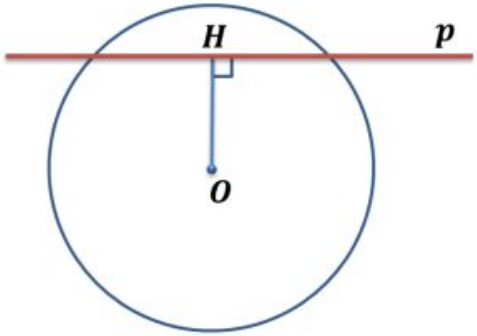
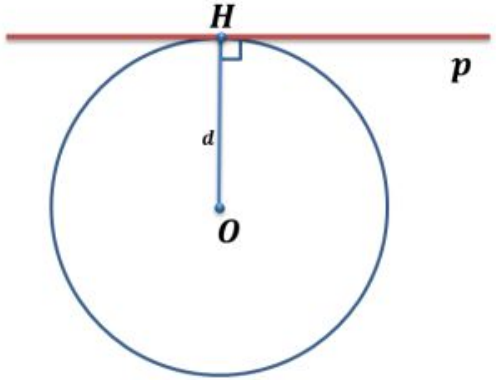
Касательная к окружности

VIDEOUROKI.NET

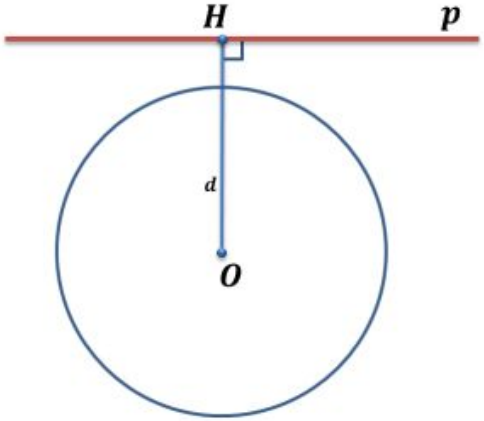
точка касания



если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности, то прямая и окружность имеют две общие точки. В таком случае, прямая называется **секущей** по отношению к окружности.

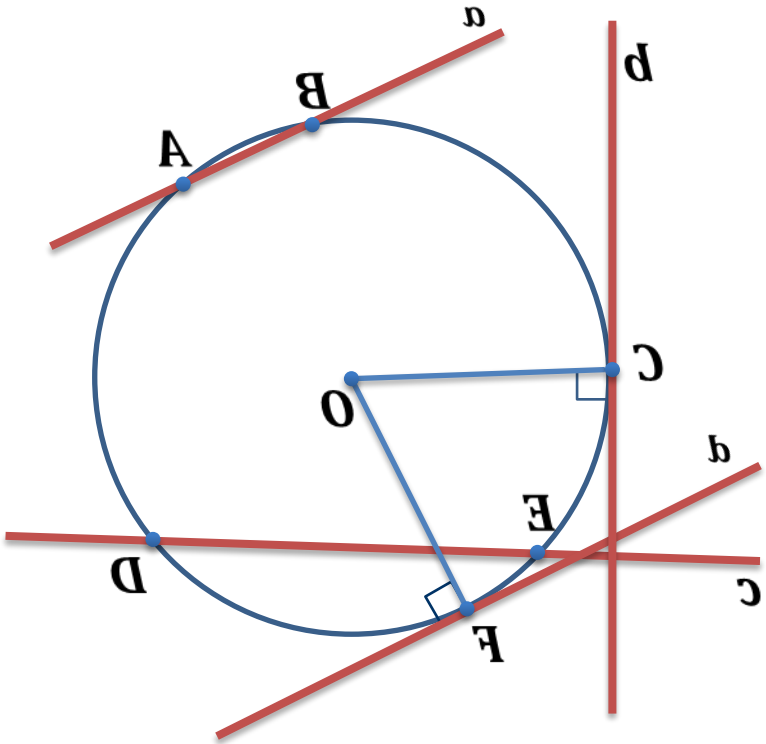


если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то прямая и окружность имеют только одну общую точку. В таком случае, прямая называется **касательной** к окружности.



если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности, то прямая и окружность не имеют общих точек.

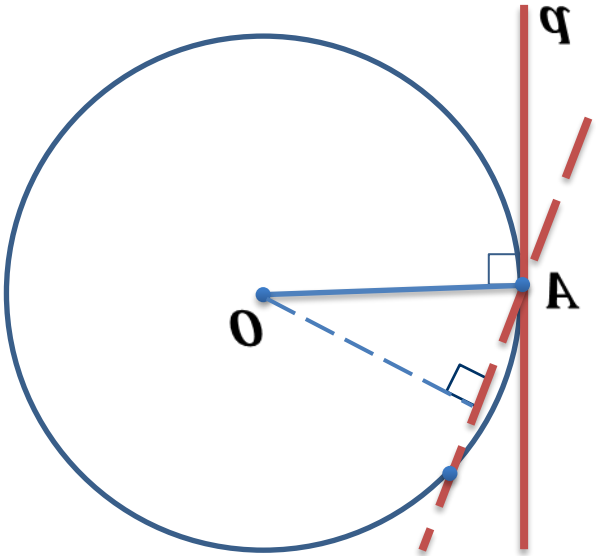
VIDEOUROKI.NET



b – касательная, т. C – точка касания

d – касательная, т. F – точка касания

VIDEOUROKI.NET



Теорема (свойство касательной). Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

VIDEOUROKI.NET

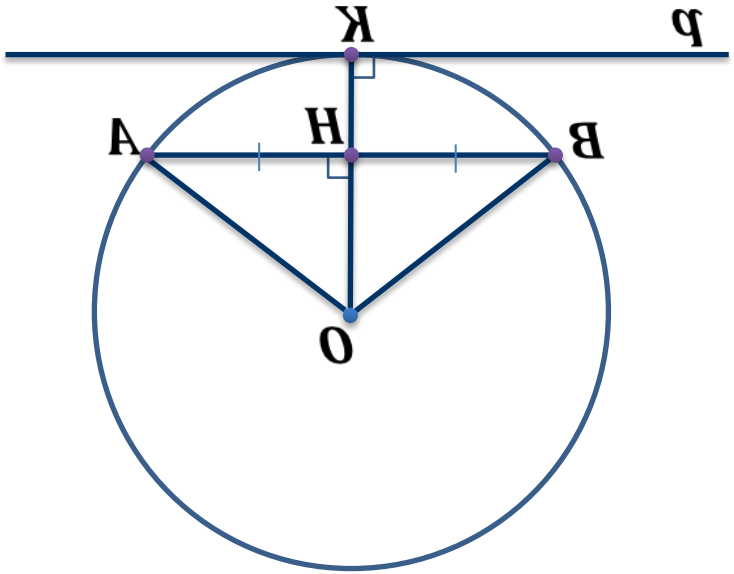
Задача. Радиус OK окружности с центром O делит хорду AB пополам. Доказать, что касательная, проведенная через точку K, параллельна хорде AB.

Доказательство.

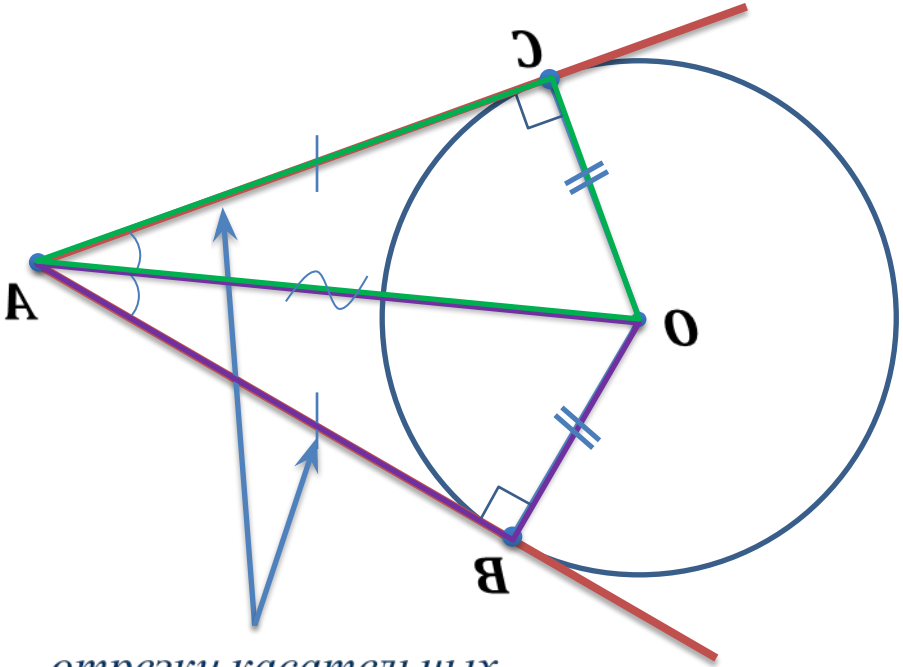
ΔAOB – равнобедренный

OH – медиана и высота

$$\left.\begin{array}{l} OH \perp AB \\ OK \perp p \end{array}\right\} \Rightarrow AB \parallel p$$



VIDEOUROKI.NET



отрезки касательных, проведенных из точки A

Теорема. Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Доказательство.

ΔABO и ΔACO:

$$\left.\begin{array}{l} \angle OBA = \angle OCA = 90^\circ \\ AO - \text{общая} \\ BO = OC - \text{как радиусы} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABO = \Delta ACO$$

Следовательно, $AB = AC$, $\angle BAO = \angle CAO$

VIDEOUROKI.NET

Задача. Через концы хорды AB, равной радиусу окружности, проведены две касательные, пересекающиеся в точке C. Найдите $\angle ACB$.

Решение.

ΔOAB – равносторонний

$\angle OAB = \angle ABO = \angle BOA = 60°$

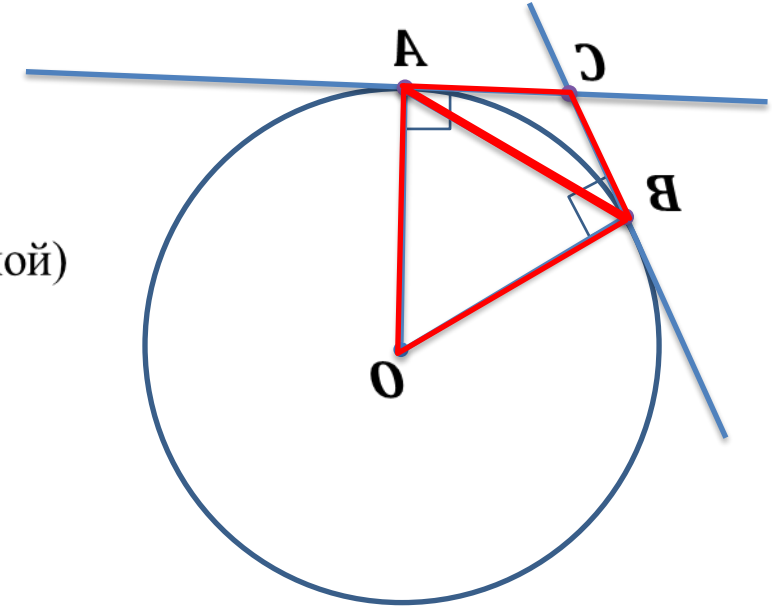
$AC = CB$ (по свойству отрезков касательной)

$\angle OAC = \angle CBO = 90°$ (по свойству касательной)

$\angle CAB = \angle OAC - \angle OAB = 90° - 60° = 30°$

$\angle CBA = \angle CAB = 30°$ (по свойству углов равнобедренного треугольника)

$\angle ACB = 180° - 30° - 30° = 120°$



Ответ: $\angle ACB = 120°$.

VIDEOUROKI.NET

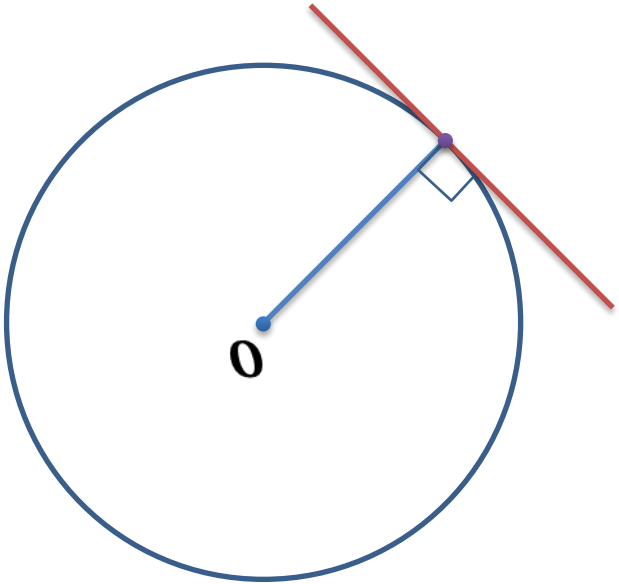
Теорема (признак касательной). Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.

Доказательство.

Данный радиус является перпендикуляром, проведенным из центра окружности к данной прямой.

А значит, он является расстоянием от центра окружности до прямой.

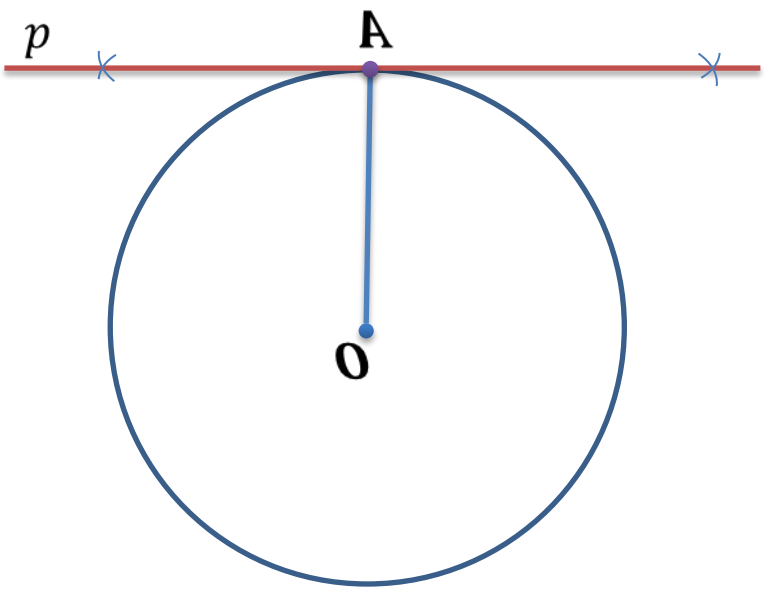
То есть радиус окружности и расстояние до прямой равны.



VIDEOUROKI.NET

Задача. Через данную точку A окружности с центром O провести касательную к этой окружности.

Решение.



1. OA
2. $p \perp OA$
3. p – искомая касательная (по признаку касательной)

VIDEOUROKI.NET

Задача. К окружности с радиусом 36 проведена касательная из точки A, удаленной от центра на расстояние, равное 85. Найти длину отрезка касательной от точки A до точки касания.

Решение.

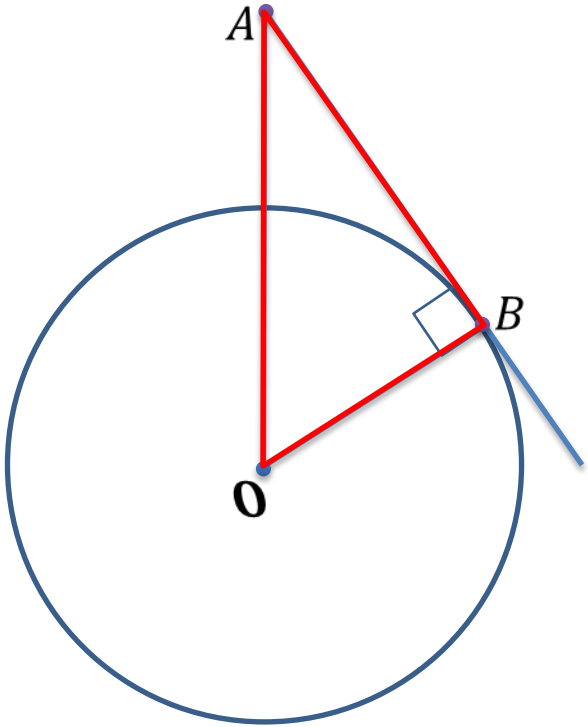
$\angle OBA = 90°$ (по свойству касательной)

$AB^2 = AO^2 - OB^2$ (по теореме Пифагора)

$AB^2 = 85^2 - 36^2$

$AB^2 = 5929 \Rightarrow AB = 77$

Ответ: $AB = 77$.



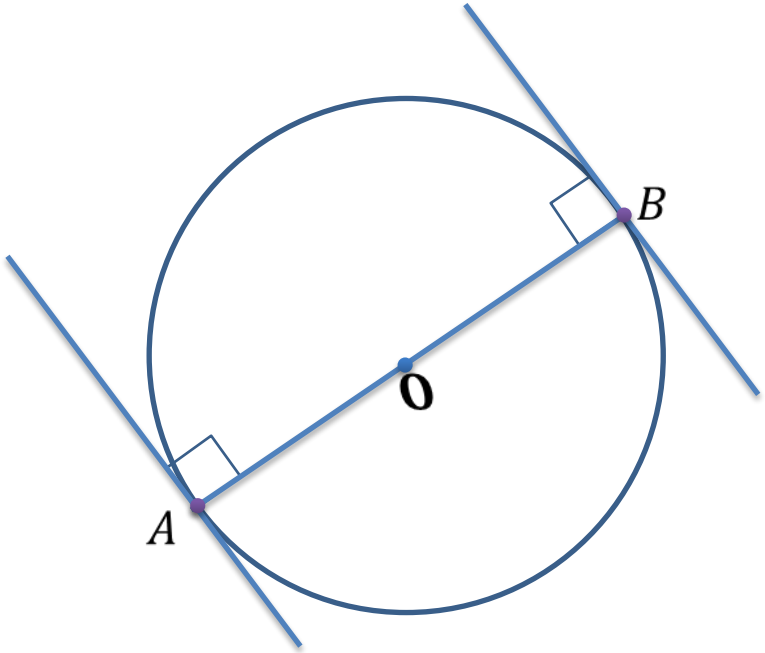
VIDEOUROKI.NET

Задача. Доказать, что касательные к окружности, проведенные через концы диаметра, параллельны.

Решение.

По свойству касательных, углы между диаметром и касательными равны 90°.

Значит, по признаку параллельности прямых, получаем, что касательные параллельны.



VIDEOUROKI.NET

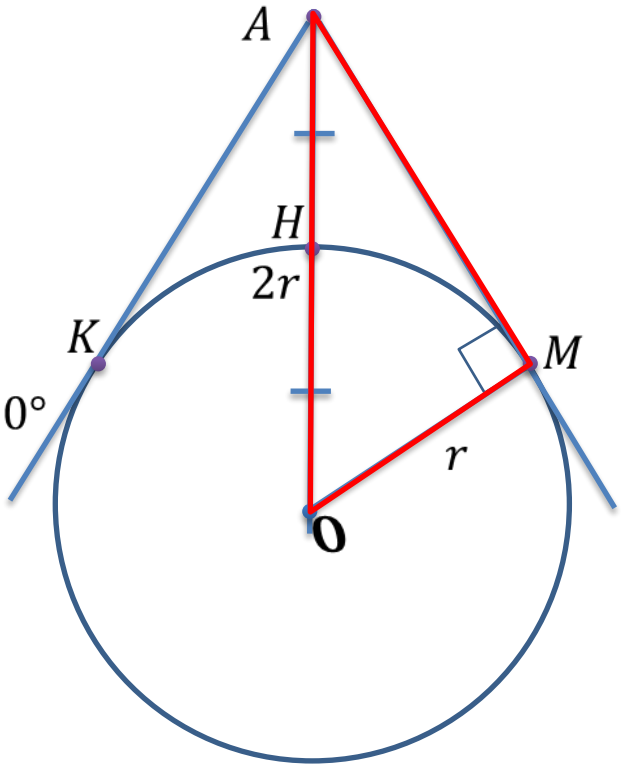
Задача. Отрезки AK и AM являются отрезками касательных к окружности с центром O, проведенными из точки A. Найти $\angle KAM$, если середина отрезка OA лежит на окружности.

Решение.

$OA = 2r$

$\angle OMA = 90°$ (по свойству касательных)

$$\left.\begin{array}{l} OM = \frac{1}{2}AO \Rightarrow \angle OAM = 30° \\ \angle OAK = \angle OAM \text{ (по свойству отрезков касательных)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle KAM = 2\angle OAM = 60°$$



Ответ: $\angle KAM = 60°$.

VIDEOUROKI.NET

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется *касательной* к окружности, а их общая точка называется *точкой касания* прямой и окружности.

Свойство касательной к окружности: Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

Свойство отрезков касательных, проведенных из одной точки: Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Признак касательной: Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.

VIDEOUROKI.NET