

Модуль 1

Теория множеств и бинарные отношения

Занятие 1.3. Функции и операции

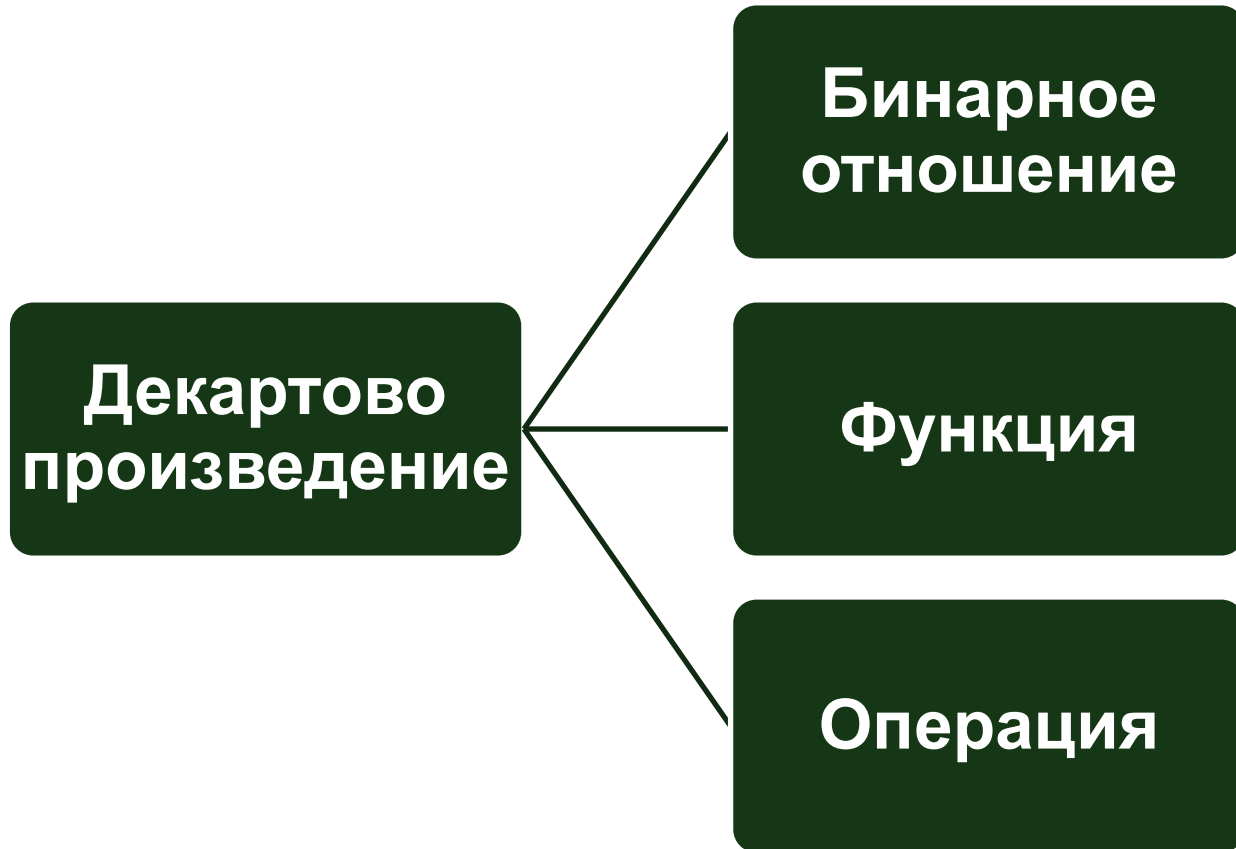


Содержание

- 1. Связи между понятиями**
- 2. Бинарное отношение**
- 3. Определение функции**
- 4. Виды функций**
- 5. Операции**
- 6. Построение функций**
- 7. Свойства бинарных отношений**



Связи между понятиями



Бинарное отношение

Бинарным отношением $T(M)$
на множестве M называется
подмножество $M^2 = M \times M$,

$$T(M) \subseteq M^2$$

Инфиксная форма записи
бинарного отношения

$$a T b \equiv \{(a, b) \mid (a, b) \in T \subseteq M \times M\}$$



Виды бинарных отношений

Обратное отношение

$$R^{-1} = \{(x, y) / (y, x) \in R\}$$

Дополнительное отношение

$$\bar{R} = \{(x, y) / (x, y) \notin R\}$$



Виды бинарных отношений

Тождественное отношение

$$U = \{(x, x) / x \in M\}$$

Универсальное отношение

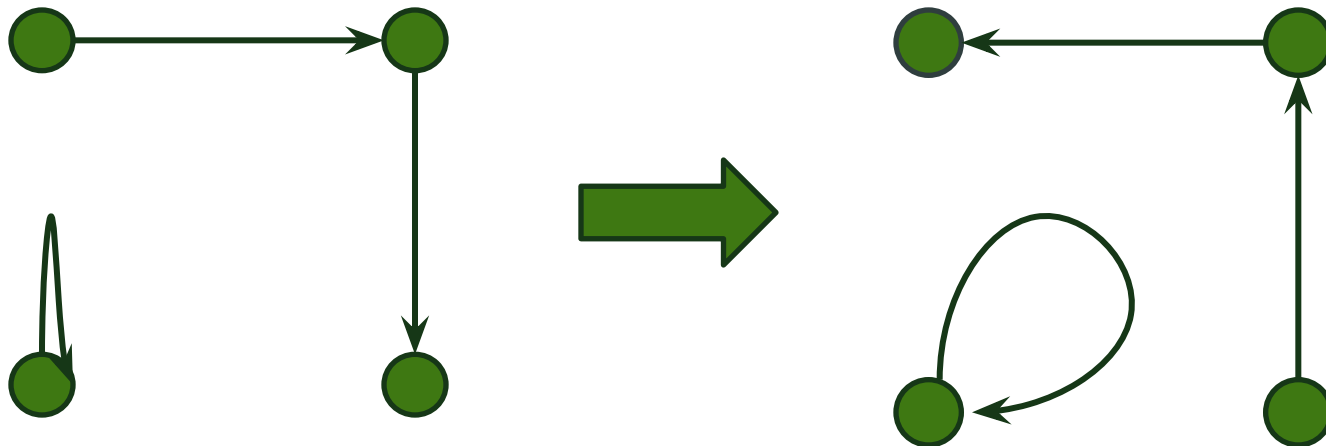
$$U = \{(x, M) / x \in M \text{ — } _ _ \in \}$$



Обратное отношение

Обратное отношение

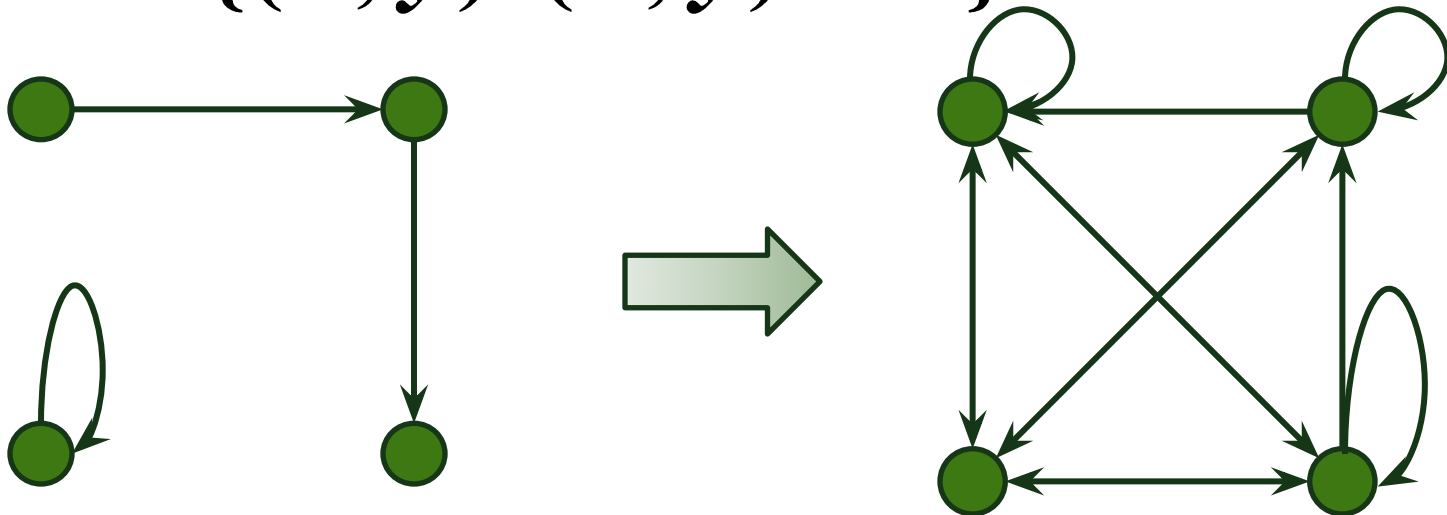
$$R^{-1} = \{(x, y) / (y, x) \in R\}$$



Дополнительное отношение

Дополнительное отношение

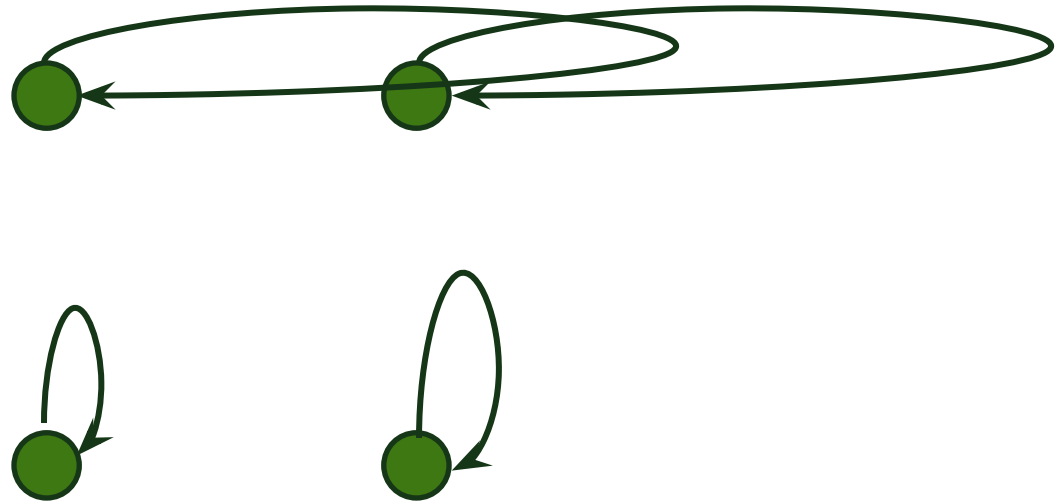
$$\bar{R} = \{(x, y) / (x, y) \notin R\}$$



Тождественное отношение

Тождественное отношение

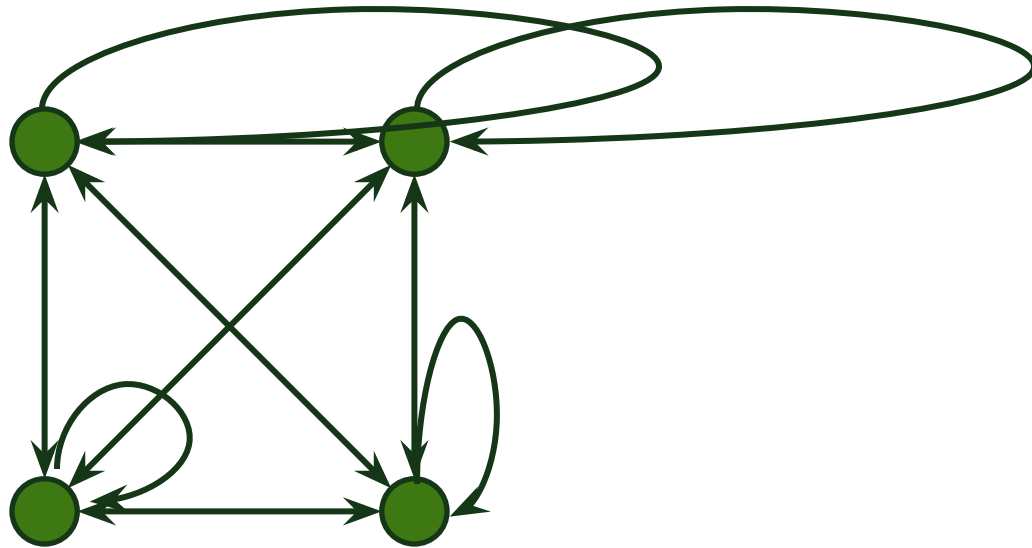
$$U = \{(x, x) / x \in M\}$$



Универсальное отношение

Универсальное отношение

$$U = \{ (x, y) / x \in M \text{ и } y \in M \}$$



Функция

$F = X \times Y$ называется **функцией**, если для каждого элемента x найдется не более одного элемента y такого, что $(x, y) \in F$, т.е. выполняется свойство однозначности полученного результата

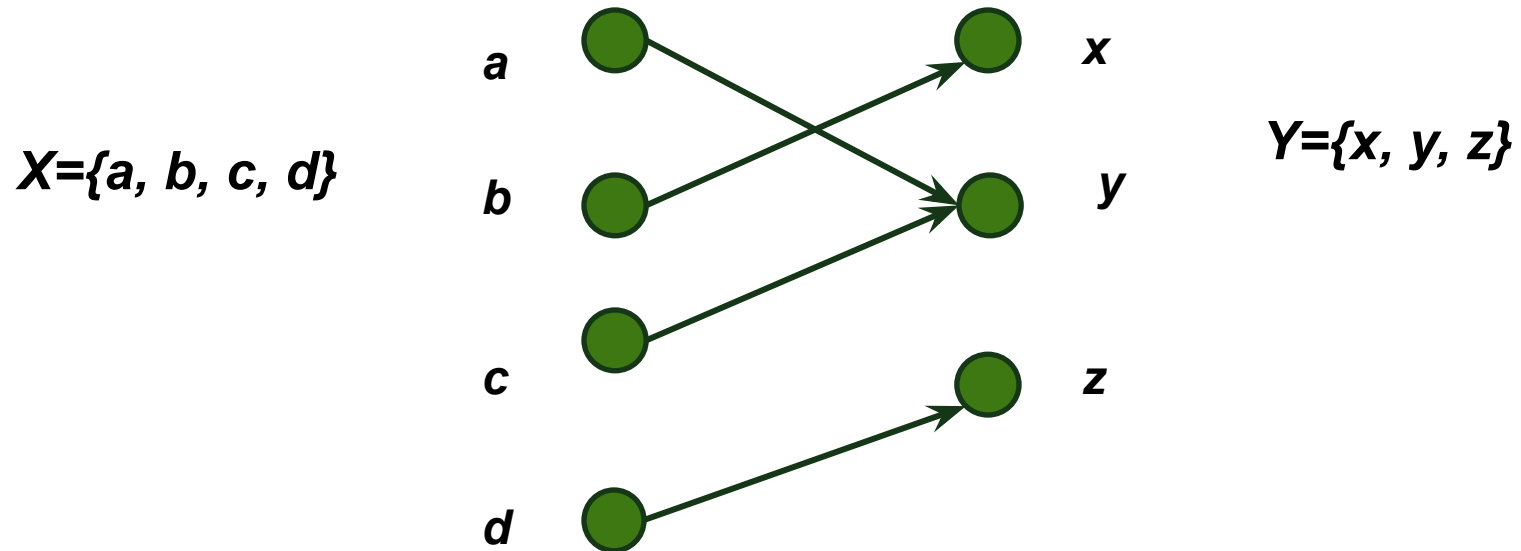
Множество X - **область определения** функции, и множество Y - **область значений** функции

X и Y могут не иметь общих элементов



Построение функции

Даны множества $X = \{a, b, c, d\}$ и $Y = \{x, y, z\}$.
Построить функцию $F: X \Rightarrow Y$ таким образом,
что $(a, x) \notin F$



Инъекция

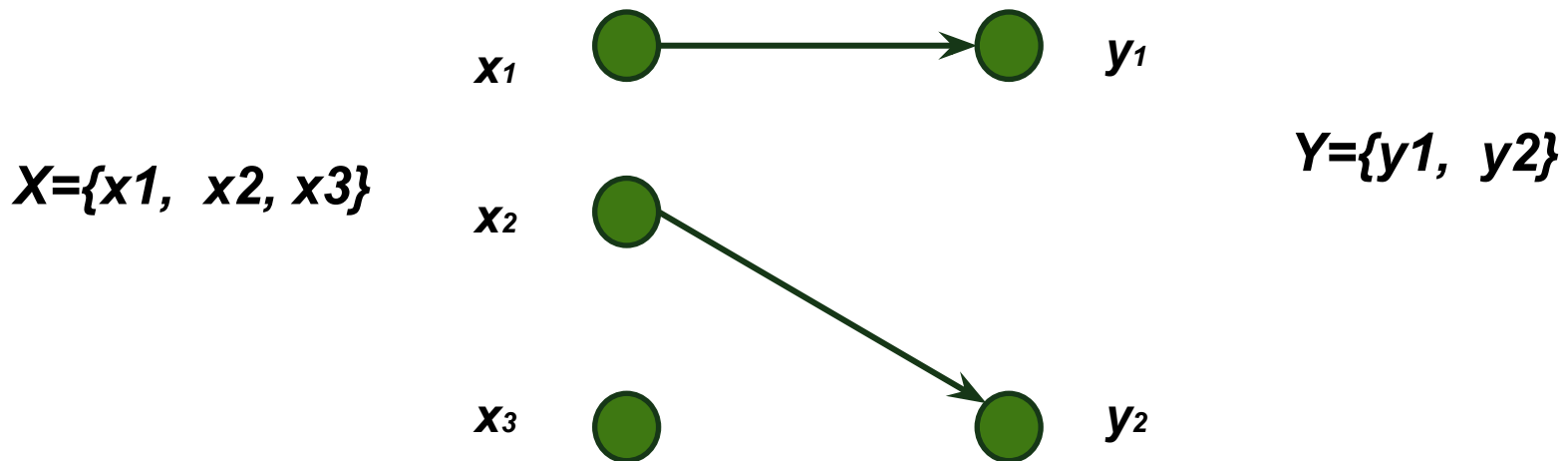
Функция $F: X \rightarrow Y$ называется **инъективной (инъекцией или вложением)**, если она переводит разные элементы X в разные Y , то есть

$$\forall x \in X, \forall z \in X, x \neq z \rightarrow F(x) \neq F(z) \quad ()$$



Построение инъекции

Даны множества $X = \{x_1, x_2, x_3\}$
 $Y = \{y_1, y_2\}$. Построить инъекцию
 $F: X \rightarrow Y$



Сюръекция

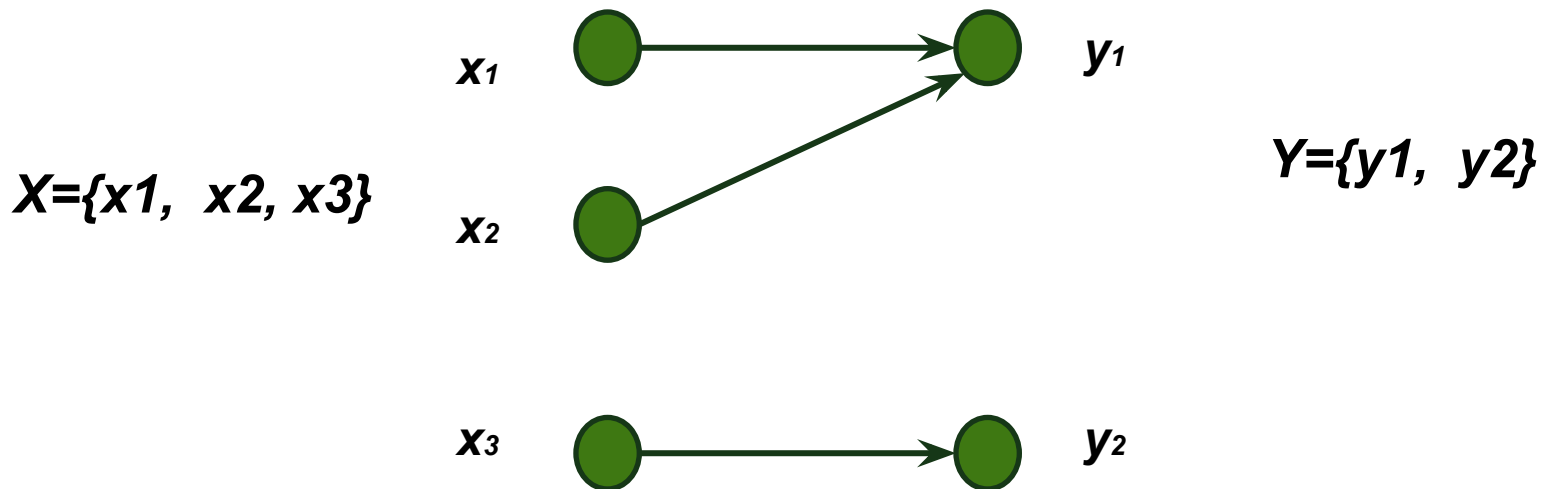
Функция $F: X \rightarrow Y$ называется **сюръективной (сюръекцией или наложением)**, если множество ее значений есть все Y , т.е.

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X, \quad y = F(x)$$



Построение сюръекции

Даны множества $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ и $Y = \{y_1, y_2\}$. Построить сюръекцию $F: X \rightarrow Y$



Биекция

Функция $F: X \rightarrow Y$ называется **биекцией** или **взаимно однозначным соответствием**, если она одновременно является инъекцией и сюръекцией (вложением и наложением), т.е.

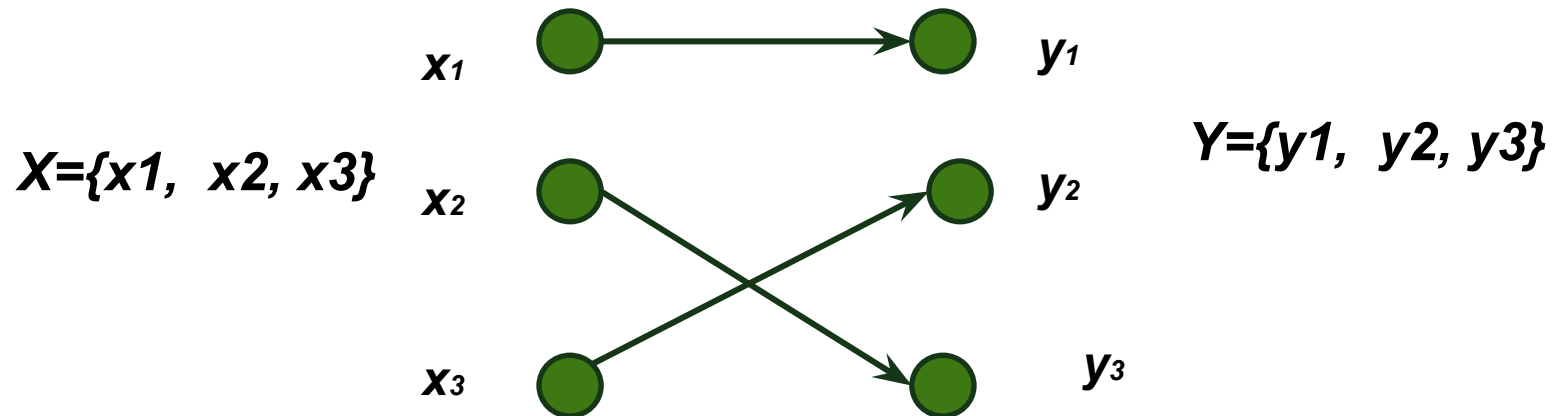
$$\forall x \in X, \forall z \in X, x \neq z \rightarrow F(x) \neq F(z)$$

$$\forall y \in Y, \exists x \in X, y = F(x)$$



Построение биекции

Даны множества $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ и $Y = \{y_1, y_2\}$. Построить биекцию $F: X \rightarrow Y$



Операция

Частным случаем функции является **операция O**

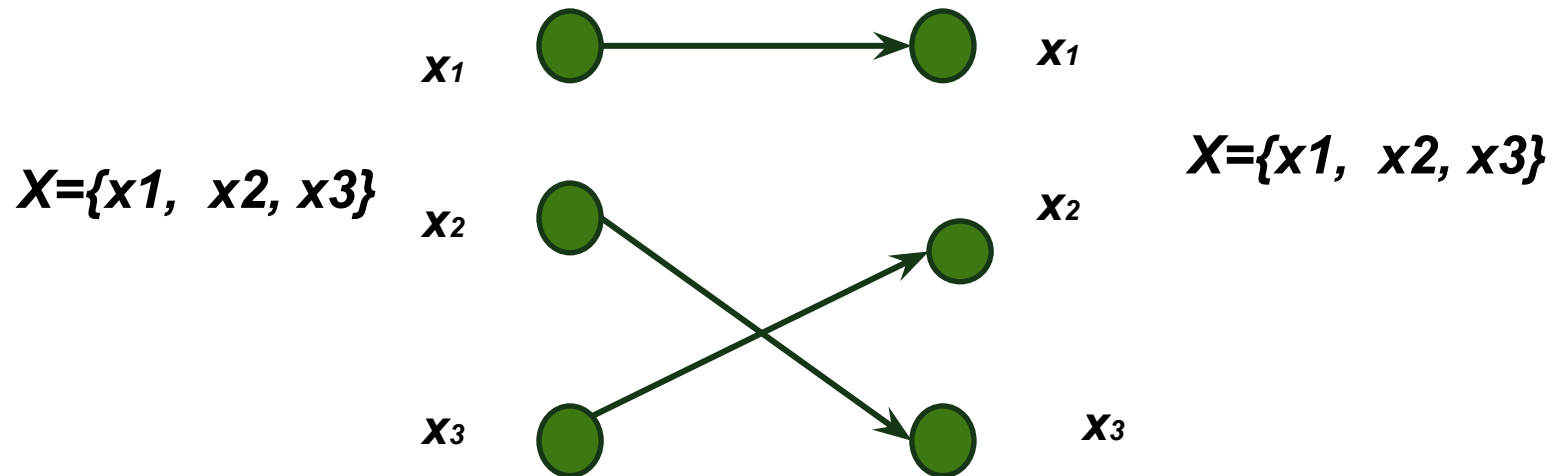
В этом случае область значения X и область определения Y совпадают, т. е

$$O \subseteq M^2, \forall x \in M \exists! y, (x, y) \in O$$



Операция

Дано множество $X = \{x_1, x_2, x_3\}$.
Построить операцию $F: X \rightarrow X$



Решение задач

Дано множество натуральных чисел N . Укажите, какие из арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление) всегда выполнимы на этом множестве?



Решение задач

Дано множество натуральных чисел N . Укажите, какие из арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление) всегда выполнимы на этом множестве?

Решение

сложение

умножение

Результат операций должен принадлежать множеству натуральных чисел N



Решение задач

На множестве натуральных чисел задана O операция. Какой может быть эта операция?

а) $a O b = a^b$;

б) $a O b = a + b$;

в) $a O b = a - b$.



Решение задач

На множестве натуральных чисел задана O операция. Какой может быть эта операция?

а) $a O b = a^b$;

б) $a O b = a + b$;

в) $a O b = a - b$.

Решение

возведение в степень

сложение

Результат операций должен принадлежать множеству натуральных чисел N



Решение задач

На множестве рациональных чисел задана O операция. Какой может быть эта операция?

а) $a O b = a \wedge b$;

б) $a O b = a + b$;

в) $a O b = a - b$;



Решение задач

На множестве рациональных чисел задана O операция. Какой может быть эта операция?

а) $a O b = a \wedge b$;

б) $a O b = a + b$;

в) $a O b = a - b$;

Решение

сложение

вычитание

Результат операций должен принадлежать множеству рациональных чисел \mathbb{N}



Рефлексивность

Бинарное отношение $T(M)$, называется **рефлексивным** тогда и только тогда, когда для каждого элемента пара (x, x) принадлежит этому бинарному отношению, т.е.

$$\forall x \in M \quad \exists (x, x) \in T(M)$$

$$M \neq \emptyset, T \neq \emptyset$$



Иррефлексивность

Бинарное отношение $T(M)$ называется **иррефлексивным** тогда и только тогда, когда для каждого элемента пара (x, x) не принадлежит этому бинарному отношению, т.е.

$$\forall x \in M \quad (x, x) \notin T(M)$$

$$M \neq \emptyset, T \neq \emptyset$$

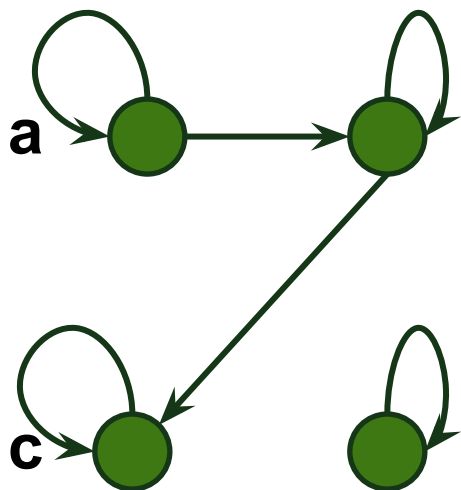


Нерефлексивность

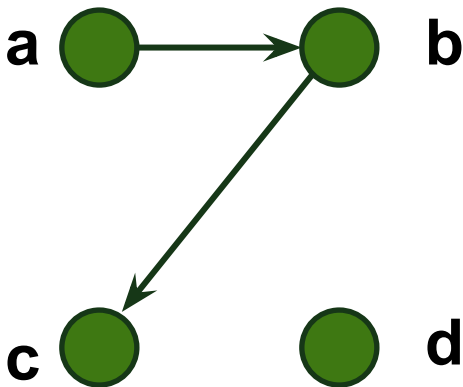
Если бинарное отношение $T(M)$ не обладает ни свойством рефлексивности, ни свойством иррефлексивности, то оно является *нерефлексивным*



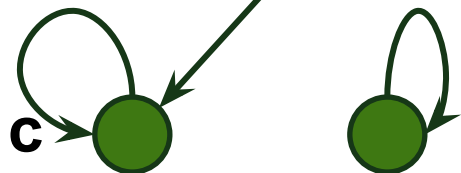
Примеры рефлексивности



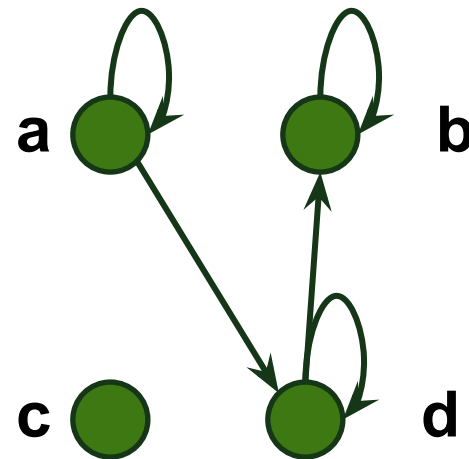
b



d



d



рефлексивно

иррефлексивно

нерефлексивно



Симметричность

Бинарное отношение $T(M)$ называется **симметричным** тогда и только тогда, когда для каждой пары различных элементов (x, y) и $x \neq y$ из T , обратная пара (y, x) также принадлежит этому бинарному отношению, т.е.

$$\forall (x, y) \in T(M) _ \exists (y, x) \in T(M)$$

$$|M| > 1, T \neq \emptyset$$



Антисимметричность

Бинарное отношение $T(M)$ называется **антисимметричным** тогда и только тогда, когда для каждой пары различных элементов (x, y) и $x \neq y$ из T , пара (y, x) не принадлежит этому бинарному отношению, т.е.

$$\forall (x, y) \in T(M) _ (y, x) \notin T(M)$$

$$|M| > 1, T \neq \emptyset$$



Другое определение антисимметричности

Бинарное отношение $T(M)$ называется

антисимметричным тогда и только

тогда, когда из того, что $(x, y) \in T(M)$

и $(y, x) \in T(M)$ следует, что $x = y$

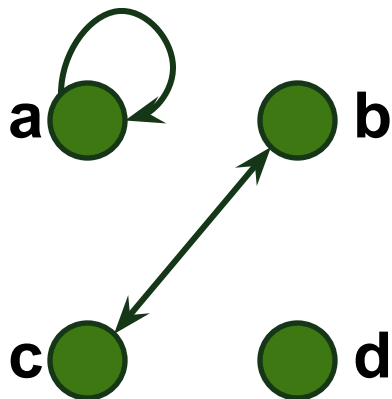


Несимметричность

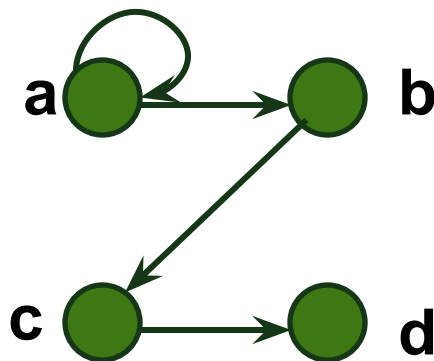
Если бинарное отношение $T(M)$ не обладает ни свойством симметричности, ни свойством антисимметричности, то оно является *несимметричным*



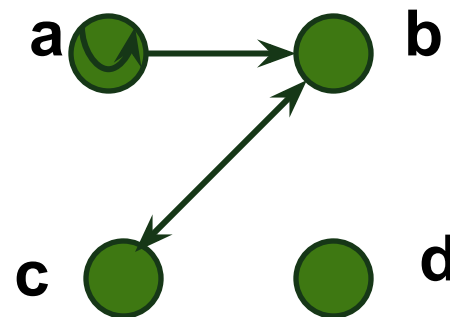
Примеры симметричности



симметрично



антисимметрично



несимметрично

Транзитивность

Бинарное отношение $T(M)$ называется **транзитивным** тогда и только тогда, когда для каждой двух пар различных элементов (x, y) и (y, z) , принадлежащих бинарному отношению, пара (x, z) также принадлежит этому бинарному отношению, т.е.

$$\forall (x, y), (y, z) \in T(M) _ \exists (x, z) \in T(M)$$

$$|M| > 2, |T| > 2$$



Интранзитивность

Бинарное отношение $T(M)$ называется **интранзитивным** тогда и только тогда, когда для каждой двух пар различных элементов (x, y) и (y, z) , принадлежащих бинарному отношению, пара (x, z) не принадлежит этому бинарному отношению, т.е.

$$\forall (x, y), (y, z) \in T(M) _ \exists (x, z) \notin T(M)$$

$$|M| > 2, |T| > 2$$

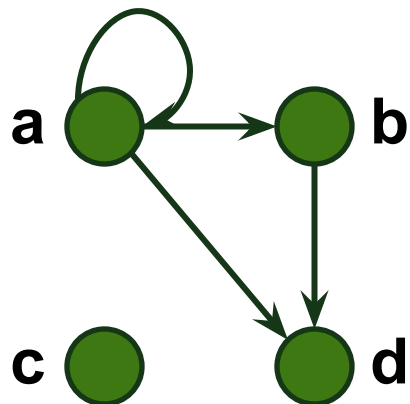


Нетранзитивность

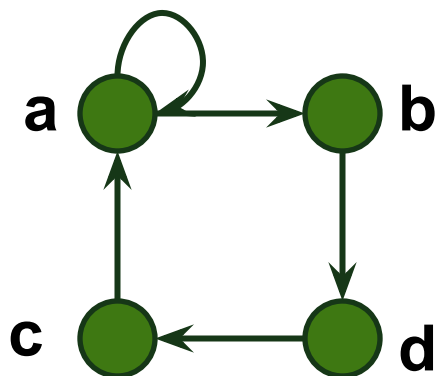
Если бинарное отношение $T(M)$ не обладает ни свойством транзитивности, ни свойством интранзитивности, то оно является **нетранзитивным**



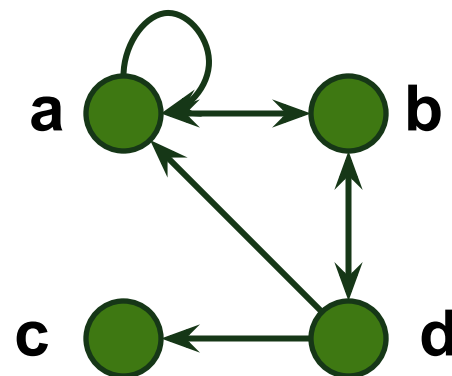
Примеры транзитивности



транзитивно



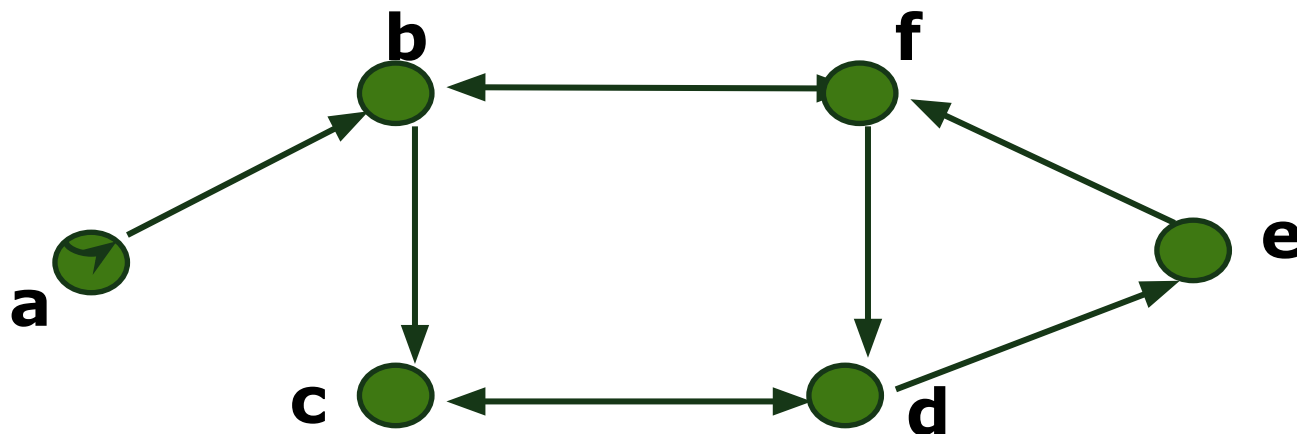
интранзитивно



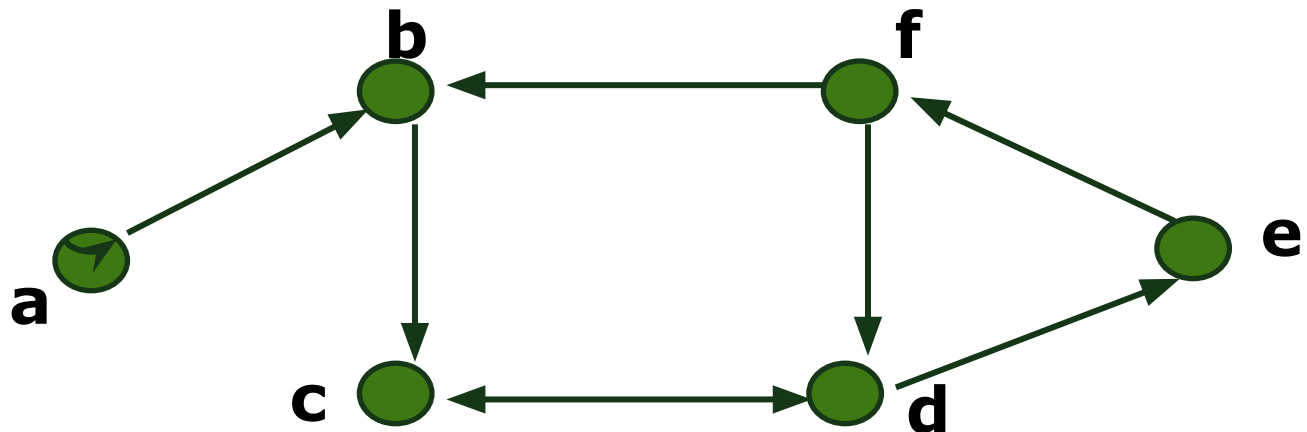
нетранзитивно



Определение свойств бинарных отношений



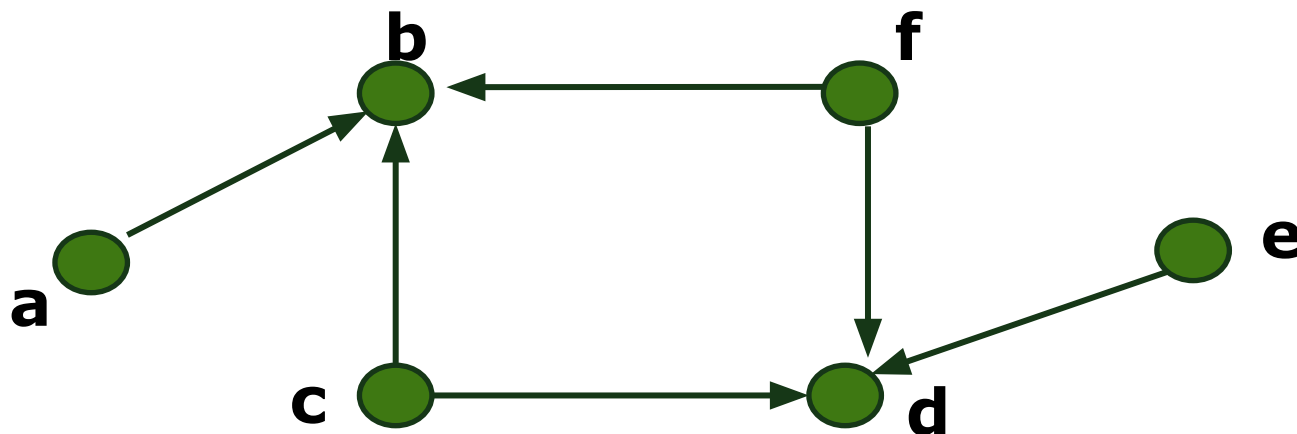
Определение свойств бинарных отношений



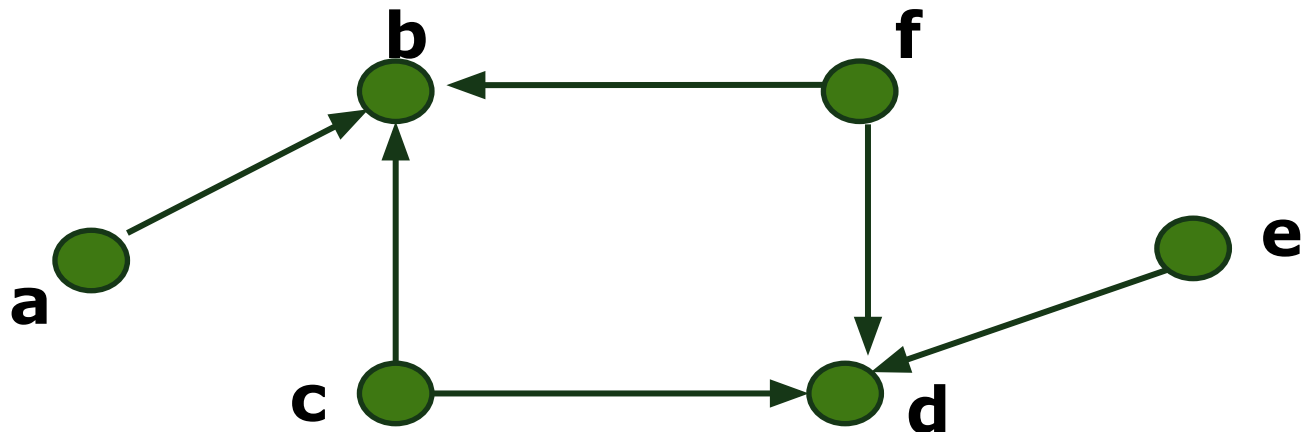
- **нерефлексивность** (часть вершин имеет петли, часть –нет)
- **несимметричность** (есть симметричные и антисимметричные дуги)
- **интранзитивность** (бинарное отношение обладает несколькими путями длины 2, но нет ни одного транзитивного замыкания)



Определение свойств бинарных отношений



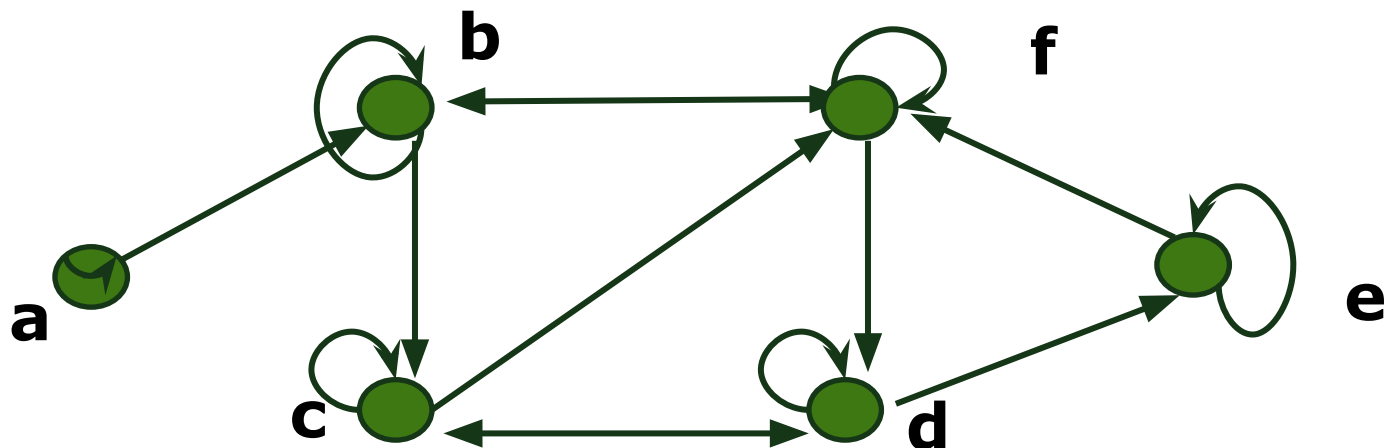
Определение свойств бинарных отношений



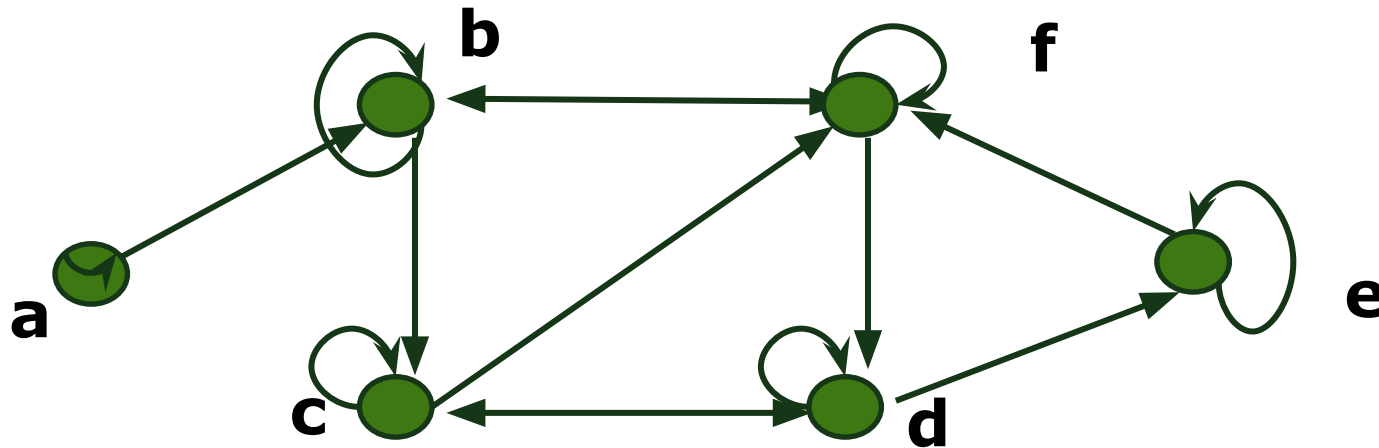
- **иррефлексивность** (нет ни одной петли)
- **антисимметричность** (есть только антисимметричные дуги)
- **нетранзитивность** (нет ни одного пути длины 2!!!)



Определение свойств бинарных отношений



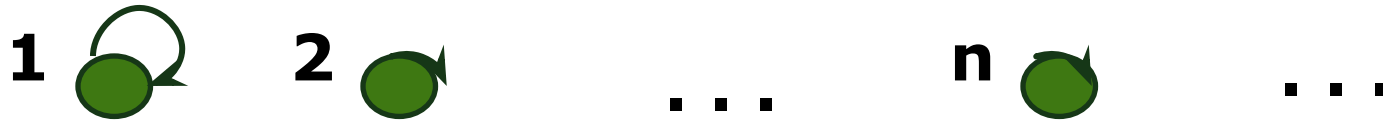
Определение свойств бинарных отношений



- **рефлексивность** (все вершины имеют петли)
- **несимметричность** (есть симметричные и антисимметричные дуги)
- **нетранзитивность** (есть пути длины 2 с транзитивными замыканиями, есть без транзитивных замыканий)

Определение свойств бинарных отношений

На множестве натуральных чисел задано отношение равенства ($a=b$). Какими свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) обладает это отношение?

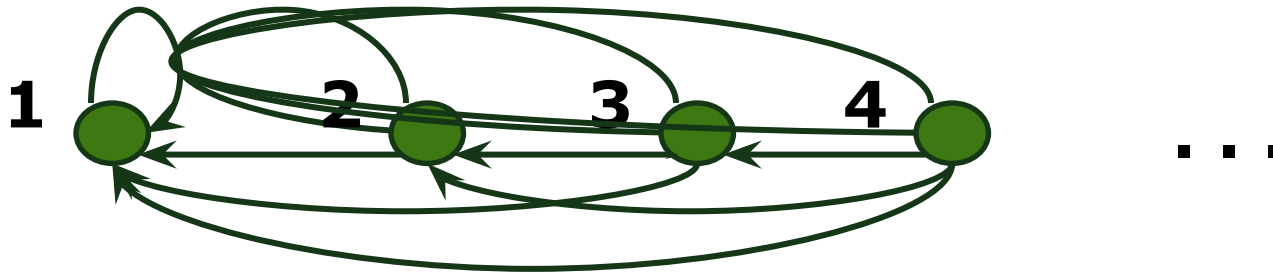


- **рефлексивность** (число равно a самому себе, $a=a$)
- **несимметричность** (нет ни одной дуги между различными элементами a и b !!!)
- **нетранзитивность** (нет ни одного пути длины 2!!!)



Определение свойств бинарных отношений

. На множестве натуральных чисел задано отношение больше или равно ($a \geq b$). Какими свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) обладает это отношение?



- **рефлексивность** (все вершины имеют петли)
- **антисимметричность** (есть только антисимметричные дуги)
- **транзитивность** (на все пути длины 2 есть транзитивные замыкания)

