

# Некоторые часто встречающиеся дискретные распределения

*Проводится  $n$  испытаний по схеме Бернулли  
с вероятностью успеха  $p$ .*

*$X$ -число успехов.*

*Тогда говорят, что  $X$  имеет биномиальное  
распределение с параметрами  $n, p$*

*$X$  принимает значения:  $0, 1, 2, \dots, n$*

$$p(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

# ПРИМЕР.

*Стрелок производит 3 выстрела по мишени. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,6.  $X$ -число попаданий. Найти распределение  $X$ .*

**Найдем  $MX$  и  $DX$  для биномиального распределения**

**Введем для каждого  $i=1,2,\dots,n$  случайную величину  $Z_i$ .**

$$Z_i = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } p \\ 0, & \text{с вероятностью } q \end{cases}$$

**Тогда**

$$X = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

Тогда математическое ожидание случайной величины  $X$ :

$$MX = MZ_1 + MZ_2 + \dots + MZ_n$$

Найдем математическое ожидание  $Z_i$

Ряд распределения  $Z_i$  имеет вид:

$Z_i$	$0$	$1$
$P_i$	$1-p$	$p$

Тогда  $MZ_i = p$  и  $MX = np$ .

Найдем дисперсию  $DZ_i$

$$DZ_i = MZ_i^2 - M(Z_i)^2$$

$Z_i$	0	1
$P_i$	1-p	p

$Z_i^2$	0	1
$P_i$	1-p	p

$$MZ_i^2 = p$$

$$DZ_i = p - p^2 = p(1 - p)$$

Так как случайные величины  $Z_i$  независимы, то

$$\begin{aligned}DX &= DZ_1 + DZ_2 + \dots + DZ_n = \\ &= np(1 - p) = npq\end{aligned}$$

**Таким образом, для случайной величины,  
распределенной по биномиальному закону,**

$$MX = n \cdot p$$

$$DX = n \cdot p \cdot q$$

# Распределение Пуассона

*Пусть  $X$  – число наступлений редкого события за некоторый промежуток времени.*

*Известно среднее число наступлений этого события за этот промежуток времени  $a$*

*Тогда  $X$  может принимать значения  
 $0, 1, 2, \dots, k, \dots$*

$$p(X = k) = e^{-a} \cdot \frac{a^k}{k!}$$

*Говорят, что  $X$  имеет распределение Пуассона с параметром  $a$ .*





# ***ПРИМЕР.***

*При работе оборудования время от времени возникают сбои. В среднем за месяц возникает 3 сбоя. Пусть  $X$ -число сбоев за месяц. Найти распределение  $X$ .*

*Вычислить вероятности событий:*

*$A$  - за месяц будет не больше 2-х сбоев;*

*$B$  - в течение месяца произойдет хотя бы один сбой.*



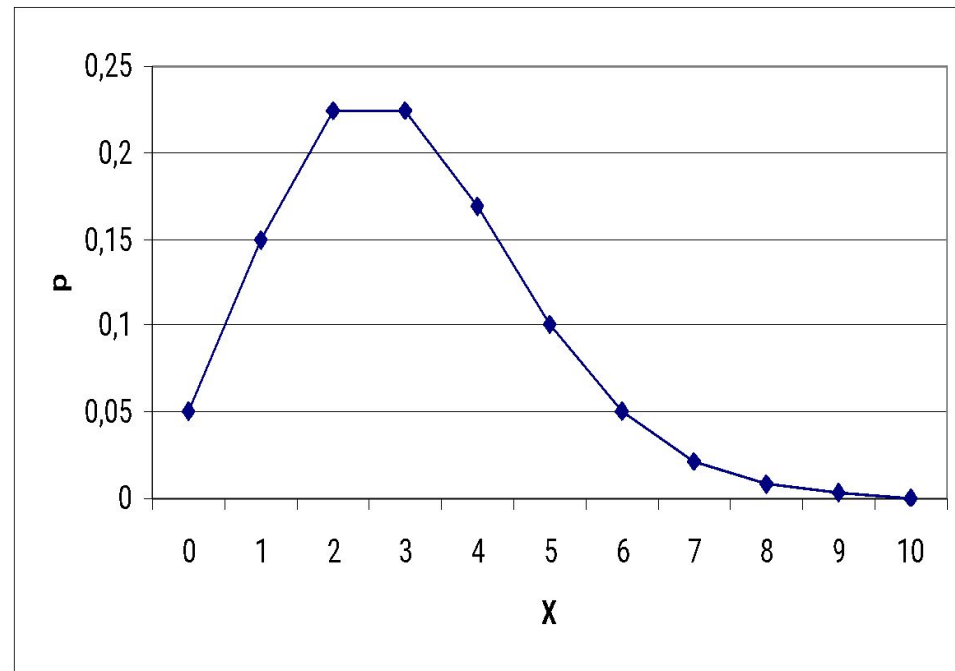
X	p
0	0,049787
1	0,149361
2	0,224042
3	0,224042
4	0,168031
5	0,100819
6	0,050409
7	0,021604
8	0,008102
9	0,002701
10	0,00081

$$=3^A2/\Phi A K T P(A2)*E X P(-3)$$



X	p
0	0,049787
1	0,149361
2	0,224042
3	0,224042
4	0,168031
5	0,100819
6	0,050409
7	0,021604
8	0,008102
9	0,002701
10	0,00081

$$=3^{A2}/\Phi A K T P(A2)*EXP(-3)$$



X	p
0	0,049787
1	0,149361
2	0,224042
3	0,224042
4	0,168031
5	0,100819
6	0,050409
7	0,021604
8	0,008102
9	0,002701
10	0,00081

} 0,42319



**Для распределения Пуассона  $MX=a$ ,  $DX=a$**



Биномиальное распределение и распределение Пуассона связаны: распределение Пуассона является предельным для биномиального.

*Если случайная величина  $X$  распределена по биномиальному закону, и число опытов  $n$  - велико, а вероятность события в каждом опыте  $p$  мала, то биномиальное распределение можно приближенно заменить пуассоновским при  $a=np$ :*

$$p(X = k) \approx \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$




$$a = n \cdot p$$



# ***ПРИМЕР.***

*По цели производится 50 независимых выстрелов. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.04. Используя предельное свойство биномиального распределения, найти вероятность того, что в цель попадет один снаряд.*



# ***Решение:***

**Событие  $A$  - попадание при одном выстреле.**

**Вероятность  $p(A)=0.04$ . Всего производится серия таких выстрелов:  $n=50$ .**

**Так как  $p$  достаточно мало, а  $n$  - велико, биномиальное распределение приближенно можно заменить распределением Пуассона.**

**Найдем параметр  $a$  распределения Пуассона:**

$$a = n \cdot p = 50 \cdot 0.04 = 2$$



Тогда вероятность  $p_{50}(1)$  того, что из 50-ти выстрелов будет одно попадание по формуле Пуассона будет:

$$p_{50}(1) = \frac{2^1}{1!} e^{-2} = 0,271$$

# ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

**Проводится  $n$  независимых испытаний, в каждом из которых возможны 2 исхода: успех с вероятностью  $p$  и неудача с вероятностью  $1-p$ . Испытания проводятся до первого успеха. Пусть  $X$  – число проведенных испытаний. Тогда  $X$  имеет геометрическое распределение.**

# ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

*X* принимает значения  $1, 2, 3, \dots, k, \dots$

$$p(X = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p$$

**Можно показать, что :**

$$MX = \frac{1}{p}$$

$$DX = \frac{1-p}{p^2}$$

# ПРИМЕР.

*Игральная кость бросается до первого появления шестерки.  $X$ - число сделанных бросков. Найти распределение  $X$ ,  $MX$ ,  $DX$*

# Решение.

X	p
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{5}{36}$
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	$\frac{20}{743}$
12	$\frac{19}{847}$
13	$\frac{2}{107}$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^{(A2-1)} \cdot \frac{1}{6}$$

