Метод наименьших квадратов оценки параметров функциональной зависимости

Выполнила: Гнездилова Алена

Группа: С-1841

Что такое МНК?

- **Метод наименьших квадратов (МНК)** — математический метод, применяемый для решения различных задач, основанный на минимизации суммы квадратов отклонений некоторых функций от искомых переменных.

Почему МНК?

- Название свое метод наименьших квадратов получил, исходя из основного принципа, которому должны удовлетворять полученные на его основе оценки параметров: **сумма квадратов ошибки модели должна быть минимальной.**
- $\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i))^2 \rightarrow \min$

a_0

Общий вид модели

- Модель в общем виде может быть представлена уравнением:

yt = a0 + a1 x1t +...+ an xnt + εt .

- Исходными данными при оценке параметров a0 , a1 ,..., an является вектор значений зависимой переменной y = (y1 , y2 , ... , yT)' и матрица значений независимых переменных

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1T} & x_{2T} & \dots & x_{nT} \end{bmatrix}$$

- в которой первый столбец, состоящий из единиц, соответствует коэффициенту модели .

Применение

Метод наименьших квадратов используется для оценки параметров уравнение регрессии.

Регрессионный анализ представляет собой вывод уравнения регрессии, с помощью которого находится средняя величина случайной переменной (признака-результата), если величина другой (или других) переменных (признаков-факторов) известна. Он включает следующие этапы:

- выбор формы связи (вида аналитического уравнения регрессии);
- оценку параметров уравнения;
- оценку качества аналитического уравнения регрессии.

Пример использования

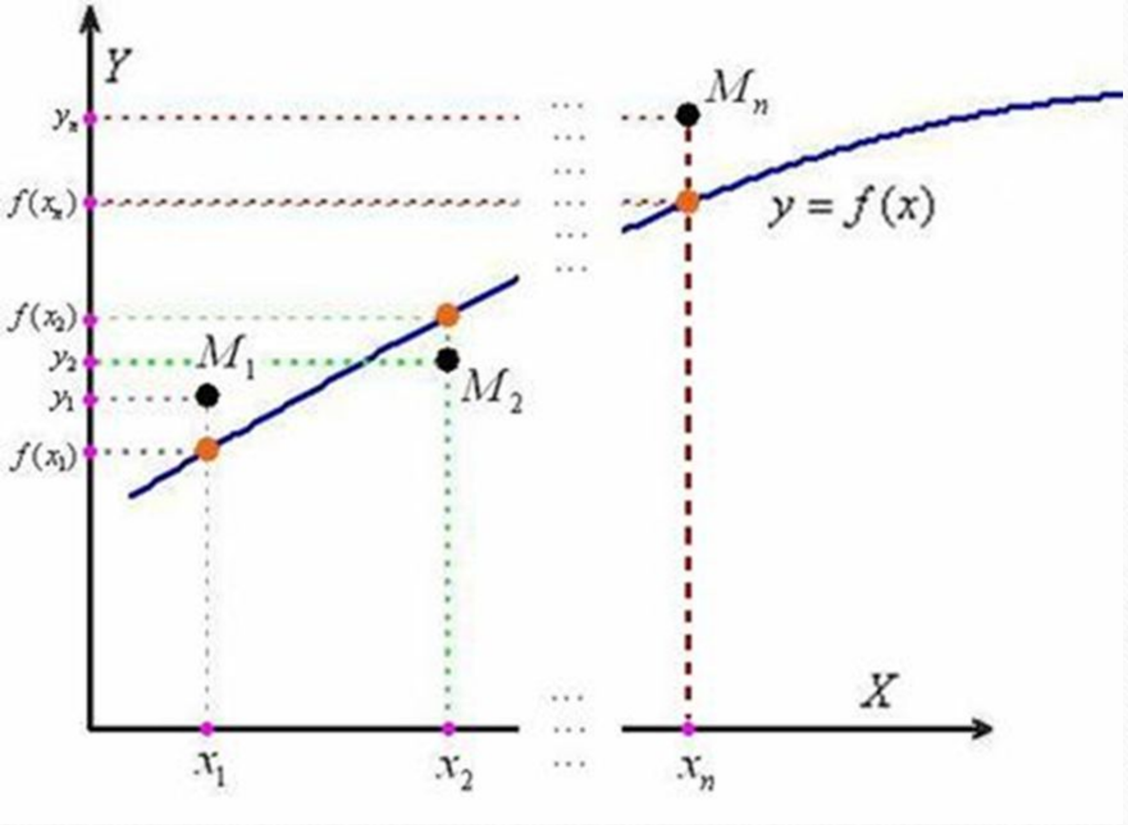
- X– торговую площадь продовольственного магазина, кв.м.,
- Y – годовой товарооборот продовольственного магазина, млн. руб.

Предположим, что после проведения наблюдений/опытов/подсчётов в нашем распоряжении оказываются числовые данные:

X				…	
Y				…	

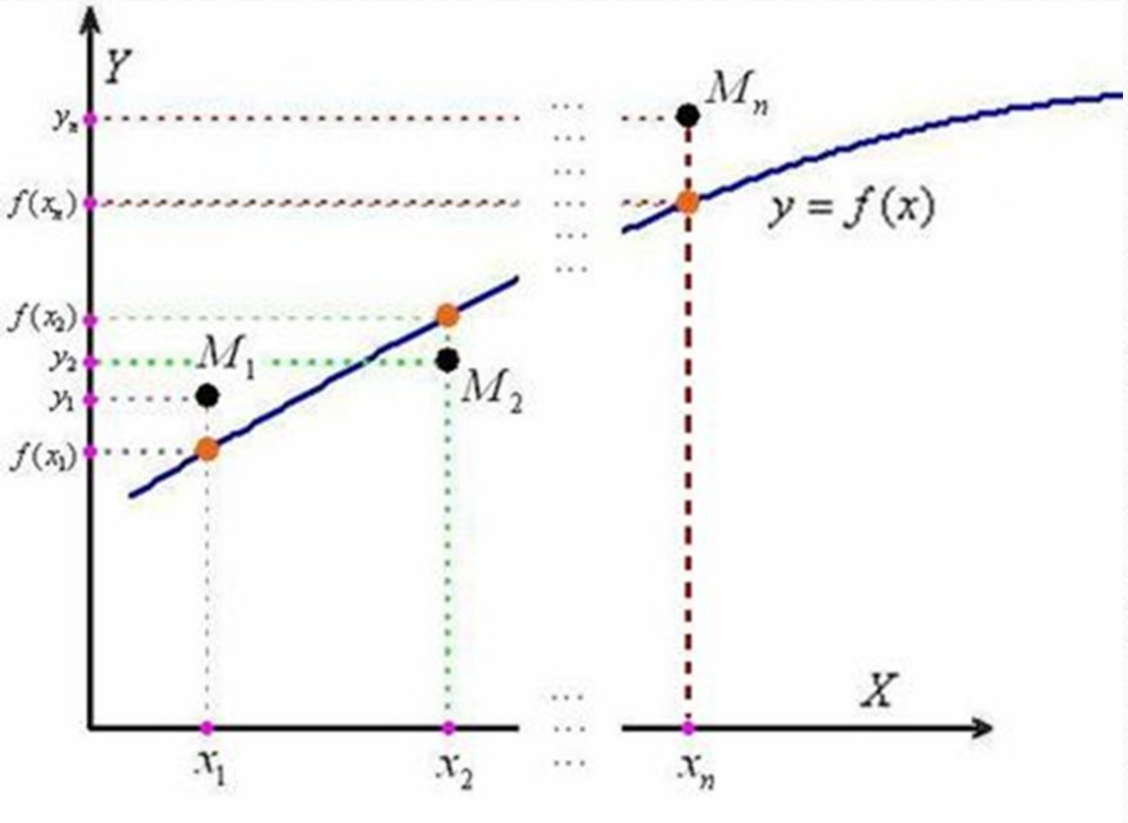
Такую функцию называют ***аппроксимирующей*** *(аппроксимация – приближение)* или ***теоретической функцией***.

Табличные данные также можно записать в виде точек $M_1(x_1; y_1)$; $M_2(x_2; y_2)$;…; $M_n(x_n; y_n)$ и изобразить в декартовой системе XOY.



Как оценить точность данного приближения?

Вычислим $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ и разности (отклонения) $e_1 = y_1 - f(x_1)$, $e_2 = y_2 - f(x_2), \ldots,$ $e_n = y_n - f(x_n)$ между экспериментальными и функциональными значениями (изучаем



В качестве оценки точности приближения принимаем сумму квадратов отклонений:

$$e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2$$

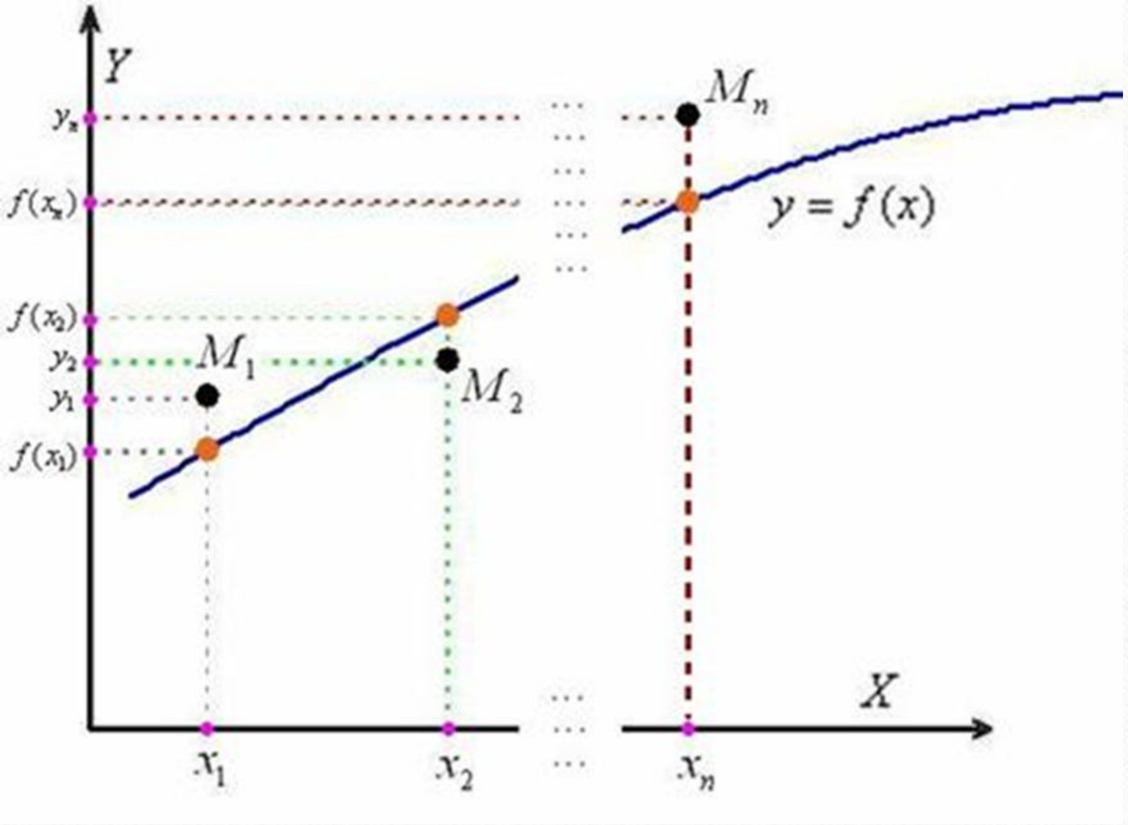
Из чего следует:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2$$

Какой класс функций выбрать для исследования?

$$F(a,b)=\sum_{i=1}^{n} e_i^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-f(x_i))^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-(ax_i+b))^2$$

Если точки $M_1, M_2, \dots, M_n$ имеют тенденцию располагаться по прямой, то следует искать уравнение прямой $\mathbf{y=f(x) = ax + b}$ с оптимальными значениями a и b. Задача найти ТАКИЕ коэффициенты a, b – чтобы сумма квадратов отклонений была наименьшей.



Сначала найдем частные производные 1-го порядка.
Согласно правилу линейности дифференцировать можно прямо под значком суммы:

Составим стандартную систему:

Сокращаем каждое уравнение на «двойку» и, кроме того, «разваливаем» суммы:

Примечание:

$$\sum_{i=1}^{n} b = b\sum_{i=1}^{n} 1 = b*(1+1+\dots+1) = bn$$

Перепишем систему в «прикладном» виде:

После чего начинает прорисовываться алгоритм решения нашей задачи:

1) Составляем простейшую систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными («а» и «бэ»). Систему решаем, в результате чего получаем стационарную точку

2) Проверяя достаточное условие экстремума, можно убедиться, что в данной точке функция достигает именно минимума.

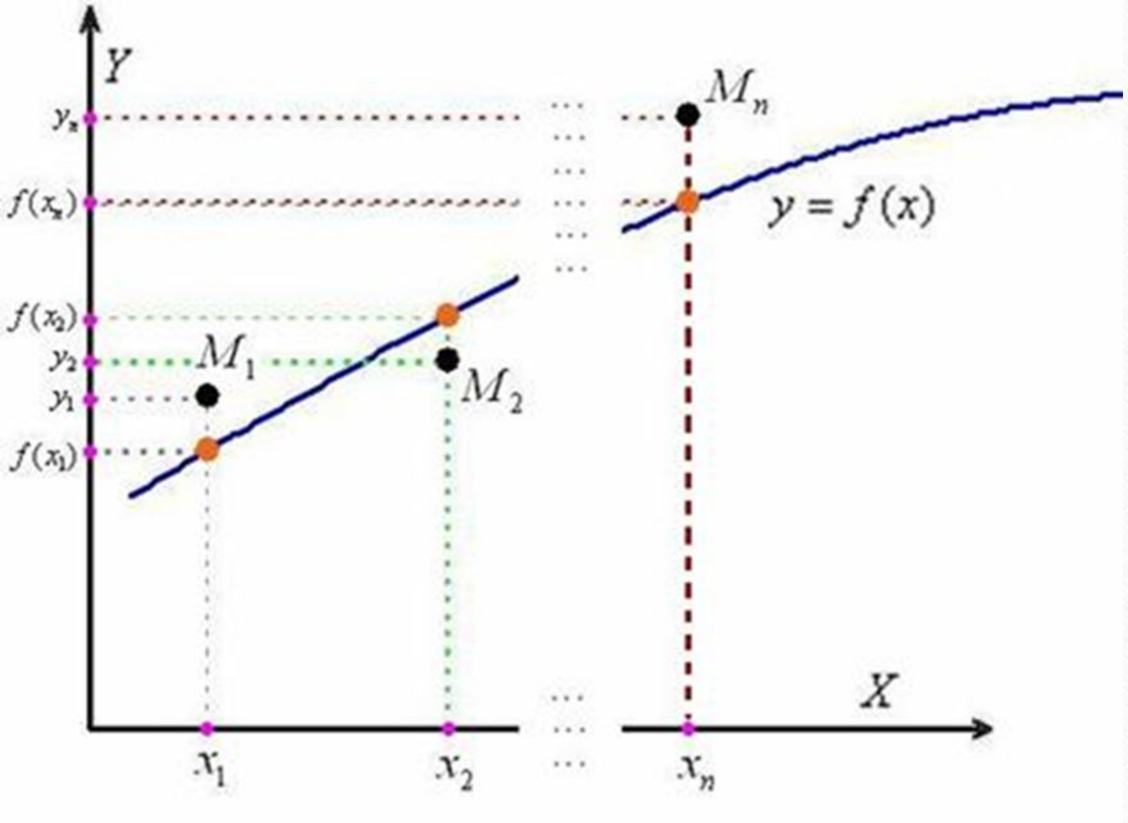
Делаем окончательный вывод:

$\mathbf{y=f(x) = ax + b}$

наилучшим образом приближает экспериментальные точки

$M_1; M_2;\ldots; M_n.$

Её график проходит максимально близко к этим точкам.



Задача 1

- В результате исследования взаимосвязи двух показателей, получены следующие пары чисел:

X	1	2	3	4	5
Y	5,3	6,3	4,8	3,8	3.3

Методом наименьших квадратов найти линейную функцию, которая наилучшим образом приближает эмпирические (опытные) данные. Сделать чертеж, на котором в декартовой прямоугольной системе координат построить экспериментальные точки $M_i(X_i;Y_i)$ и график аппроксимирующей функции y=f $(x) = ax + b$. Найти сумму квадратов отклонений между эмпирическими y_i и теоретическими $f(x_i)$ значениями.