

Некоторые часто встречающиеся дискретные распределения

*Проводится n испытаний по схеме Бернулли
с вероятностью успеха p .*

X -число успехов.

*Тогда говорят, что X имеет биномиальное
распределение с параметрами n, p*

X принимает значения: $0, 1, 2, \dots, n$

$$p(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

ПРИМЕР.

Стрелок производит 3 выстрела по мишени. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,6. X -число попаданий. Найти распределение X .

Найдем MX и DX для биномиального распределения

Введем для каждого $i=1,2,\dots,n$ случайную величину Z_i .

$$Z_i = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } p \\ 0, & \text{с вероятностью } q \end{cases}$$

Тогда

$$X = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

Тогда математическое ожидание случайной величины X :

$$MX = MZ_1 + MZ_2 + \dots + MZ_n$$

Найдем математическое ожидание Z_i

Ряд распределения Z_i имеет вид:

Z_i	0	1
P_i	$1-p$	p

Тогда $MZ_i = p$ и $MX = np$.

Найдем дисперсию DZ_i

$$DZ_i = MZ_i^2 - M(Z_i)^2$$

Z_i	0	1
P_i	1-p	p

Z_i^2	0	1
P_i	1-p	p

$$MZ_i^2 = p$$

$$DZ_i = p - p^2 = p(1 - p)$$

Так как случайные величины Z_i независимы, то

$$\begin{aligned}DX &= DZ_1 + DZ_2 + \dots + DZ_n = \\ &= np(1 - p) = npq\end{aligned}$$

**Таким образом, для случайной величины,
распределенной по биномиальному закону,**

$$MX = n \cdot p$$

$$DX = n \cdot p \cdot q$$

Распределение Пуассона

Пусть X – число наступлений редкого события за некоторый промежуток времени.

Известно среднее число наступлений этого события за этот промежуток времени a

*Тогда X может принимать значения
 $0, 1, 2, \dots, k, \dots$*

$$p(X = k) = e^{-a} \cdot \frac{a^k}{k!}$$

Говорят, что X имеет распределение Пуассона с параметром a .



ПРИМЕР.

При работе оборудования время от времени возникают сбои. В среднем за месяц возникает 3 сбоя. Пусть X -число сбоев за месяц. Найти распределение X .

Вычислить вероятности событий:

A - за месяц будет не больше 2-х сбоев;

B - в течение месяца произойдет хотя бы один сбой.



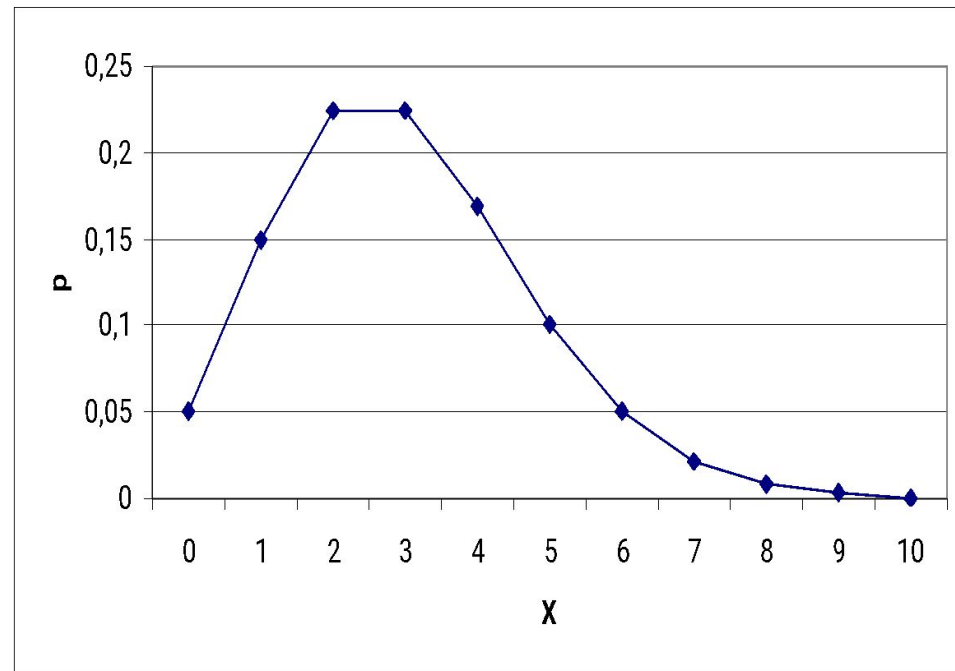
X	p
0	0,049787
1	0,149361
2	0,224042
3	0,224042
4	0,168031
5	0,100819
6	0,050409
7	0,021604
8	0,008102
9	0,002701
10	0,00081

$$=3^A2/\Phi A K T P(A2)*E X P(-3)$$



X	p
0	0,049787
1	0,149361
2	0,224042
3	0,224042
4	0,168031
5	0,100819
6	0,050409
7	0,021604
8	0,008102
9	0,002701
10	0,00081

$$=3^{A2}/\Phi A K T P(A2)*EXP(-3)$$



X	p
0	0,049787
1	0,149361
2	0,224042
3	0,224042
4	0,168031
5	0,100819
6	0,050409
7	0,021604
8	0,008102
9	0,002701
10	0,00081

} 0,42319



Для распределения Пуассона $MX=a$, $DX=a$



Биномиальное распределение и распределение Пуассона связаны: распределение Пуассона является предельным для биномиального.

Если случайная величина X распределена по биномиальному закону, и число опытов n - велико, а вероятность события в каждом опыте p мала, то биномиальное распределение можно приближенно заменить пуассоновским при $a=np$:

$$p(X = k) \approx \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$




$$a = n \cdot p$$



ПРИМЕР.

По цели производится 50 независимых выстрелов. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.04. Используя предельное свойство биномиального распределения, найти вероятность того, что в цель попадет один снаряд.



Решение:

Событие A - попадание при одном выстреле.

Вероятность $p(A)=0.04$. Всего производится серия таких выстрелов: $n=50$.

Так как p достаточно мало, а n - велико, биномиальное распределение приближенно можно заменить распределением Пуассона.

Найдем параметр a распределения Пуассона:

$$a = n \cdot p = 50 \cdot 0.04 = 2$$

Тогда вероятность $p_{50}(1)$ того, что из 50-ти выстрелов будет одно попадание по формуле Пуассона будет:

$$p_{50}(1) = \frac{2^1}{1!} e^{-2} = 0,271$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Проводится n независимых испытаний, в каждом из которых возможны 2 исхода: успех с вероятностью p и неудача с вероятностью $1-p$. Испытания проводятся до первого успеха. Пусть X – число проведенных испытаний. Тогда X имеет геометрическое распределение.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

X принимает значения $1, 2, 3, \dots, k, \dots$

$$p(X = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p$$

Можно показать, что :

$$MX = \frac{1}{p}$$

$$DX = \frac{1-p}{p^2}$$

ПРИМЕР.

Игральная кость бросается до первого появления шестерки. X - число сделанных бросков. Найти распределение X , MX , DX

Решение.

X	p
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{5}{36}$
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	$\frac{20}{743}$
12	$\frac{19}{847}$
13	$\frac{2}{107}$

$$p = \left(\frac{5}{6}\right)^{(A2-1)} \cdot \frac{1}{6}$$

