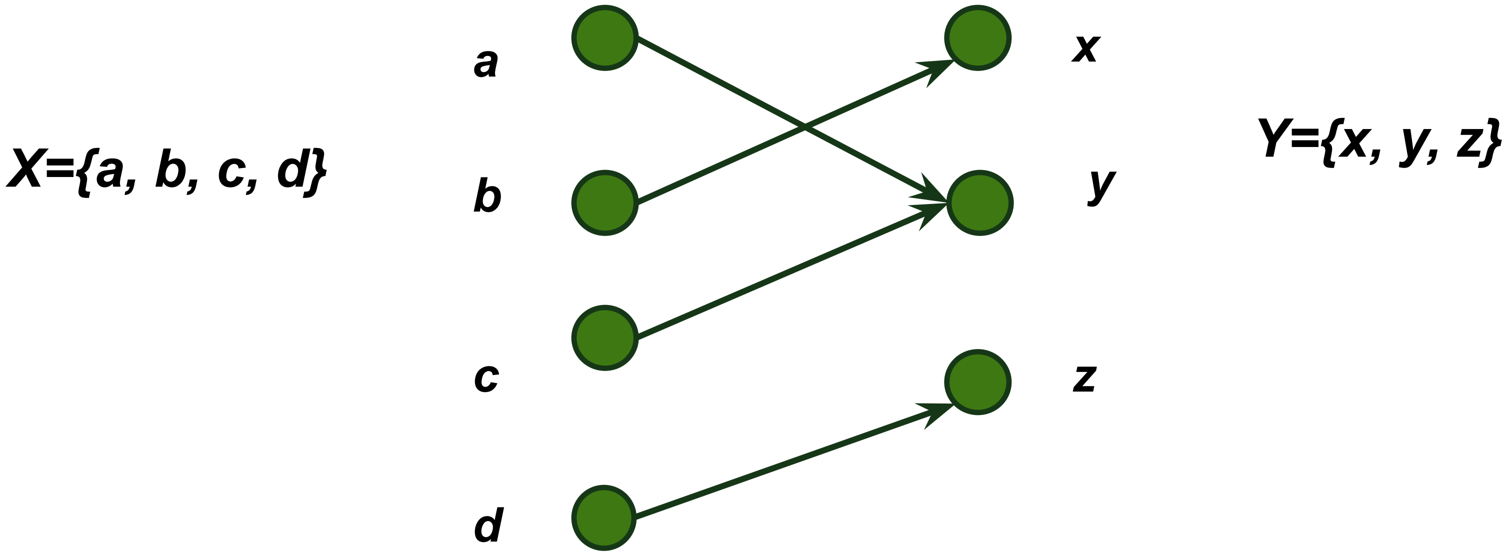
$F = X \times Y$ называется **функцией**, если для каждого элемента *x* найдется не более одного элемента *y* такого, что $(x, y) \in F$, т.е. выполняется свойство однозначности полученного результата

Множество *X* - **область определения функции**, и множество *Y* - **область значений функции**

X и *У* могут не иметь общих элементов

Построение функции

Даны множества *X={a, b, c, d}* и *Y={x, y, z}*. Построить функцию F: X=> Y таким образом, что $(a, x) \notin F$



Инъекция

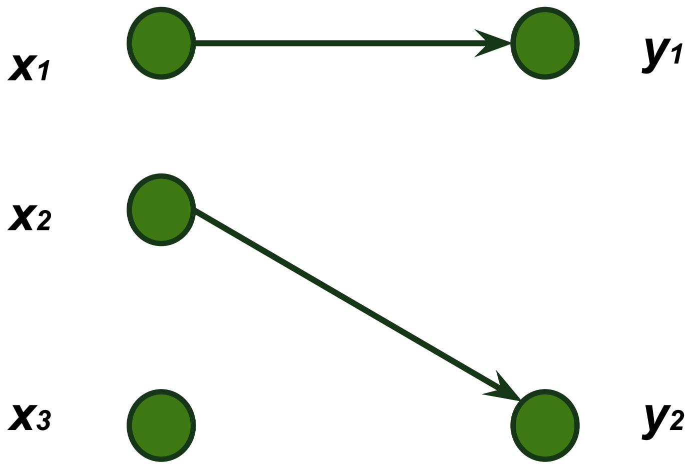
Функция *F: X* → *Y* называется *инъективной (инъекцией или вложением)*, если она переводит разные элементы *X* в разные *У*, то есть

$$\forall x \in X, \forall z \in X, \; x \neq z \rightarrow F(x) \neq F(z)$$

Построение инъекции

Даны множества *X={x1, x2, x3}* *Y={y1, y2}*. Построить инъекцию *F: X →Y*

$X=\{x1, x2, x3\}$



$Y=\{y1, y2\}$

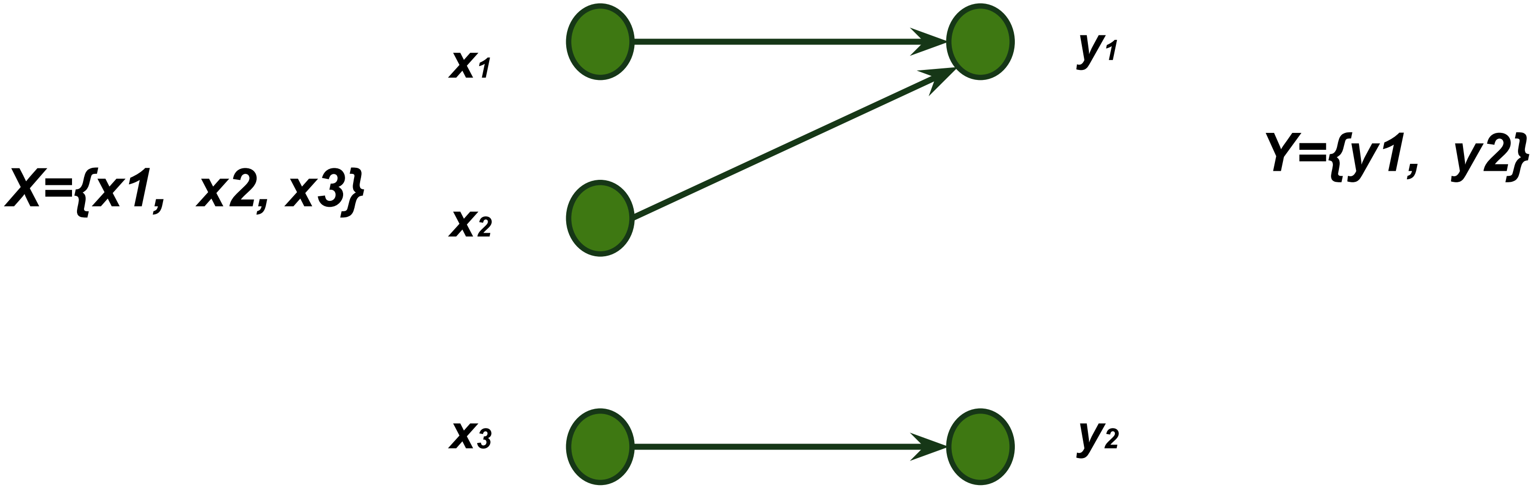
Сюръекция

Функция *F: X* → *Y* называется сюръективной (сюръекцией или наложением), если множество ее значений есть все *Y*, т.е.

$$\forall y \in Y \_ \exists x \in X, \_ y = F(x)$$

Построение сюръекции

Даны множества $X=\{x1, x2, x3\}$ и $Y=\{y1, y2\}$. Построить сюрьекцию $F: X \rightarrow Y$



Биекция

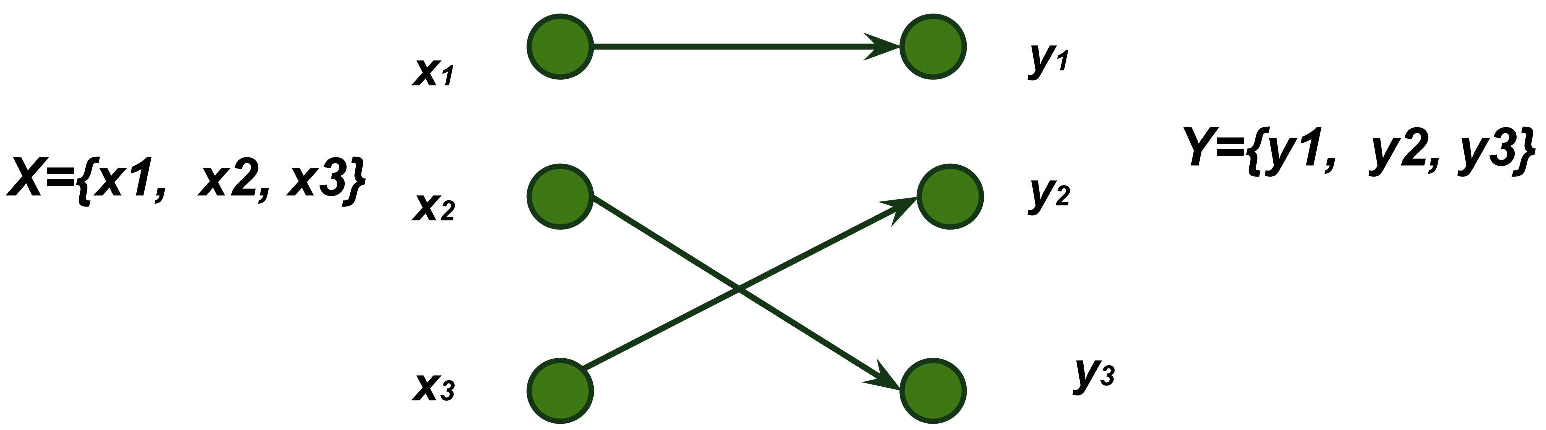
Функция *F: X →Y* называется **биекцией или взаимно однозначным соответствием**, если она одновременно является инъекцией и сюръекцией (вложением и наложением), т.е.

$$\forall x \in X \; \_ \; \forall z \in X, \; x \neq z \rightarrow F(x) \neq F(z)$$

$$\forall y \in Y \; \_ \; \exists x \in X, \; \_ \; y = F(x)$$

Построение биекции

Даны множества $X=\{x1, x2, x3\}$ **и** $Y=\{y1, y2\}$. **Построить биекцию** $F: X \to Y$



Операция

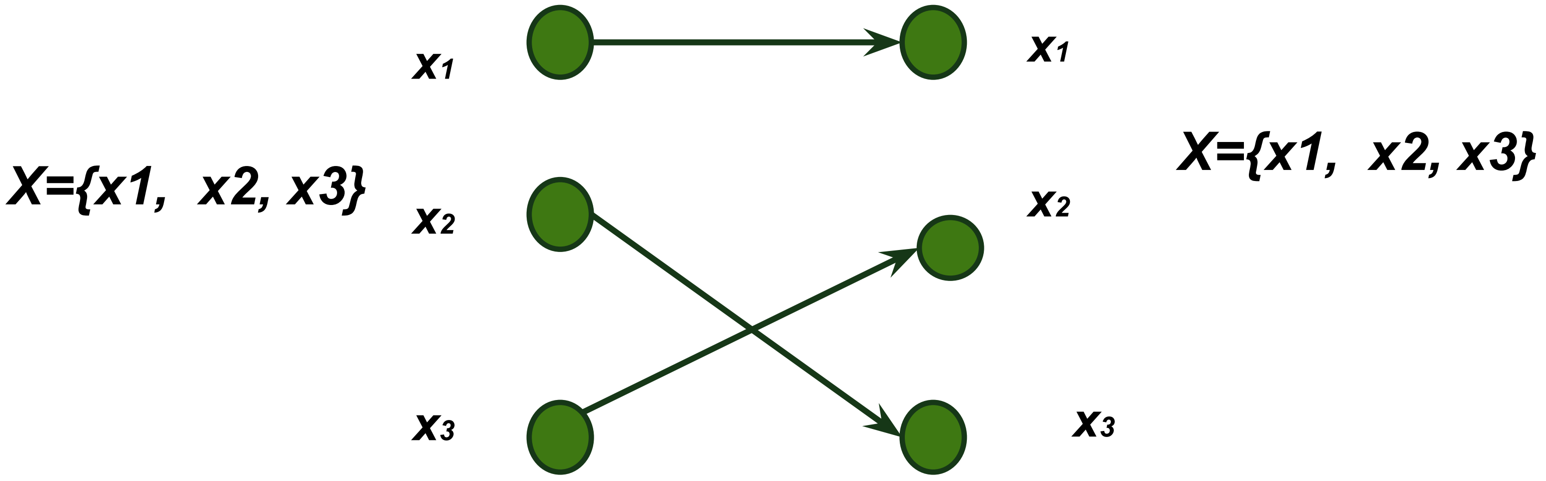
Частным случаем функции является **операция** *O*

В этом случае область значения *X* и область определения *У* совпадают, т. е

$$O \subseteq M^2, \forall x \in M \exists!\, y, (x, y) \in O$$

Операция

Дано множество *X={x1, x2, x3}*.
Построить операцию *F: X →X*



Решение задач

Дано множество натуральных чисел *N*. Укажите, какие из арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление) всегда выполнимы на этом множестве?

Решение задач

Дано множество натуральных чисел *N*. Укажите, какие из арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление) всегда выполнимы на этом множестве?

Решение

сложение

умножение

Результат операций должен принадлежать множеству натуральных чисел *N*

Решение задач

На множестве натуральных чисел задана *О* операция. Какой может быть эта операция?

а) $a \ O \ b = a^b$;

б) $a \ O \ b = a + b$;

в) $a \ O \ b = a - b$.

Решение задач

На множестве натуральных чисел задана *О* операция. Какой может быть эта операция?

а) $a \mathbin{O} b = a^b$;

б) $a \mathbin{O} b = a + b$;

в) $a \mathbin{O} b = a - b$.

Решение

возведение в степень

сложение

Результат операций должен принадлежать множеству натуральных чисел *N*

Решение задач

На множестве рациональных чисел задана *О* операция . Какой может быть эта операция?

а) *a* *O* *b* = *a* ^ *b*;

б) *a* *O* *b* = *a* + *b*;

в) *a* *O* *b* = *a* – *b*;

Решение задач

На множестве рациональных чисел задана *О* операция . Какой может быть эта операция?

а) $a\ O\ b = a \wedge b$;

б) $a\ O\ b = a + b$;

в) $a\ O\ b = a - b$;

Решение

сложение

вычитание

Результат операций должен принадлежать множеству рациональных чисел *N*

Рефлексивность

Бинарное отношение *T(M)*, называется *рефлексивным* тогда и только тогда, когда для каждого элемента пара *(x, x)* принадлежит этому бинарному отношению, т.е.

$$\forall x \in M \_ \exists (x, x) \in T(M)$$

$$M \neq \varnothing, T \neq \varnothing$$

Иррефлексивность

Бинарное отношение *T(M)* называется *иррефлексивным* тогда и только тогда, когда для каждого элемента пара *(x, x)* не принадлежит этому бинарному отношению, т.е.

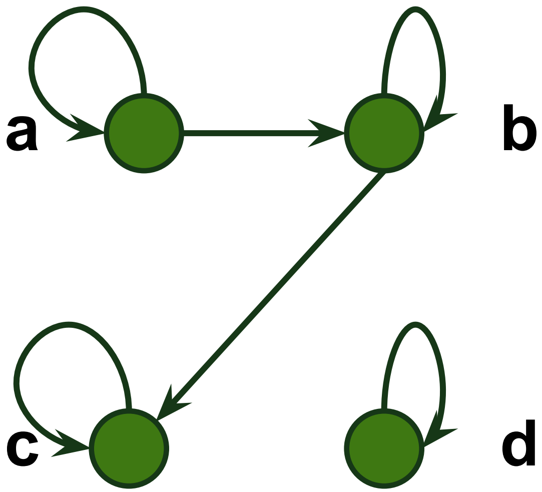
$$\forall x \in M \_(x, x) \notin T(M)$$

$$M \neq \varnothing, T \neq \varnothing$$

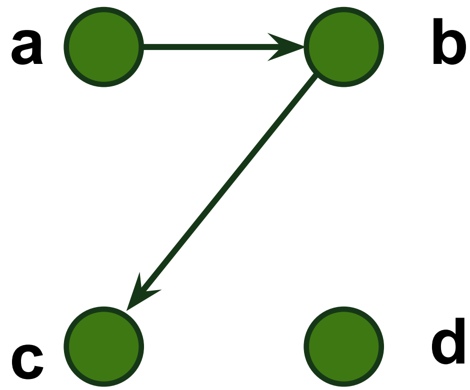
Нерефлексивность

Если бинарное отношение *T(M)* не обладает ни свойством рефлексивности, ни свойством иррефлексивности, то оно является *нерефлексивным*

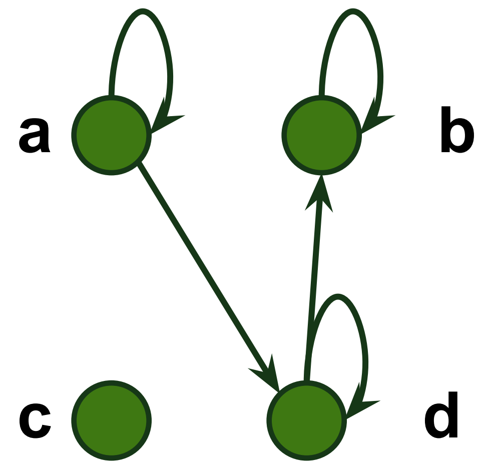
Примеры рефлексивности



рефлексивно



иррефлексивно



нерефлексивно

Симметричность

Бинарное отношение *T(M)* называется ***симметричным*** тогда и только тогда, когда для каждой пары различных элементов *(x, y*) и *x≠y* из *T*, обратная пара *(y, x)* также принадлежит этому бинарному отношению, т.е.

$$\forall (x, y) \in T(M) \_ \exists (y, x) \in T(M)$$

$$|M| > 1, T \neq \varnothing$$

Антисимметричность

Бинарное отношение Т(М) называется *антисимметричным* тогда и только тогда, когда для каждой пары различных элементов *(x, y)* и *x≠y* из *T,* пара *(y, x)* не принадлежит этому бинарному отношению, т.е.

$$\forall(x,y)\in T(M)\_(y,x)\notin T(M)$$

$$|M|>1, T\neq\varnothing$$

Другое определение антисимметричности

Бинарное отношение Т(М) называется

антисимметричным тогда и только

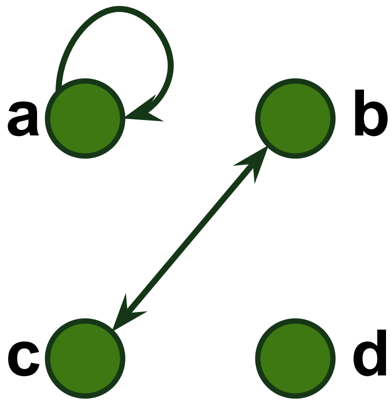
тогда, когда из того, что $(x, y) \in T(M)$

и $(y, x) \in T(M)$ следует, что $x = y$

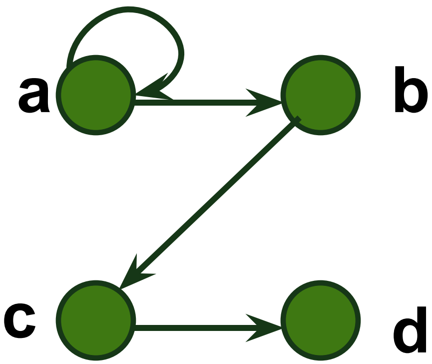
Несимметричность

Если бинарное отношение *T(M)* не обладает ни свойством симметричности, ни свойством антисимметричности, то оно является *несимметричным*

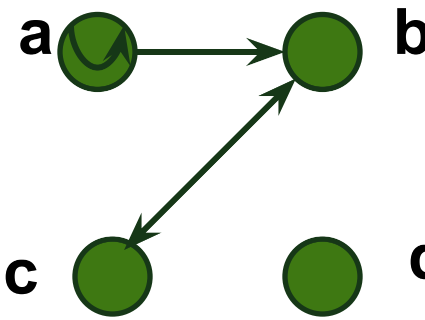
Примеры симметричности



симметрично



антисимметрично



несимметрично

Транзитивность

Бинарное отношение *T(M)* называется *транзитивным* тогда и только тогда, когда для каждых двух пар различных элементов *(x,y)* и *(y, z),* принадлежащих бинарному отношению, пара *(x, z)* также принадлежит этому бинарному отношению, т.е.

$$\forall(x,y),(y,z)\in T(M)\ \_\ \exists(x,z)\in T(M)$$

$$|M|>2,|T|>2$$

Интранзитивность

Бинарное отношение T(M) называется интранзитивным тогда и только тогда, когда для каждых двух пар различных элементов (x, y) и (y,z), принадлежащих бинарному отношению , пара (x, z) не принадлежит этому бинарному отношению, т.е.

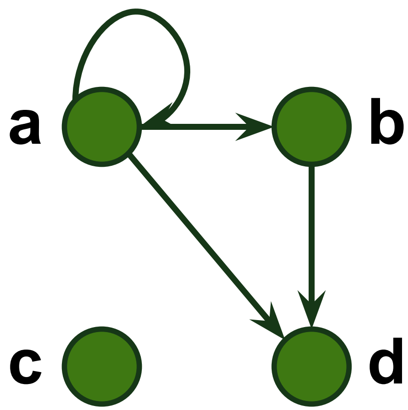
$$\forall(x,y),(y,z)\in T(M)\ \_\ \exists(x,z)\notin T(M)$$

$$|M|>2,|T|>2$$

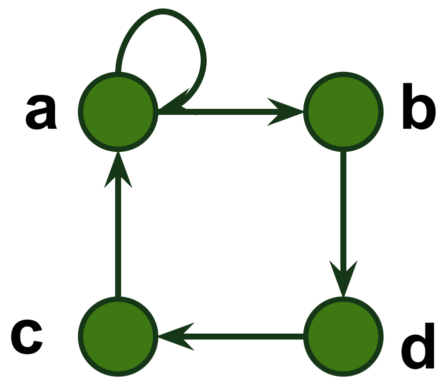
Нетранзитивность

Если бинарное отношение *T(M)* не обладает ни свойством транзитивности, ни свойством интранзитивности, то оно является *нетранзитивным*

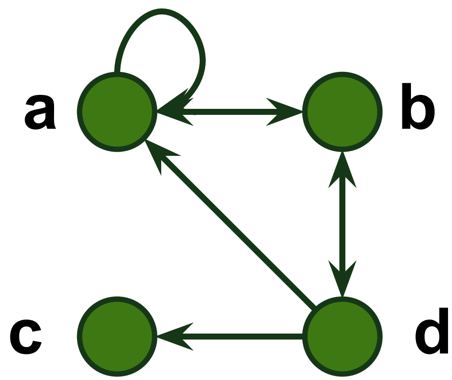
Примеры транзитивности



транзитивно

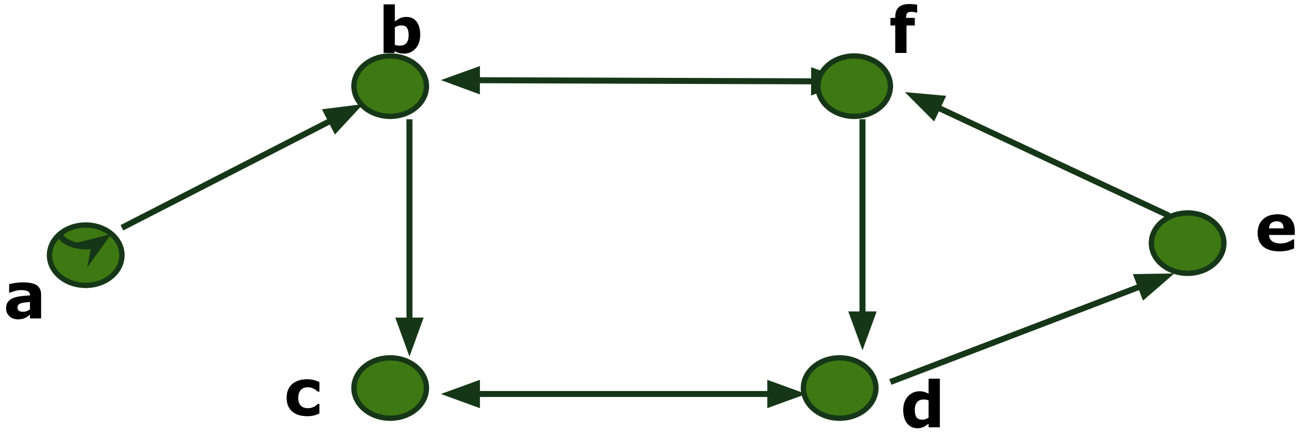


интранзитивно



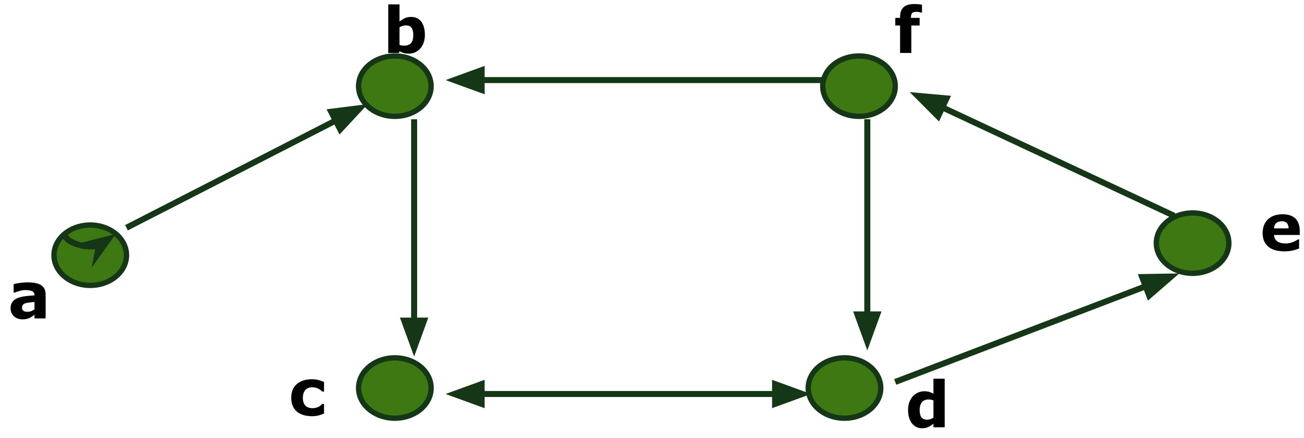
нетранзитивно

Определение свойств бинарных отношений



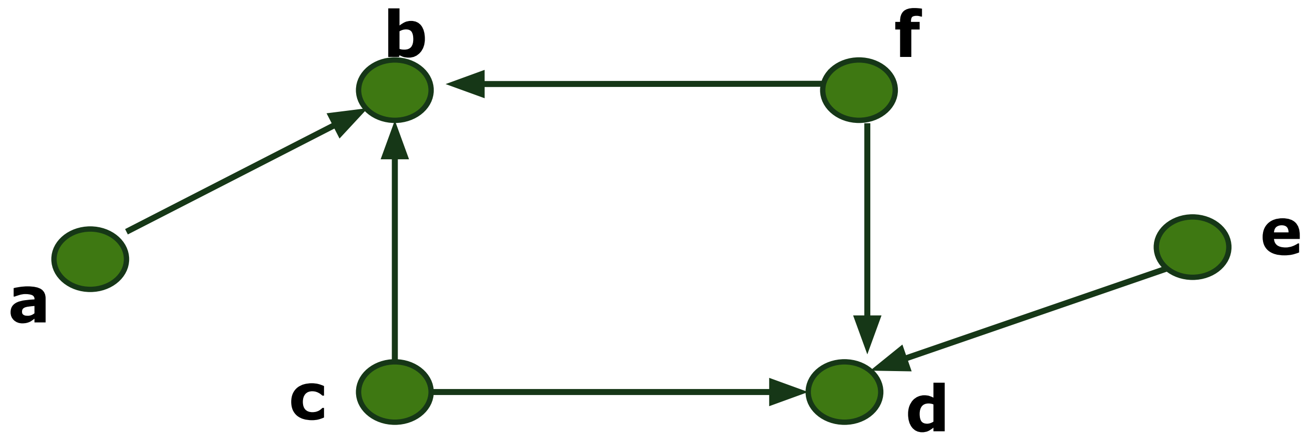
•

Определение свойств бинарных отношений

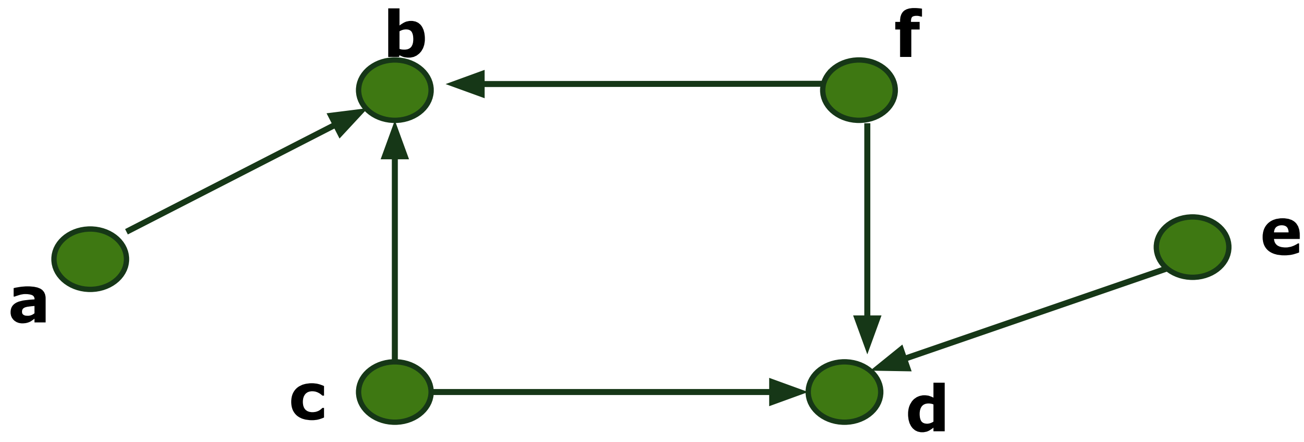


- *нерефлексивность* (*часть вершин имеет петли, часть –нет*)
- *несимметричность* (*есть симметричные и антисимметричные дуги*)
- *интранзитивность* (*бинарное отношение обладает несколькими путями длины 2, но нет ни одного транзитивного замыкания*)

Определение свойств бинарных отношений

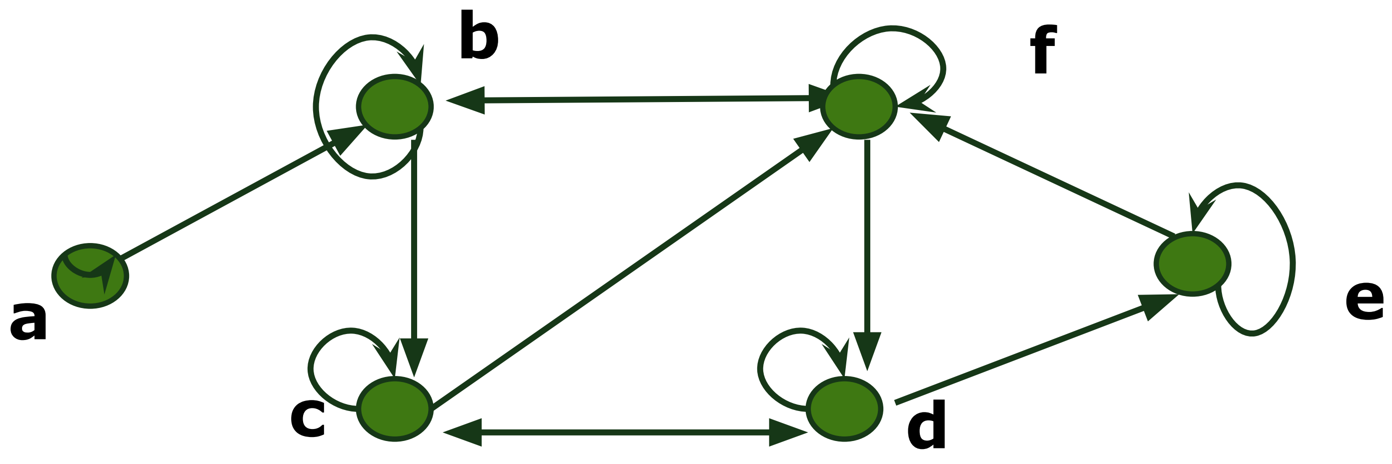


Определение свойств бинарных отношений

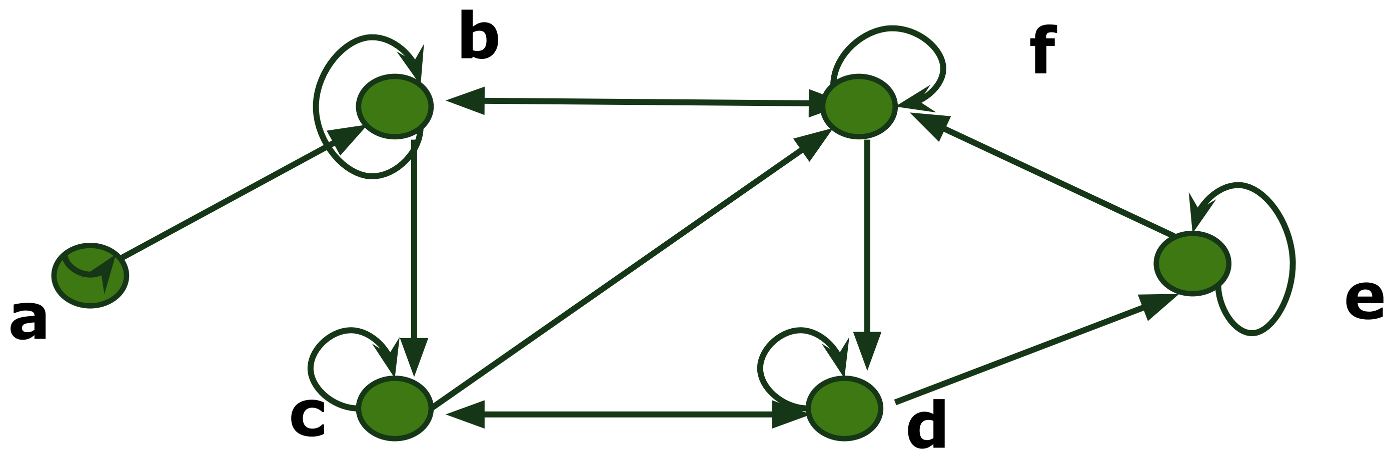


- *иррефлексивность* ***(нет ни одной петли)***
- *антисимметричность* ***(есть только антисимметричные дуги)***
- *нетранзитивность* ***(<u>нет ни одного пути длины 2!!!</u>)***

Определение свойств бинарных отношений



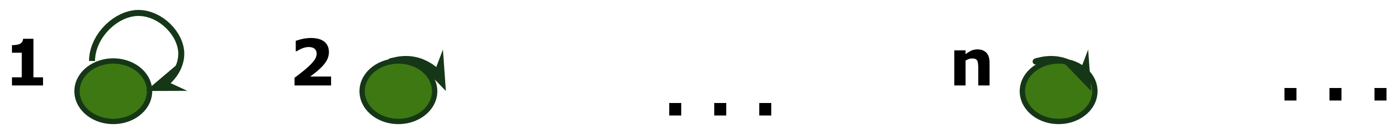
Определение свойств бинарных отношений



- рефлексивность (все вершины имеют петли)
- несимметричность (есть симметричные и антисимметричные дуги)
- нетранзитивность (есть пути длины 2 с транзитивными замыканиями, есть без транзитивных замыканий)

Определение свойств бинарных отношений

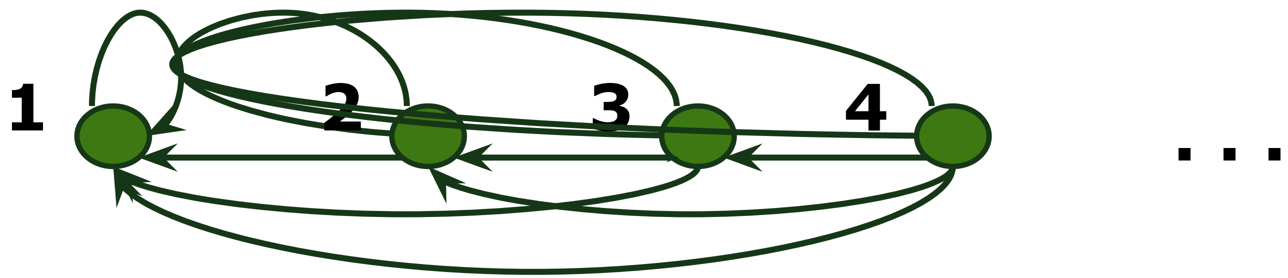
На множестве натуральных чисел задано отношение равенства (*a*=*b*). Какими свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) обладает это отношение?



- ***рефлексивность*** (***число равно а самому себе, а=а***)
- ***несимметричность*** (***<u>нет ни одной дуги между различными элементами а и b!!!</u>***)
- ***нетранзитивность*** (***<u>нет ни одного пути длины 2!!!</u>***)

Определение свойств бинарных отношений

. На множестве натуральных чисел задано отношение больше или равно ($a \geq b$). Какими свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) обладает это отношение?



- *рефлексивность* (*все вершины имеют петли*)
- *антисимметричность* (*есть только антисимметричные дуги*)
- *транзитивность* (*на все пути длины 2 есть транзитивные замыкания*)