РАНХиГС
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

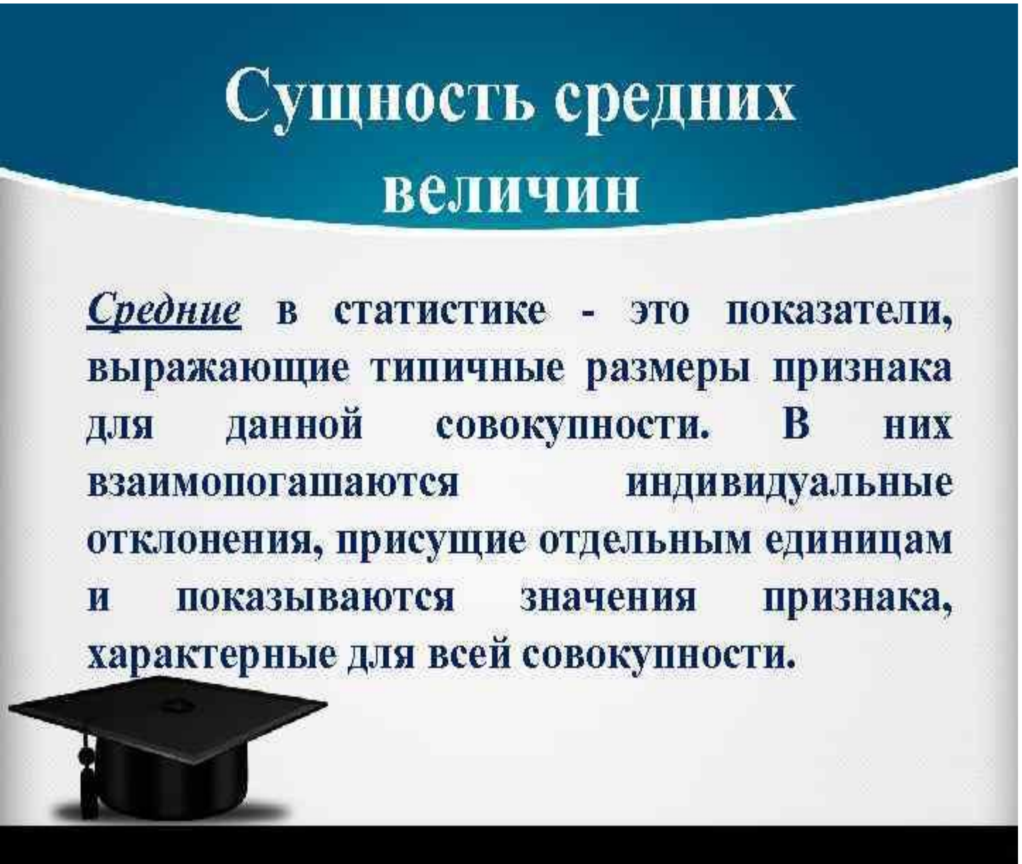
АСТРАХАНСКИЙ ФИЛИАЛ

# Статистические методы исследования в экономике

## Тема 2. Средние величины. Показатели вариации

# Средние величины. Показатели вариации

- **Средней величиной** в статистике называют обобщенный показатель, который характеризует типичный уровень варьирующего признака для качественно-однородной совокупности.




## Особенности средних величин:

- в средней отражается то общее, что скрыто в каждой единице совокупности;
- средняя устраняет индивидуальные различия у отдельных единиц совокупности;
- средняя обладает относительной устойчивостью, что необходимо для сравнения;
- средняя рассчитывается на единицу совокупности, что очень важно для проведения экономического анализа

# Средние величины. Показатели вариации

## 4. Средние величины

Средняя величина – обобщающая характеристика совокупности по изучаемому признаку, отражает то типичное, что свойственно всем единицам совокупности.

В средних величинах погашаются индивидуальные отклонения. Благодаря этому выявляются закономерности, присущие массовым явлениям и не заметные в единичных фактах.

**Условия применения средних:**

- средняя рассчитывается для качественно- однородной совокупности;
- необходимо определять среднюю не только для однородной совокупности, но и для каждой группы;
- наряду с определением средней находится наибольшее и наименьшее значения признака совокупности;
- необходимо правильно выбрать вид средней величины.

АСТРАХАНСКИЙ ФИЛИАЛ

# Средние величины. Показатели вариации

- Выбор вида средней величины **зависит от исходных данных и заданий**, стоящих в задаче


- **Средняя величина** – обобщающая количественная характеристика признака на единицу конкретной совокупности или группы

$$\bar{X}$$

# Средние величины. Показатели вариации

## Средние величины

| Наименование | Простая форма | Взвешенная форма |
|---|---|---|
| Средняя арифметическая (СА) | $\bar{x}=\frac{\sum x}{n}$ | $\bar{x}=\frac{\sum xf}{\sum f}$ |
| Средняя квадратическая (СК) | $\bar{x}=\sqrt{\frac{\sum x^2}{n}}$ | $\bar{x}=\sqrt{\frac{\sum x^2 f}{\sum f}}$ |
| Средняя гармоническая (СГар) | $\bar{x}=\frac{n}{\sum 1/x}$ | $\bar{x}=\frac{M}{\sum M/x}$ |
| Средняя геометрическая (СГеом) | $\bar{x}=\sqrt[n]{\prod x}$ | $\bar{x}=\sqrt[\sum f]{\prod x^f}$ |

**Средние величины** в статистическом анализе выполняют **две функции**:

- средние величины обобщают значение количественного признака по всем единицам совокупности;
- средние величины представляют типичный уровень признака в совокупности.

# Средние величины. Показатели вариации

## Средняя арифметическая величина

**Средняя арифмет ическая прост ая** используется в тех случаях, когда варианты или варьирующие признаки встречаются только по одному разу и имеют одинаковый вес в совокупности.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

**Средняя арифмет ическая взвешенная** используется, когда данные сгруппированы, а отдельные значения признака встречаются неодинаковое число раз.

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot f}{\sum f}$$

редняя арифметическая величина

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

простая

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

взвешенная

# Средние величины. Показатели вариации

- **Средняя арифметическая величина – характеризует большую совокупность однородных явлений**

## Виды средних величин

***Средняя арифметическая простая*** равна частному от деления суммы индивидуальных значений признака на их количество:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots X_n}{n},$$

где X – значение признака;

n – количество вариантов.

## Средняя арифметическая простая

$$\bar{x} = \frac{\sum_{1}^{n} x_i}{n}$$

вычисляется, как сумма отдельных значений признака ($x_i$) делённая на их число ($n$)

Используется для расчёта среднего значения признака при известных индивидуальных значениях признака (для несгруппированных данных)

Астафурова И.С.

# Средние величины. Показатели вариации

1

| Предприятие | Численность промышленно-производственного персонала, чел. | Средняя заработная плата на предприятии, руб. | $x_i{*}f_i$ |
|---|---|---|---|
| А | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 540 | 2046 | 1104840 |
| 2 | 275 | 2220 | 610500 |
| 3 | 458 | 2234 | 1023172 |
| 4 | 312 | 2004 | 625248 |
| 5 | 204 | 2056 | 419424 |
| Итого | 1789 | | 3783184 |

$$\bar{x} = \frac{\sum_{1}^{n} x_i * f_i}{\sum_{1}^{n} f_i} = 2114{,}69 \text{ руб.}$$

## Средняя арифметическая взвешенная

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i}$$

Вычисляется, если имеются многократные повторения значения признака и совокупность разбита на группы, используется для расчёта среднего значения группировочного признака (при сгруппированных данных)

Астафурова И.С.

# Средние величины. Показатели вариации

***Средняя гармоническая*** – это величина, обратная средней арифметической из обратных значений признака. Средняя гармоническая вычисляется в тех случаях, когда в качестве весов применяются не единицы совокупности, а произведение этих единиц на значения признака (то есть M=x*f).

$$\bar{x} = \frac{\sum M}{\sum \frac{M}{x}}$$

## Средняя гармоническая

**Средняя взвешенная гармоническая** величина применяется в тех случаях, когда не известны значения частот у вариант ряда, но имеются для каждого $x_i$ произведения этих вариант на соответствующие им частоты, т.е.

$$x_i \cdot f_i = F_i$$

Величиной $F_i$ может быть товарооборот по видам товаров при расчете средней их цены; фонды заработной платы у отдельных категорий работников при расчете средней заработной платы; стоимостные объемы сделок при покупке валют, ценных бумаг, биржевых продажах и т.д.

# Средние величины. Показатели вариации

| Магазин | Выручка от реализации сахара, тыс.руб. | Средняя цена за 1 кг реализованного сахара, руб. | $M_i \cdot \frac{1}{x_i}$ |
|---|---|---|---|
| А | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 9,936 | 18 | 0,552 |
| 2 | 6,279 | 21 | 0,299 |
| 3 | 8,93 | 19 | 0,470 |
| 4 | 6,612 | 19 | 0,348 |
| 5 | 4,788 | 21 | 0,228 |
| 6 | 14,4942 | 17,4 | 0,833 |
| Итого | 53,0392 | | 2,734 |

$$\bar{x}_{\text{выручка}} = \frac{\Sigma M_i}{n} = \frac{53{,}0392}{6} = 8{,}839 \, \text{тыс.руб.}$$

# Средние величины. Показатели вариации

СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ

## ВИДЫ СРЕДНИХ ВЕЛИЧИН

- Средняя геометрическая

$$\overline{x}_{геом} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

где: $x_1, x_2 \ldots x_n$ – варианты признака

$n$ – число наблюдений

## Среднее геометрическое значение случайных величин



**Пример.** Перевозка грузов по автотранспортному предприятию такова:

| | Январь | Февраль | Март |
|---|---|---|---|
| Перевезено грузов, тыс. т | 37,0 | 40,5 | 42,0 |

Определить среднемесячный темп роста объёма грузовых перевозок.

**Решение:** Коэффициенты роста объёма грузовых перевозок:

$$K_1 = \frac{40{,}5}{37{,}0} = 1{,}095 \qquad K_2 = \frac{42{,}0}{40{,}5} = 1{,}037$$

Среднемесячный коэффициент роста определяется по формуле средней геометрической:

$$\overline{K} = \sqrt[2]{K_1 \times K_2} = \sqrt[2]{1{,}095 \times 1{,}037} = 1{,}066$$

или 106,6% (средний темп роста).

# Средние величины. Показатели вариации

- **Средняя хронологическая – это средняя, исчисленная по совокупности значений показателя в разные моменты или периоды времени при условии равенства промежутков времени между датами**

## Средняя хронологическая.

$$\bar{X} = \frac{\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + \frac{1}{2}x_n}{n-1}$$

$x_i$ - *значение признака в i-ый момент времени*

***Пример:***

| *Дата* | *Количество рабочих, чел* |
|---|---|
| *1 января* | *121* |
| *1 февраля* | *125* |
| *1 марта* | *130* |
| *1 апреля* | *119* |

***Средняя численность рабочих за первый квартал:***

$$\bar{X} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 121 + 125 + 130 + \frac{1}{2}\cdot 119}{4-1} = 125 \text{ человек}$$

# Средние величины. Показатели вариации


| Зарплата работников, тыс. рублей | Количество работников, чел. |
|---|---|
| 15 | 10 |
| 20 | 8 |
| 24 | 11 |
| 28 | 9 |
| 30 | 4 |
| 35 | 5 |
| 50 | 1 |
| 70 | 1 |
| Итого | 49 |

# Средние величины. Показатели вариации

**Структурные или порядковые средние вариационного ряда**

**Мода** (Мо)– это варианта, которая имеет наибольшую частоту.

Моду находят согласно следующим правилам:

например, в ряду значений **2, 6, 6, 8, 9, 9, 9, 10**

модой является 9, потому что 9 встречается чаще любого другого числа.

в том случае, когда все значения в выборке встречаются одинаково часто, принято считать, что этот выборочный ряд не имеет моды.

Например: 5, 5, 6, 6, 7, 7 — в этой выборке моды нет.

# Средние величины. Показатели вариации

## Медиана распределения

Медиана - это численное значение признака у той единицы изучаемой совокупности, которая находится в середине ранжированного ряда. Медиана делит совокупность на две равные части. Первая половина единиц статистической совокупности (после ранжирования!) имеет значение варьирующего признака меньше, чем медиана, элементы из второй половины совокупности - больше.

***Медиана*** **– величина признака, которая делит упорядоченную последовательность его значений на две равные по численности части.**

Иначе можно сказать, что медиана — это серединное значение ранжированного вариационного ряда.

11, 13, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 19.

***18, 20, 23, 25, 25, 25, 25, 26, 32, 34, 34, 37.***

$$\frac{25+25}{2}=25$$

В ***дискретном вариационном ряду*** распределения определение медианы сводится к определению номера медианной единицы ряда по формуле:

$$N_{Me}=\frac{n+1}{2}$$

где ***n*** – число изучаемых единиц.

# Средние величины. Показатели вариации

## Медиана

*Медианой* называется серединная варианта упорядоченного вариационного ряда, расположенного в возрастающем или убывающем порядке (ранжированный вариационный ряд).

1. Нахождение медианы в *дискретном ранжированном вариационном ряду.*

Пример.

а) дан нечетный ранжированный вариационный ряд роста студенток:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 156 | 158 | 160 | 161 | 166 | 168 | 172 |

$M_e=161$; место медианы $N_{me}=(n+1)/2=4$.

б) дан четный ранжированный вариационный ряд роста студенток:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 155 | 156 | 158 | 160 | 161 | 166 | 168 | 172 |

$$M_e = \frac{160+161}{2} = 160{,}5$$

32

## Структурные средние(1)

**Медиана** Величина признака, которая делит упорядоченную последовательность его значений на две равные по численности части

$$Me = X_{Me} + h_{Me} \cdot \frac{\frac{\sum m}{2} - S_{Me-1}}{m_{Me}}$$

*где XMe - нижняя граница медианного интервала;*

*hMe - его величина;*

*m2- половина от общего числа наблюдений или половина объема того показателя, который используется в качестве взвешивающего в формулах расчета средней величины (в абсолютном или относительном выражении);*

*SMe-1 - сумма наблюдений (или объема взвешивающего признака), накопленная до начала медианного интервала;*

*mMe - число наблюдений или объем взвешивающего признака в медианном интервале (также в абсолютном либо относительном выражении).*

# Средние величины. Показатели вариации

Статистика

## Расчет средней арифметической, моды и медианы по данным интервального ряда (сгруппированные данные)

**Производительность труда на предприятии**

| Производительность труда, изделий в час $X_i$ | Число работников $f_i$ | Накопленная частота - $F$ |
|---|---|---|
| 0-10 | 10 | 10 |
| 10-20 | 30 | 40 |
| 20-30 | 25 | 65 |
| 30-40 | 20 | 85 |
| 40-50 | 15 | 100 |

$$\bar{X} = \frac{5*10+15*30+25*25+35*20+45*15}{100} = 25$$

$$Mo = A_0 + i\frac{f_{Mo} - f_{Mo-1}}{(f_{Mo} - f_{Mo-1}) + (f_{Mo} - f_{Mo+1})} \quad Mo = 10 + 10\frac{30 - 10}{(30 - 10) + (30 - 25)} = 18$$

$$Me = A_0 + i\frac{\frac{N+1}{2} - F_{Me-1}}{f_{Me}} \quad Me = 20 + 10\frac{\frac{100+1}{2} - 40}{25} = 24{,}2$$

Dr. Igor Arzhenovskiy

INTERNATIONAL INSTITUTE

# Средние величины. Показатели вариации

## ФОРМУЛЫ РАСЧЕТА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ВАРИАЦИИ

| № п/п | Показатель вариации | Формула расчета | Характеристика показателя |
|---|---|---|---|
| | | *Абсолютные показатели* | |
| 1. | *Размах вариации* | $R = x_{max} - x_{min}$ | Характеризует диапазон рассеивания значений признака X от минимального до максимального значений или амплитуду колебаний |
| 2. | *Среднее линейное отклонение* | а) *простое* $\bar{d} = \frac{\sum \lvert x-\bar{x} \rvert}{n}$ б) *взвешенное* $\bar{d} = \frac{\sum \lvert x-\bar{x} \rvert \cdot f}{\sum f}$ | Характеризует абсолютное отклонение значений признака X от средней величины $\bar{x}$ |
| 3. | *Общая дисперсия или средний квадрат отклонений* | а) *простая* $\sigma^2 = \frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n}$ Формулу простой дисперсии можно преобразовать следующим образом: $\sigma^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$ б) *взвешенная* $\sigma^2 = \frac{\sum (x-\bar{x})^2 \cdot f}{\sum f}$ | Характеризует площадь рассеивания значений признака X вокруг средней величины $\bar{x}$ |
| 4. | *Среднее квадратическое (стандартное) отклонение* | $\sigma = \pm\sqrt{\sigma^2}$ | Характеризует отклонение значений признака $x$ X в обе стороны от средней величины |

# Средние величины. Показатели вариации

## ПОКАЗАТЕЛИ ВАРИАЦИИ И СПОСОБЫ ИХ РАСЧЕТА

**Дисперсия** $D$ *или* $\sigma^2$

представляет собой средний квадрат отклонений индивидуальных значений признака от их средней величины и в зависимости от исходных данных вычисляется по формулам:

простой дисперсии:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

взвешенной дисперсии:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

Расчет дисперсии может быть упрощен.

В случае равных интервалов в вариационном ряду распределения используется способ отсчета от условного нуля (способ моментов).

Для его понимания необходимо знать математические свойства дисперсии.

# Средние величины. Показатели вариации

## Показатели вариации

- ***Размах вариации*** характеризует границы вариации изучаемого признака $R = X_{max} - X_{min}$
- ***Средняя арифметическая*** вариационного ряда:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \text{ или } \bar{x} = \frac{\sum x_i * f_i}{\sum f_i}$$

- ***Мода ($M_o$)*** – варианта, которая чаще всего встречается в данной совокупности.
- ***Медиана ($M_e$)*** – варианта, которая находится в середине вариационного ряда. $N_{me} = \frac{n+1}{2}$

## ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ ВАРИАЦИИ

**Коэффициент осцилляции** – процентное отношение размаха вариации к средней величине признака.

$$V_R = \frac{R}{\bar{X}} \cdot 100\%$$

**Линейный коэффициент вариации** – процентное отношение среднего линейного отклонения к средней величине признака.

$$V_{\bar{d}} = \frac{\bar{d}}{\bar{X}} \cdot 100\%$$

**Коэффициент вариации** – процентное отношение среднего квадратического отклонения к средней величине признака.

$$V_\sigma = \frac{\sigma}{\bar{X}} \cdot 100\%$$

# Средние величины. Показатели вариации

*Пример.* Расчет показателей вариации разными способами на примере данных о сменной выработке рабочих бригады, представленных интервальным рядом распределения:

**Распределение рабочих по сменной выработке изделия А и расчетные значения для исчисления показателей вариации.**

| Группы рабочих по сменной выработке изделий, шт | Число рабочих, $f$ | Середина интервала, $x$ | Расчетные значения | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $xf$ | $(x-\bar{x})$ | $(x-\bar{x})^2$ | $(x-\bar{x})^2 f$ | $x^2 f$ | $x_1=\frac{x-A}{i}$ | $x_1 f$ | $x_2 f$ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 170-190 | 10 | 180 | 1800 | -36 | 1296 | 12960 | 324000 | -2 | -20 | 40 |
| 190-210 | 20 | 200 | 4000 | -16 | 256 | 5120 | 800000 | -1 | -20 | 20 |
| 210-230 | 50 | 220 | 11000 | 4 | 16 | 800 | 2420000 | 0 | 0 | 0 |
| 230-250 | 20 | 240 | 4800 | 24 | 576 | 11520 | 1152000 | 1 | 20 | 20 |
| Итого | 100 | - | 21600 | - | - | 30400 | 4696000 | - | -20 | 80 |

$$\bar{x}=\frac{\sum xf}{\sum f}=\frac{21600}{100}=216$$

$$\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{304}=17,44\approx 17$$

$$\sigma^2=\frac{\sum (x-\bar{x})^2 f}{\sum f}=\frac{30400}{100}=304$$

$$V=\frac{\sigma}{x}\times 100\%=\frac{17,44}{216}\times 100\%\approx 8\%$$

РАНХиГС
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**АСТРАХАНСКИЙ ФИЛИАЛ**

# СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!