



РАНХиГС

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

АСТРАХАНСКИЙ ФИЛИАЛ



Статистические методы исследования в экономике

Тема 2. Средние величины. Показатели
вариации

Средние величины. Показатели вариации

- **Средней величиной** в статистике называют обобщенный показатель, который характеризует типичный уровень варьирующего признака для качественно-однородной совокупности.

Сущность средних величин

Средние в статистике - это показатели, выражающие типичные размеры признака для данной совокупности. В них взаимополагаются индивидуальные отклонения, присущие отдельным единицам и показываются значения признака, характерные для всей совокупности.



Особенности средних величин:

- в средней отражается то общее, что скрыто в каждой единице совокупности;
- средняя устраняет индивидуальные различия у отдельных единиц совокупности;
- средняя обладает относительной устойчивостью, что необходимо для сравнения;
- средняя рассчитывается на единицу совокупности, что очень важно для проведения экономического анализа

Средние величины. Показатели вариации

4. Средние величины

Средняя величина – обобщающая характеристика совокупности по изучаемому признаку, отражает то типичное, что свойственно всем единицам совокупности.

В средних величинах погашаются индивидуальные отклонения. Благодаря этому выявляются закономерности, присущие массовым явлениям и не заметные в единичных фактах.

Условия применения средних:

- средняя рассчитывается для качественно-однородной совокупности;
- необходимо определять среднюю не только для однородной совокупности, но и для каждой группы;
- наряду с определением средней находится наибольшее и наименьшее значения признака совокупности;
- необходимо правильно выбрать вид средней величины.

Средние величины. Показатели вариации

- Выбор вида средней величины **зависит от исходных данных и заданий**, стоящих в задаче



- Средняя величина** – обобщающая количественная характеристика признака на единицу конкретной совокупности или группы

\bar{X}

Средние величины. Показатели вариации

Средние величины

Наименование	Простая форма	Взвешенная форма
Средняя арифметическая (СА)	$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$	$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f}$
Средняя квадратическая (СК)	$\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n}}$	$\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{\sum f}}$
Средняя гармоническая (СГар)	$\bar{x} = \frac{n}{\sum 1/x}$	$\bar{x} = \frac{M}{\sum M/x}$
Средняя геометрическая (СГеом)	$\bar{x} = \sqrt[n]{\prod x}$	$\bar{x} = \sqrt[n]{\prod x^f}$

Средние величины в статистическом анализе выполняют **две функции:**

- средние величины обобщают значение количественного признака по всем единицам совокупности;
- средние величины представляют типичный уровень признака в совокупности.

Средние величины. Показатели вариации

■ Средняя арифметическая величина

Средняя арифметическая

простая используется в тех случаях, когда варианты или варьирующие признаки встречаются только по одному разу и имеют одинаковый вес в совокупности.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

взвешенная используется, когда данные сгруппированы, а отдельные значения признака встречаются неодинаковое число раз.

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot f}{\sum f}$$

Средняя арифметическая величина

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

простая

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

взвешенная

Средние величины. Показатели вариации

- Средняя арифметическая величина – характеризует большую совокупность однородных явлений

Виды средних величин

Средняя арифметическая простая

равна частному от деления суммы индивидуальных значений признака на их количество:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{n}$$

где X – значение признака;

n – количество вариантов.

Средняя арифметическая простая

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

вычисляется, как сумма отдельных значений признака (x_i) делённая на их число (n)

Используется для расчёта среднего значения признака при известных индивидуальных значениях признака (для несгруппированных данных)

Средние величины. Показатели вариации

1

Предприятие	Численность промышленно- производственного персонала, чел.	Средняя зарботная плата на предприятии, руб.	$x_i * f_i$
А	1	2	3
1	540	2046	1104840
2	275	2220	610500
3	458	2234	1023172
4	312	2004	625248
5	204	2056	419424
Итого	1789		3783184

Средняя арифметическая взвешенная

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i}$$

Вычисляется, если имеются многократные повторения значения признака и совокупность разбита на группы, используется для расчёта среднего значения группировочного признака (при сгруппированных данных)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i * f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = 2114,69 \text{ руб.}$$

Средние величины. Показатели вариации

Средняя гармоническая –

это величина, обратная средней арифметической из обратных значений признака. Средняя гармоническая вычисляется в тех случаях, когда в качестве весов применяются не единицы совокупности, а произведение этих единиц на значения признака (то есть $M=x \cdot f$).

$$\bar{x} = \frac{\sum M}{\sum \frac{M}{x}}$$

Средняя гармоническая

Средняя взвешенная гармоническая величина применяется в тех случаях, когда не известны значения частот у вариант ряда, но имеются для каждого x_i произведения этих вариант на соответствующие им частоты, т.е.

$$x_i \cdot f_i = F_i$$

Величиной F_i может быть товарооборот по видам товаров при расчете средней их цены; фонды заработной платы у отдельных категорий работников при расчете средней заработной платы; стоимостные объемы сделок при покупке валют, ценных бумаг, биржевых продажах и т.д.

Средние величины. Показатели вариации

Магазин	Выручка от реализации сахара, тыс.руб.	Средняя цена за 1 кг реализованного сахара, руб.	$M_i \cdot \frac{1}{X_i}$
А	1	2	3
1	9,936	18	0,552
2	6,279	21	0,299
3	8,93	19	0,470
4	6,612	19	0,348
5	4,788	21	0,228
6	14,4942	17,4	0,833
Итого	53,0392		2,734

$$\bar{X}_{\text{выручка}} = \frac{\sum M_i}{n} = \frac{53,0392}{6} = 8,839 \text{ тыс.руб.}$$

Средние величины. Показатели вариации

СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ

ВИДЫ СРЕДНИХ ВЕЛИЧИН

- Средняя геометрическая

$$\bar{x}_{\text{геом}} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

где: x_1, x_2, \dots, x_n – варианты признака
n – число наблюдений

Среднее геометрическое значение случайных величин

Пример. Перевозка грузов по автотранспортному предприятию такова:

	Январь	Февраль	Март
Перевезено грузов, тыс. т	37,0	40,5	42,0

Определить среднемесячный темп роста объёма грузовых перевозок.

Решение: Коэффициенты роста объёма грузовых перевозок:

$$K_1 = \frac{40,5}{37,0} = 1,095 \quad K_2 = \frac{42,0}{40,5} = 1,037$$

Среднемесячный коэффициент роста определяется по формуле средней геометрической:

$$\bar{K} = \sqrt[3]{K_1 \times K_2} = \sqrt[3]{1,095 \times 1,037} = 1,066$$

или 106,6% (средний темп роста).

Средние величины. Показатели вариации

- Средняя хронологическая** – это средняя, исчисленная по совокупности значений показателя в разные моменты или периоды времени при условии равенства промежутков времени между ними

Средняя хронологическая.

$$\bar{X} = \frac{\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} + \frac{1}{2}x_n}{n-1}$$

x_i - значение признака в i -ый момент времени

Пример:

Дата	Количество рабочих, чел
1 января	121
1 февраля	125
1 марта	130
1 апреля	119

Средняя численность рабочих за первый квартал:

$$\bar{X} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 121 + 125 + 130 + \frac{1}{2} \cdot 119}{4-1} = 125 \text{ человек}$$

Средние величины. Показатели вариации

Структурные средние величины

Мода – значение изучаемого признака, повторяющееся с наибольшей частотой.

$$M_o = x_{M_o} + i_{M_o} \frac{(f_{M_o} - f_{M_o-1})}{(f_{M_o} - f_{M_o-1}) + (f_{M_o} - f_{M_o+1})}$$

Зарплата работников, тыс. рублей	Количество работников, чел.
15	10
20	8
24	11
28	9
30	4
35	5
50	1
70	1
Итого	49

Средние величины. Показатели вариации

Структурные или порядковые средние вариационного ряда

Мода (M_o) – это варианта, которая имеет наибольшую частоту.

Моду находят согласно следующим правилам

Например, в ряду значений 2, 6, 6, 8, 9, 9, 9, 10

модой является 9, потому что 9 встречается чаще любого другого числа.

В том случае, когда все значения в выборке встречаются одинаково часто, принято считать, что этот выборочный ряд не имеет моды.

Например: 5, 5, 6, 6, 7, 7 — в этой выборке моды нет.

Средние величины. Показатели вариации

Медиана распределения

Медиана - это численное значение признака у той единицы изучаемой совокупности, которая находится в середине ранжированного ряда. Медиана делит совокупность на две равные части. Первая половина единиц статистической совокупности (после ранжирования!) имеет значение варьирующего признака меньше, чем медиана, элементы из второй половины совокупности - больше.

Медиана – величина признака, которая делит упорядоченную последовательность его значений на две равные по численности части.

Иначе можно сказать, что медиана — это срединное значение ранжированного вариационного ряда.

11, 13, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 19.

18, 20, 23, 25, 25, 25, 25, 26, 32, 34, 34, 37.

$$\frac{25+25}{2} = 25$$

В **дискретном вариационном ряду** распределения определение медианы сводится к определению номера медианной единицы ряда по формуле:

$$N_{Me} = \frac{n+1}{2}$$

где n – число изучаемых единиц.

Средние величины. Показатели вариации

Медиана

Медианой называется срединная варианта упорядоченного вариационного ряда, расположенного в возрастающем или убывающем порядке (ранжированный вариационный ряд).

1. Нахождение медианы в дискретном ранжированном вариационном ряду.

Пример.

а) дан нечетный ранжированный вариационный ряд роста студенток:

156	158	160	161	166	168	172
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

$M_e = 161$; место медианы $N_{me} = (n+1)/2 = 4$.

б) дан четный ранжированный вариационный ряд роста студенток:

155	156	158	160	161	166	168	172
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

$$M_e = \frac{160 + 161}{2} = 160,5$$

Структурные средние(1)

Медиана Величина признака, которая делит упорядоченную последовательность его значений на две равные по численности части

$$M_e = X_{Me} + h_{Me} \cdot \frac{\frac{\sum m}{2} - S_{Me-1}}{m_{Me}}$$

где X_{Me} - нижняя граница медианного интервала;

h_{Me} - его величина;

$\frac{\sum m}{2}$ - половина от общего числа наблюдений или половина объема того показателя, который используется в качестве взвешивающего в формулах расчета средней величины (в абсолютном или относительном выражении);

S_{Me-1} - сумма наблюдений (или объема взвешивающего признака), накопленная до начала медианного интервала;

m_{Me} - число наблюдений или объем взвешивающего признака в медианном интервале (также в абсолютном либо относительном выражении).

Средние величины. Показатели вариации

Статистика

Расчет средней арифметической, моды и медианы по данным интервального ряда (сгруппированные данные)

Производительность труда на предприятии

Производительность труда, изделий в час X_i	Число работников f_i	Накопленная частота - F
0-10	10	10
10-20	30	40
20-30	25	65
30-40	20	85
40-50	15	100

$$\bar{X} = \frac{5 * 10 + 15 * 30 + 25 * 25 + 35 * 20 + 45 * 15}{100} = 25$$

$$M_o = A_0 + i \frac{f_{M_o} - f_{M_o-1}}{(f_{M_o} - f_{M_o-1}) + (f_{M_o} - f_{M_o+1})} \quad M_o = 10 + 10 \frac{30 - 10}{(30 - 10) + (30 - 25)} = 18$$

$$M_e = A_0 + i \frac{\frac{N+1}{2} - F_{M_e-1}}{f_{M_e}} \quad M_e = 20 + 10 \frac{\frac{100+1}{2} - 40}{25} = 24,2$$

Средние величины. Показатели вариации

ФОРМУЛЫ РАСЧЕТА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ВАРИАЦИИ

№ п/п	Показатель вариации	Формула расчета	Характеристика показателя
<i>Абсолютные показатели</i>			
1.	<i>Размах вариации</i>	$R = x_{\max} - x_{\min}$	Характеризует диапазон рассеивания значений признака X от минимального до максимального значений или амплитуду колебаний
2.	<i>Среднее абсолютное отклонение</i>	<p>а) простое</p> $\bar{d} = \frac{\sum x - \bar{x} }{n}$ <p>б) взвешенное</p> $\bar{d} = \frac{\sum x - \bar{x} \cdot f}{\sum f}$	Характеризует абсолютное отклонение значений признака X от средней величины X
3.	<i>Общая дисперсия или средний квадрат отклонений</i>	<p>а) простая</p> $\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}$ <p>Формулу простой дисперсии можно преобразовать следующим образом:</p> $\sigma^2 = x^2 - (\bar{x})^2$ <p>б) взвешенная</p> $\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 \cdot f}{\sum f}$	Характеризует площадь рассеивания значений признака X вокруг средней величины X
4.	<i>Среднее квадратическое (стандартное) отклонение</i>	$\sigma = \pm \sqrt{\sigma^2}$	Характеризует отклонение значений признака X в обе стороны от средней величины

Средние величины. Показатели вариации

ПОКАЗАТЕЛИ ВАРИАЦИИ И СПОСОБЫ ИХ РАСЧЕТА

Дисперсия D или σ^2

представляет собой средний квадрат отклонений индивидуальных значений признака от их средней величины и в зависимости от исходных данных вычисляется по формулам:

простой дисперсии:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

взвешенной дисперсии:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$$

Расчет дисперсии может быть упрощен.

В случае **равных интервалов** в вариационном ряду распределения используется способ отсчета от условного нуля (**способ моментов**).

Для его понимания необходимо знать **математические свойства дисперсии**.

Средние величины. Показатели вариации

Показатели вариации

- **Размах вариации** характеризует границы вариации изучаемого признака $R = X_{\max} - X_{\min}$
- **Средняя арифметическая** вариационного ряда:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \text{ или } \bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i}$$

- **Мода (M_o)** – варианта, которая чаще всего встречается в данной совокупности.
- **Медиана (M_e)** – варианта, которая находится в середине вариационного ряда. $N_{me} = \frac{n+1}{2}$

ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ ВАРИАЦИИ

Коэффициент осцилляции – процентное отношение размаха вариации к средней величине признака.

$$V_R = \frac{R}{\bar{X}} \cdot 100\%$$

Линейный коэффициент вариации – процентное отношение среднего линейного отклонения к средней величине признака.

$$V_d = \frac{\bar{d}}{\bar{X}} \cdot 100\%$$

Коэффициент вариации – процентное отношение среднего квадратического отклонения к средней величине признака.

$$V_\sigma = \frac{\sigma}{\bar{X}} \cdot 100\%$$

Средние величины. Показатели вариации

Пример. Расчет показателей вариации разными способами на примере данных о сменной выработке рабочих бригады, представленных интервальным рядом распределения:

Распределение рабочих по сменной выработке изделия А и расчетные значения для исчисления показателей вариации.

Группы рабочих по сменной выработке изделий, шт	Число рабочих, f	Середина интервала, x	Расчетные значения							
			xf	$(x - \bar{x})$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 f$	$x^2 f$	$x_1 = \frac{x - A}{i}$	$x_1 f$	$x_2 f$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
170-190	10	180	1800	-36	1296	12960	324000	-2	-20	40
190-210	20	200	4000	-16	256	5120	800000	-1	-20	20
210-230	50	220	11000	4	16	800	2420000	0	0	0
230-250	20	240	4800	24	576	11520	1152000	1	20	20
Итого	100	-	21600	-	-	30400	4696000	-	-20	80

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{21600}{100} = 216$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{304} = 17,44 \approx 17$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{\sum f} = \frac{30400}{100} = 304$$

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\% = \frac{17,44}{216} \times 100\% \approx 8\%$$





РАНХиГС

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

АСТРАХАНСКИЙ ФИЛИАЛ



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!