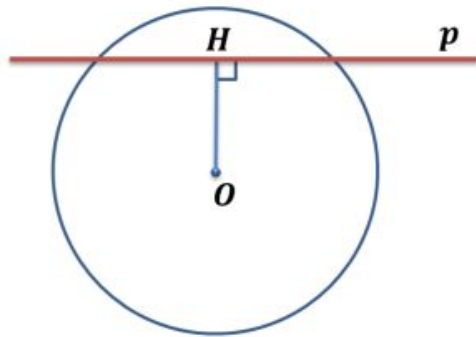
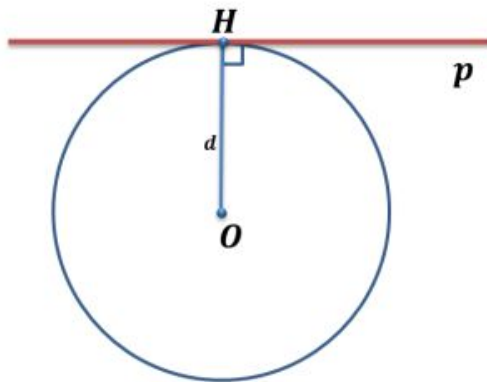


Касательная к окружности

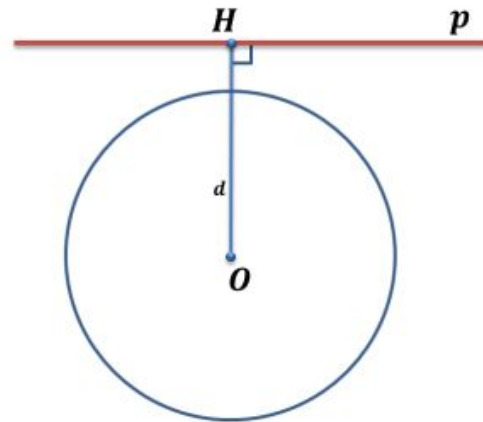


если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности, то прямая и окружность имеют две общие точки. В таком случае, прямая называется **секущей** по отношению к окружности.

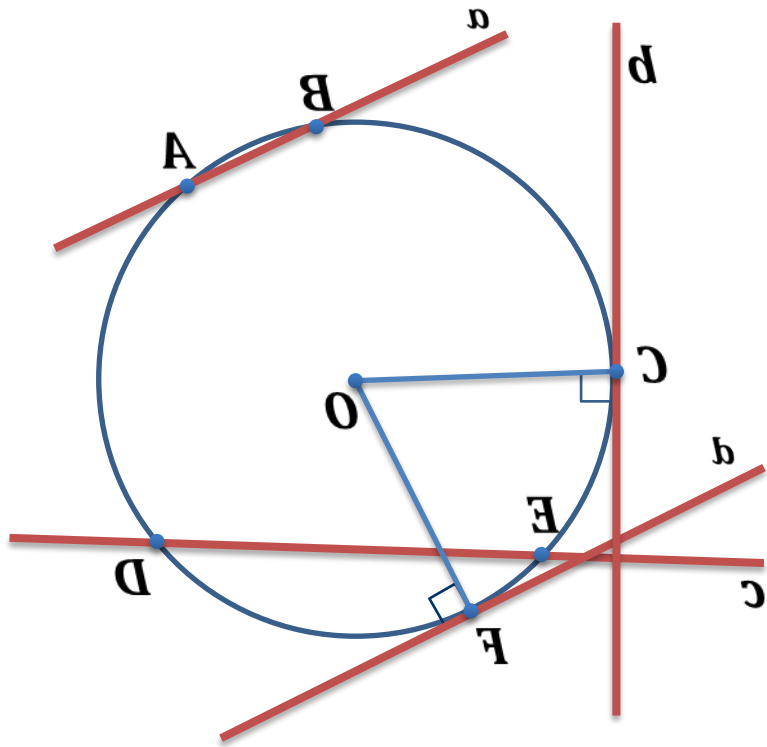
точка касания



если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то прямая и окружность имеют только одну общую точку. В таком случае, прямая называется **касательной** к окружности.

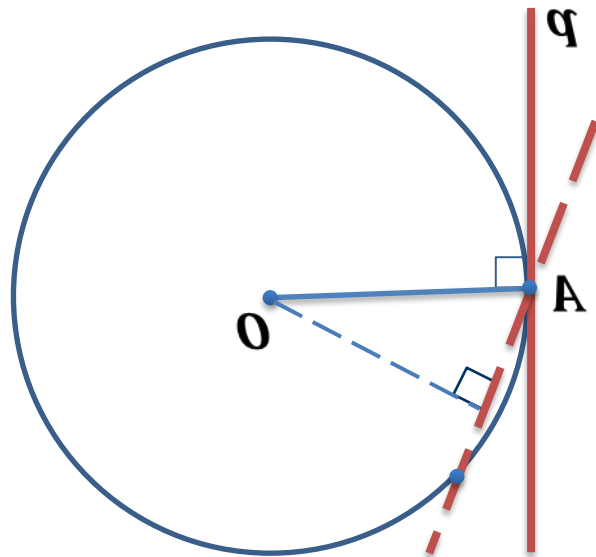


если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности, то прямая и окружность не имеют общих точек.



b — касательная, т. C — точка касания

d — касательная, т. F — точка касания



Теорема (свойство касательной). Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

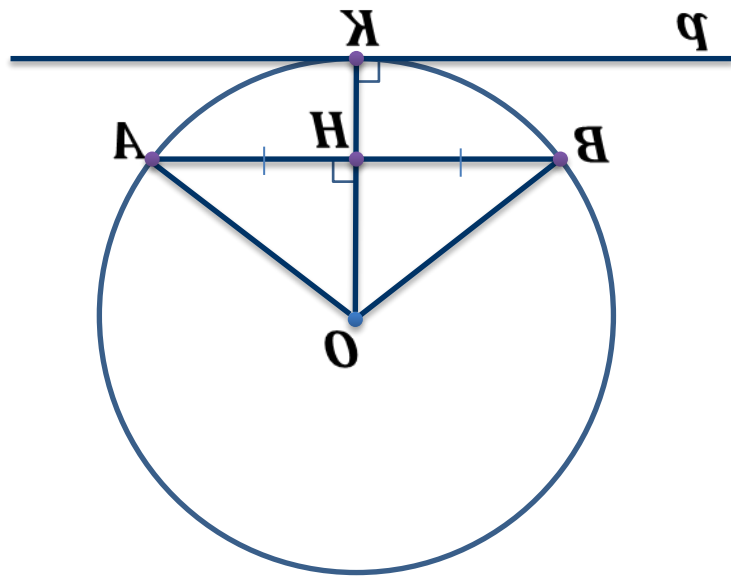
Задача. Радиус OK окружности с центром O делит хорду AB пополам. Доказать, что касательная, проведенная через точку K , параллельна хорде AB .

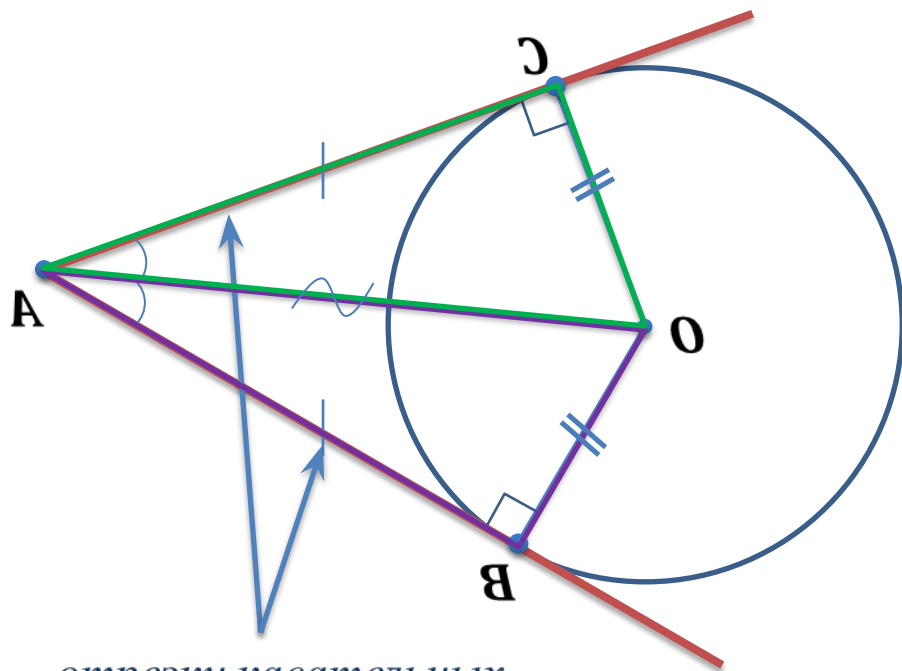
Доказательство.

$\triangle AOB$ — равнобедренный

OH — медиана и высота

$$\left. \begin{array}{l} OH \perp AB \\ OK \perp p \end{array} \right\} \Rightarrow AB \parallel p$$





*отрезки касательных,
проведенных из точки A*

Теорема. Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Доказательство.

$\triangle ABO$ и $\triangle ACO$:

$$\angle OBA = \angle OCA = 90^\circ$$

AO – общая

$BO = OC$ – как радиусы

$$\left. \begin{array}{l} \angle OBA = \angle OCA = 90^\circ \\ AO - \text{общая} \\ BO = OC - \text{как радиусы} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABO = \triangle ACO$$

Следовательно, $AB = AC$, $\angle BAO = \angle CAO$

Задача. Через концы хорды AB , равной радиусу окружности, проведены две касательные, пересекающиеся в точке C . Найдите $\angle ACB$.

Решение.

$\triangle OAB$ – равносторонний

$$\angle OAB = \angle ABO = \angle BOA = 60^\circ$$

$AC = CB$ (по свойству отрезков касательной)

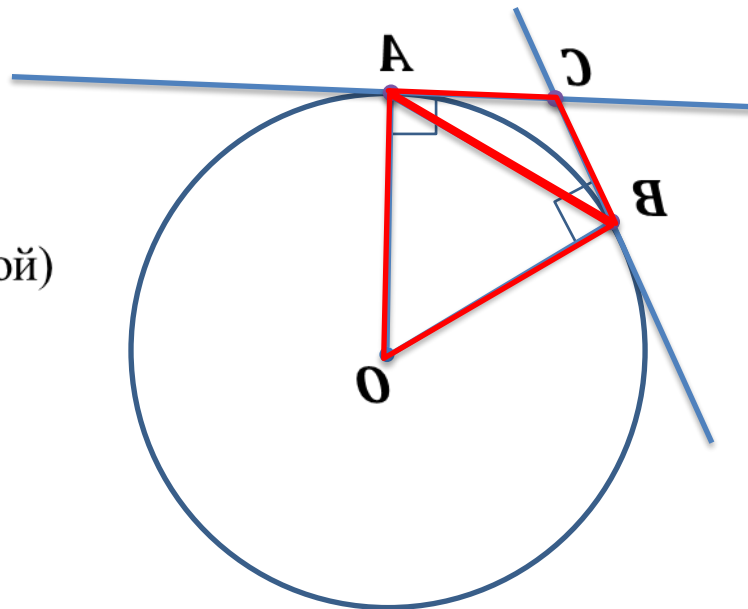
$$\angle OAC = \angle CBO = 90^\circ \text{ (по свойству касательной)}$$

$$\angle CAB = \angle OAC - \angle OAB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\angle CBA = \angle CAB = 30^\circ \text{ (по свойству углов равнобедренного треугольника)}$$

$$\angle ACB = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$$

Ответ: $\angle ACB = 120^\circ$.



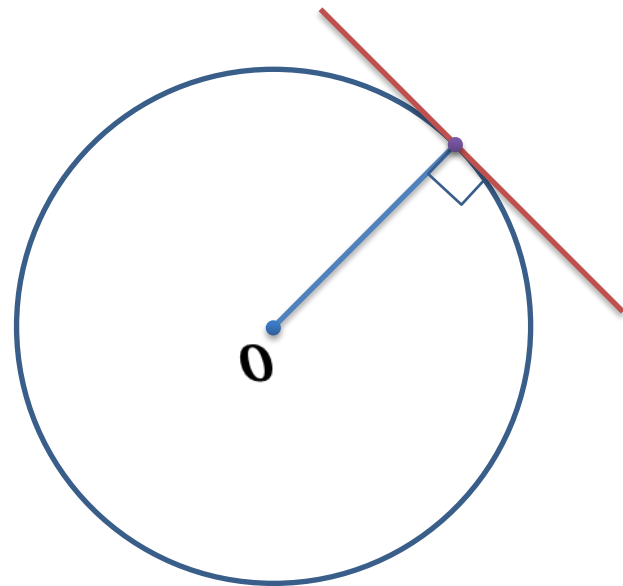
Теорема (признак касательной). Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.

Доказательство.

Данный радиус является перпендикуляром, проведенным из центра окружности к данной прямой.

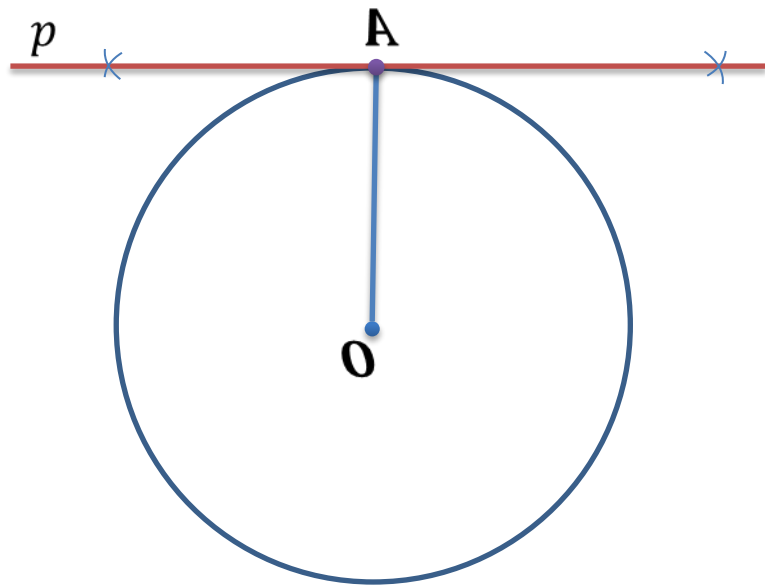
А значит, он является расстоянием от центра окружности до прямой.

То есть радиус окружности и расстояние до прямой равны.



Задача. Через данную точку A окружности с центром O провести касательную к этой окружности.

Решение.



1. OA

2. $p \perp OA$

3. p — искомая касательная
(по признаку касательной)

Задача. К окружности с радиусом 36 проведена касательная из точки A , удаленной от центра на расстояние, равное 85. Найти длину отрезка касательной от точки A до точки касания.

Решение.

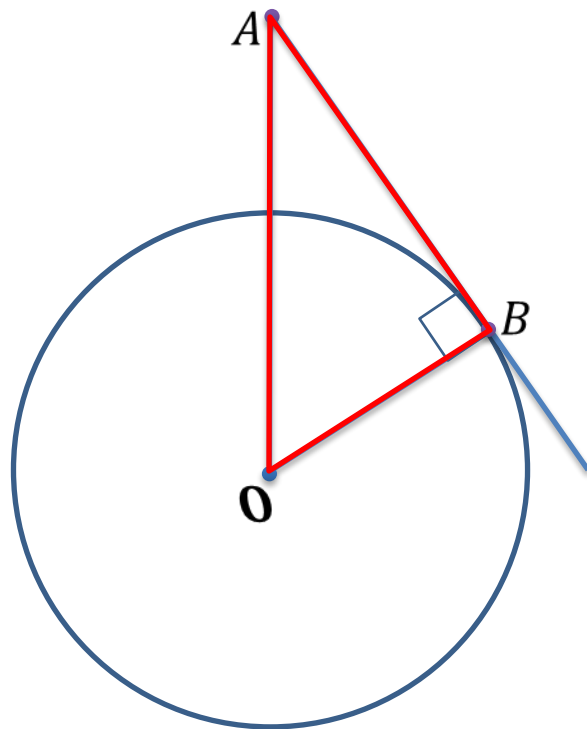
$\angle OBA = 90^\circ$ (по свойству касательной)

$AB^2 = AO^2 - OB^2$ (по теореме Пифагора)

$$AB^2 = 85^2 - 36^2$$

$$AB^2 = 5929 \Rightarrow AB = 77$$

Ответ: $AB = 77$.

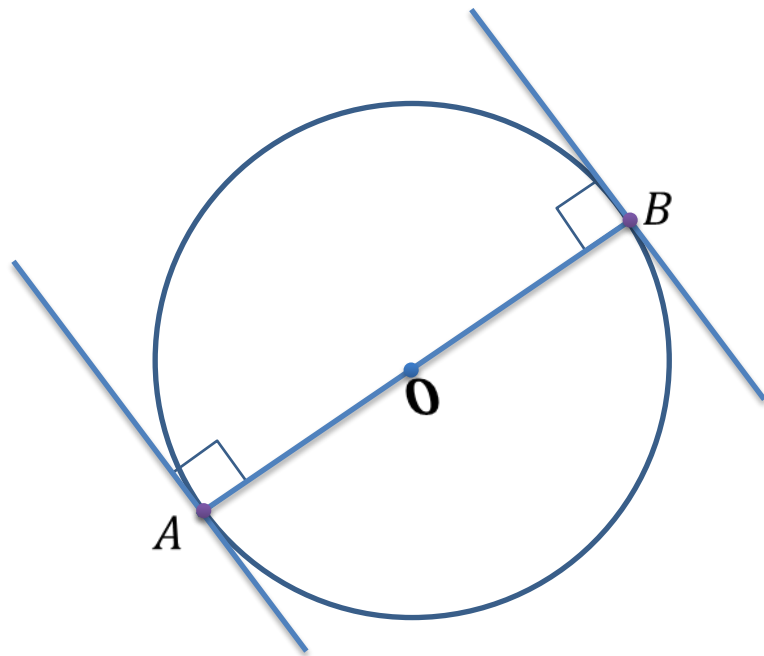


Задача. Доказать, что касательные к окружности, проведенные через концы диаметра, параллельны.

Решение.

По свойству касательных, углы между диаметром и касательными равны 90° .

Значит, по признаку параллельности прямых, получаем, что касательные параллельны.



Задача. Отрезки AK и AM являются отрезками касательных к окружности с центром O , проведенными из точки A . Найти $\angle KAM$, если середина отрезка OA лежит на окружности.

Решение.

$$OA = 2r$$

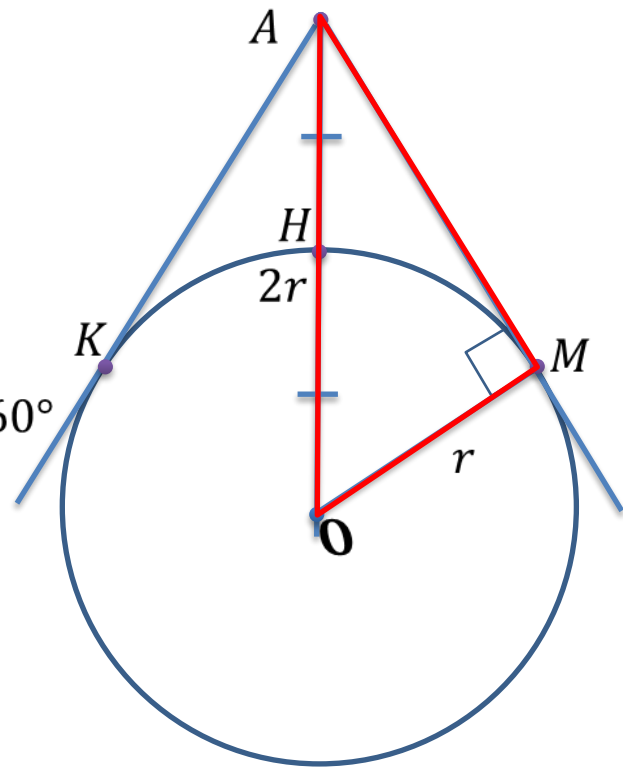
$$\angle OMA = 90^\circ \text{ (по свойству касательных)}$$

$$OM = \frac{1}{2}AO \Rightarrow \angle OAM = 30^\circ$$

$$\angle OAK = \angle OAM \text{ (по свойству отрезков касательных)}$$

$$\Rightarrow \angle KAM = 2\angle OAM = 60^\circ$$

Ответ: $\angle KAM = 60^\circ$.



Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется *касательной* к окружности, а их общая точка называется *точкой касания* прямой и окружности.

Свойство касательной к окружности: Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

Свойство отрезков касательных, проведенных из одной точки: Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Признак касательной: Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.