



**РАНХиГС**  
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА  
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ  
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**АСТРАХАНСКИЙ ФИЛИАЛ**



## **Статистические методы исследования в экономике**

**Тема 2. Средние величины. Показатели  
вариации**

## Средние величины. Показатели вариации

- **Средней величиной** в статистике называют обобщенный показатель, который характеризует типичный уровень варьирующего признака для качественно-однородной совокупности.

### Сущность средних величин

Средние в статистике - это показатели, выражающие типичные размеры признака для данной совокупности. В них взаимопогашаются индивидуальные отклонения, присущие отдельным единицам и показываются значения признака, характерные для всей совокупности.



### Особенности средних величин:

- в средней отражается то общее, что скрыто в каждой единице совокупности;
- средняя устраняет индивидуальные различия у отдельных единиц совокупности;
- средняя обладает относительной устойчивостью, что необходимо для сравнения;
- средняя рассчитывается на единицу совокупности, что очень важно для проведения экономического анализа

## Средние величины. Показатели вариации

### 4. Средние величины

Средняя величина – обобщающая характеристика совокупности по изучаемому признаку, отражает то типичное, что свойственно всем единицам совокупности.

В средних величинах погашаются индивидуальные отклонения. Благодаря этому выявляются закономерности, присущие массовым явлениям и не заметные в единичных фактах.

#### Условия применения средних:

- средняя рассчитывается для качественно-однородной совокупности;
- необходимо определять среднюю не только для однородной совокупности, но и для каждой группы;
- наряду с определением средней находится наибольшее и наименьшее значения признака совокупности;
- необходимо правильно выбрать вид средней величины.

## Средние величины. Показатели вариации

- Выбор вида средней величины **зависит от исходных данных и заданий**, стоящих в задаче



- Средняя величина** – обобщающая количественная характеристика признака на единицу конкретной совокупности или группы

$\bar{X}$



## Средние величины. Показатели вариации

### Средние величины

| Наименование                      | Простая форма                         | Взвешенная форма                             |
|-----------------------------------|---------------------------------------|--|
| Средняя арифметическая<br>(СА)    | $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$          | $\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f}$           |
| Средняя квадратическая<br>(СК)    | $\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n}}$ | $\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{\sum f}}$ |
| Средняя гармоническая<br>(СГар)   | $\bar{x} = \frac{n}{\sum 1/x}$        | $\bar{x} = \frac{M}{\sum M/x}$               |
| Средняя геометрическая<br>(СГеом) | $\bar{x} = \sqrt[n]{\prod x}$         | $\bar{x} = \sqrt[n]{\prod x^f}$              |

Средние величины в статистическом анализе выполняют **две функции:**

- средние величины обобщают значение количественного признака по всем единицам совокупности;
- средние величины представляют типичный уровень признака в совокупности.

## Средние величины. Показатели вариации

### ■ Средняя арифметическая величина

#### **Средняя арифметическая**

**простая** используется в тех случаях, когда варианты или варьирующие признаки встречаются только по одному разу и имеют одинаковый вес в совокупности.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

**Средняя арифметическая взвешенная** используется, когда данные сгруппированы, а отдельные значения признака встречаются неодинаковое число раз.

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot f}{\sum f}$$

#### Средняя арифметическая величина

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

простая

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

взвешенная

## Средние величины. Показатели вариации

- Средняя арифметическая величина – характеризует большую совокупность однородных явлений

### Виды средних величин

#### *Средняя арифметическая простая*

равна частному от деления суммы индивидуальных значений признака на их количество:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{n}$$

где  $X$  – значение признака;

$n$  – количество вариантов.

### Средняя арифметическая простая

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

вычисляется, как сумма отдельных значений признака ( $x_i$ ) делённая на их число ( $n$ )

Используется для расчёта среднего значения признака при известных индивидуальных значениях признака (для несгруппированных данных)



## Средние величины. Показатели вариации

1

| Предприятие | Численность<br>промышленно-<br>производственного<br>персонала, чел. | Средняя<br>зарботная<br>плата на<br>предприятии,<br>руб. | $x_i * f_i$ |
|-------------|---|--|-------------|
| А           | 1   | 2  | 3           |
| 1           | 540   | 2046   | 1104840     |
| 2           | 275   | 2220   | 610500      |
| 3           | 458   | 2234   | 1023172     |
| 4           | 312   | 2004   | 625248      |
| 5           | 204   | 2056   | 419424      |
| Итого       | 1789  |  | 3783184     |

## Средняя арифметическая взвешенная

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i}$$

Вычисляется, если имеются многократные повторения значения признака и совокупность разбита на группы, используется для расчёта среднего значения группировочного признака (при сгруппированных данных)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i * f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = 2114 ,69 \text{ руб.}$$



## Средние величины. Показатели вариации

### **Средняя гармоническая –**

это величина, обратная средней арифметической из обратных значений признака. Средняя гармоническая вычисляется в тех случаях, когда в качестве весов применяются не единицы совокупности, а произведение этих единиц на значения признака (то есть  $M=x \cdot f$ ).

$$\bar{x} = \frac{\sum M}{\sum \frac{M}{x}}$$

### **Средняя гармоническая**

**Средняя взвешенная гармоническая** величина применяется в тех случаях, когда не известны значения частот у вариант ряда, но имеются для каждого  $x_i$  произведения этих вариант на соответствующие им частоты, т.е.

$$x_i \cdot f_i = F_i$$

Величиной  $F_i$  может быть товарооборот по видам товаров при расчете средней их цены; фонды заработной платы у отдельных категорий работников при расчете средней заработной платы; стоимостные объемы сделок при покупке валют, ценных бумаг, биржевых продажах и т.д.

## Средние величины. Показатели вариации

| Магазин      | Выручка от реализации сахара, тыс.руб. | Средняя цена за 1 кг реализованного сахара, руб. | $M_i \cdot \frac{1}{x_i}$ |
|--------------|--|--|---------------------------|
| А            | 1                                      | 2  | 3                         |
| 1            | 9,936                                  | 18   | 0,552                     |
| 2            | 6,279                                  | 21   | 0,299                     |
| 3            | 8,93                                   | 19   | 0,470                     |
| 4            | 6,612                                  | 19   | 0,348                     |
| 5            | 4,788                                  | 21   | 0,228                     |
| 6            | 14,4942                                | 17,4   | 0,833                     |
| <b>Итого</b> | <b>53,0392</b>                         |  | <b>2,734</b>              |

$$\bar{x}_{\text{выручка}} = \frac{\sum M_i}{n} = \frac{53,0392}{6} = 8,839 \text{ тыс.руб.}$$

## Средние величины. Показатели вариации

### СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ

#### ВИДЫ СРЕДНИХ ВЕЛИЧИН

- Средняя геометрическая

$$\bar{x}_{\text{геом}} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

где:  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – варианты признака  
n – число наблюдений

### Среднее геометрическое значение случайных величин

**Пример.** Перевозка грузов по автотранспортному предприятию такова:

|                           | Январь | Февраль | Март |
|---------------------------|--------|---------|------|
| Перевезено грузов, тыс. т | 37,0   | 40,5    | 42,0 |

Определить среднемесячный темп роста объёма грузовых перевозок.

**Решение:** Коэффициенты роста объёма грузовых перевозок:

$$K_1 = \frac{40,5}{37,0} = 1,095 \quad K_2 = \frac{42,0}{40,5} = 1,037$$

Среднемесячный коэффициент роста определяется по формуле средней геометрической:

$$\bar{K} = \sqrt[3]{K_1 \times K_2} = \sqrt[3]{1,095 \times 1,037} = 1,066$$

или 106,6% (средний темп роста).



## Средние величины. Показатели вариации

- Средняя хронологическая – это средняя, исчисленная по совокупности значений показателя в разные моменты или периоды времени при условии равенства промежутков времени между ними

### Средняя хронологическая.

$$\bar{X} = \frac{\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} + \frac{1}{2}x_n}{n-1}$$

$x_i$  - значение признака в  $i$ -ый момент времени

**Пример:**

| Дата      | Количество рабочих,<br>чел |
|-----------|----------------------------|
| 1 января  | 121                        |
| 1 февраля | 125                        |
| 1 марта   | 130                        |
| 1 апреля  | 119                        |

**Средняя  
численность  
рабочих за  
первый квартал:**

$$\bar{X} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 121 + 125 + 130 + \frac{1}{2} \cdot 119}{4-1} = 125 \text{ человек}$$

## Средние величины. Показатели вариации

### Структурные средние величины

**Мода** – значение изучаемого признака, повторяющееся с наибольшей частотой.

$$M_o = x_{M_o} + i_{M_o} \frac{(f_{M_o} - f_{M_o-1})}{(f_{M_o} - f_{M_o-1}) + (f_{M_o} - f_{M_o+1})}$$

| Зарплата работников, тыс. рублей | Количество работников, чел. |
|----------------------------------|-----------------------------|
| 15                               | 10                          |
| 20                               | 8                           |
| 24                               | 11                          |
| 28                               | 9                           |
| 30                               | 4                           |
| 35                               | 5                           |
| 50                               | 1                           |
| 70                               | 1                           |
| Итого                            | 49                          |

## Средние величины. Показатели вариации

### Структурные или порядковые средние вариационного ряда

**Мода ( $M_o$ )** – это варианта, которая имеет наибольшую частоту.

Моду находят согласно следующим правилам

Например, в ряду значений 2, 6, 6, 8, 9, 9, 9, 10

модой является 9, потому что 9 встречается чаще любого другого числа.

В том случае, когда все значения в выборке встречаются одинаково часто, принято считать, что этот выборочный ряд не имеет моды.

Например: 5, 5, 6, 6, 7, 7 — в этой выборке моды нет.



## Средние величины. Показатели вариации

### Медиана распределения

Медиана - это численное значение признака у той единицы изучаемой совокупности, которая находится в середине ранжированного ряда. Медиана делит совокупность на две равные части. Первая половина единиц статистической совокупности (после ранжирования!) имеет значение варьирующего признака меньше, чем медиана, элементы из второй половины совокупности - больше.

**Медиана** – величина признака, которая делит упорядоченную последовательность его значений на две равные по численности части.

Иначе можно сказать, что медиана — это срединное значение ранжированного вариационного ряда.

11, 13, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 19.

18, 20, 23, 25, 25, 25, 25, 26, 32, 34, 34, 37.

$$\frac{25+25}{2} = 25$$

В **дискретном вариационном ряду** распределения определение медианы сводится к определению номера медианной единицы ряда по формуле:

$$N_{Me} = \frac{n+1}{2}$$

где  $n$  – число изучаемых единиц.



## Средние величины. Показатели вариации

### Медиана

Медианой называется срединная варианта упорядоченного вариационного ряда, расположенного в возрастающем или убывающем порядке (ранжированный вариационный ряд).

1. Нахождение медианы в дискретном ранжированном вариационном ряду.

Пример.

а) дан нечетный ранжированный вариационный ряд роста студенток:

|     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 156 | 158 | 160 | 161 | 166 | 168 | 172 |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

$M_e = 161$ ; место медианы  $N_{me} = (n+1)/2 = 4$ .

б) дан четный ранжированный вариационный ряд роста студенток:

|     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 155 | 156 | 158 | 160 | 161 | 166 | 168 | 172 |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

$$M_e = \frac{160 + 161}{2} = 160,5$$

### Структурные средние(1)

**Медиана** Величина признака, которая делит упорядоченную последовательность его значений на две равные по численности части

$$M_e = X_{Me} + h_{Me} \cdot \frac{\frac{\sum m}{2} - S_{Me-1}}{m_{Me}}$$

где  $X_{Me}$  - нижняя граница медианного интервала;

$h_{Me}$  - его величина;

$\frac{\sum m}{2}$  - половина от общего числа наблюдений или половина объема того показателя, который используется в качестве взвешивающего в формулах расчета средней величины (в абсолютном или относительном выражении);

$S_{Me-1}$  - сумма наблюдений (или объема взвешивающего признака), накопленная до начала медианного интервала;

$m_{Me}$  - число наблюдений или объем взвешивающего признака в медианном интервале (также в абсолютном либо относительном выражении).

## Средние величины. Показатели вариации

Статистика

Расчет средней арифметической, моды и медианы по данным интервального ряда (сгруппированные данные)

Производительность труда на предприятии

| Производительность труда, изделий в час $X_i$ | Число работников $f_i$ | Накопленная частота - $F$ |
|---|------------------------|---------------------------|
| 0-10  | 10                     | 10                        |
| 10-20   | 30                     | 40                        |
| 20-30   | 25                     | 65                        |
| 30-40   | 20                     | 85                        |
| 40-50   | 15                     | 100                       |

$$\bar{X} = \frac{5 * 10 + 15 * 30 + 25 * 25 + 35 * 20 + 45 * 15}{100} = 25$$

$$M_o = A_0 + i \frac{f_{M_o} - f_{M_o-1}}{(f_{M_o} - f_{M_o-1}) + (f_{M_o} - f_{M_o+1})} \quad M_o = 10 + 10 \frac{30 - 10}{(30 - 10) + (30 - 25)} = 18$$

$$M_e = A_0 + i \frac{\frac{N+1}{2} - F_{M_e-1}}{f_{M_e}} \quad M_e = 20 + 10 \frac{\frac{100+1}{2} - 40}{25} = 24,2$$



## Средние величины. Показатели вариации

### ФОРМУЛЫ РАСЧЕТА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ВАРИАЦИИ

| № п/п                        | Показатель вариации                                    | Формула расчета  | Характеристика показателя  |
|------------------------------|--|--|--|
| <i>Абсолютные показатели</i> |  |  |  |
| 1.                           | <i>Размах вариации</i>                                 | $R = x_{\max} - x_{\min}$  | Характеризует диапазон рассеивания значений признака X от минимального до максимального значений или амплитуду колебаний |
| 2.                           | <i>Среднее абсолютное отклонение</i>                   | <p>а) простое</p> $\bar{d} = \frac{\sum  x - \bar{x} }{n}$ <p>б) взвешенное</p> $\bar{d} = \frac{\sum  x - \bar{x}  \cdot f}{\sum f}$  | Характеризует абсолютное отклонение значений признака X от средней величины X  |
| 3.                           | <i>Общая дисперсия или средний квадрат отклонений</i>  | <p>а) простая</p> $\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}$ <p>Формулу простой дисперсии можно преобразовать следующим образом:</p> $\sigma^2 = x^2 - (\bar{x})^2$ <p>б) взвешенная</p> $\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 \cdot f}{\sum f}$ | Характеризует площадь рассеивания значений признака X вокруг средней величины X  |
| 4.                           | <i>Среднее квадратическое (стандартное) отклонение</i> | $\sigma = \pm \sqrt{\sigma^2}$   | Характеризует отклонение значений признака X в обе стороны от средней величины   |

## Средние величины. Показатели вариации

### ПОКАЗАТЕЛИ ВАРИАЦИИ И СПОСОБЫ ИХ РАСЧЕТА

Дисперсия  $D$  или  $\sigma^2$

представляет собой средний квадрат отклонений индивидуальных значений признака от их средней величины и в зависимости от исходных данных вычисляется по формулам:

простой дисперсии:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

взвешенной дисперсии:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$$

Расчет дисперсии может быть упрощен.

В случае **равных интервалов** в вариационном ряду распределения используется способ отсчета от условного нуля (**способ моментов**).

Для его понимания необходимо знать **математические свойства дисперсии**.

## Средние величины. Показатели вариации

### Показатели вариации

- **Размах вариации** характеризует границы вариации изучаемого признака  $R = X_{max} - X_{min}$
- **Средняя арифметическая** вариационного ряда:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \text{ или } \bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i}$$

- **Мода ( $M_o$ )** – варианта, которая чаще всего встречается в данной совокупности.
- **Медиана ( $M_e$ )** – варианта, которая находится в середине вариационного ряда.  $N_{me} = \frac{n+1}{2}$

### ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ ВАРИАЦИИ

**Коэффициент осцилляции** – процентное отношение размаха вариации к средней величине признака.

$$V_R = \frac{R}{\bar{X}} \cdot 100\%$$

**Линейный коэффициент вариации** – процентное отношение среднего линейного отклонения к средней величине признака.

$$V_d = \frac{\bar{d}}{\bar{X}} \cdot 100\%$$

**Коэффициент вариации** – процентное отношение среднего квадратического отклонения к средней величине признака.

$$V_\sigma = \frac{\sigma}{\bar{X}} \cdot 100\%$$



## Средние величины. Показатели вариации

*Пример.* Расчет показателей вариации разными способами на примере данных о сменной выработке рабочих бригады, представленных интервальным рядом распределения:

Распределение рабочих по сменной выработке изделия А и расчетные значения для исчисления показателей вариации.

| Группы рабочих по сменной выработке изделий, шт | Число рабочих, $f$ | Середина интервала, $x$ | Расчетные значения |                 |                   |                     |         |                         |         |         |
|---|--------------------|-------------------------|--------------------|-----------------|-------------------|---------------------|---------|-------------------------|---------|---------|
|   |                    |                         | $xf$               | $(x - \bar{x})$ | $(x - \bar{x})^2$ | $(x - \bar{x})^2 f$ | $x^2 f$ | $x_1 = \frac{x - A}{i}$ | $x_1 f$ | $x_2 f$ |
| 1   | 2                  | 3                       | 4                  | 5               | 6                 | 7                   | 8       | 9                       | 10      | 11      |
| 170-190   | 10                 | 180                     | 1800               | -36             | 1296              | 12960               | 324000  | -2                      | -20     | 40      |
| 190-210   | 20                 | 200                     | 4000               | -16             | 256               | 5120                | 800000  | -1                      | -20     | 20      |
| 210-230   | 50                 | 220                     | 11000              | 4               | 16                | 800                 | 2420000 | 0                       | 0       | 0       |
| 230-250   | 20                 | 240                     | 4800               | 24              | 576               | 11520               | 1152000 | 1                       | 20      | 20      |
| Итого   | 100                | -                       | 21600              | -               | -                 | 30400               | 4696000 | -                       | -20     | 80      |

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{21600}{100} = 216$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{304} = 17,44 \approx 17$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{\sum f} = \frac{30400}{100} = 304$$

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\% = \frac{17,44}{216} \times 100\% \approx 8\%$$





# РАНХиГС

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА  
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ  
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

## АСТРАХАНСКИЙ ФИЛИАЛ



# СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!