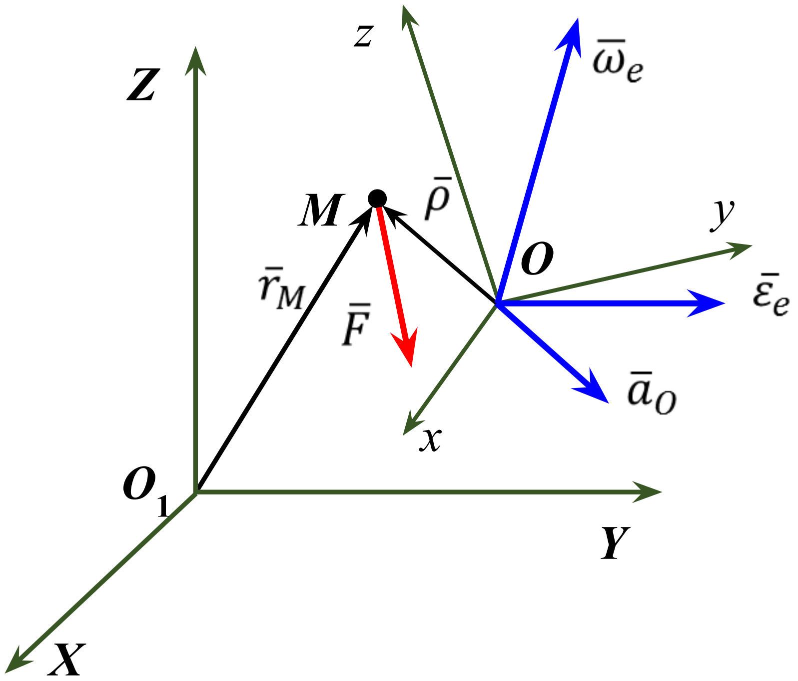
Динамика относительного движения точки.

МГТУ им. Н. Э. Баумана

Система отсчета, движущаяся с ускорением относительно другой, инерциальной системы отсчета называется ***неинерциальной*** .

Рассмотрим движение точки ***M*** под действием силы $\bar{F}$ по отношению с двум системам отсчета (сложное движение.)



Система O_1XYZ – инерциальная.

Движение неинерциальной системы $Oxyz$ (переносное движение для точки М) задано и не зависит от движения точки.

Приложенные к точке силы в соответствии с основным уравнением динамики точки определяют ее абсолютное движение (относительно инерциальной системы O_1XYZ)

Рассмотрим движение точки относительно неинерциальной системы $Oxyz$ (относительное движение).

Основное уравнение в инерциальной системе отсчета:

$$m\bar{a} = \bar{F}.$$

В соответствии с кинематической теоремой Кориолиса:

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_к \,,$$

в общем случае переносного движения

$$\bar{a}_e = \bar{a}_O + \bar{\varepsilon}_e \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_e \times (\omega_e \times \bar{\rho}),$$

$$\bar{a}_к = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r.$$

Динамическая теорема Кориолиса.

Подставляя выражение для абсолютного ускорения в основное уравнение динамики точки, получим:

$$m(\bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_к) = \bar{F}.$$

Разрешим полученное выражение относительно ускорения $\bar{a}_r$:

$$m\bar{a}_r = \bar{F} - (m\bar{a}_e) - (m\bar{a}_к).$$

Обозначим:

$\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e$ – ***переносная сила инерции***

$\bar{\Phi}_к = -m\bar{a}_к$ – ***кориолисова сила инерции***

$$\boxed{m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_к}$$

– ***динамическая теорема Кориолиса*** или основное уравнение динамики относительного движения точки.

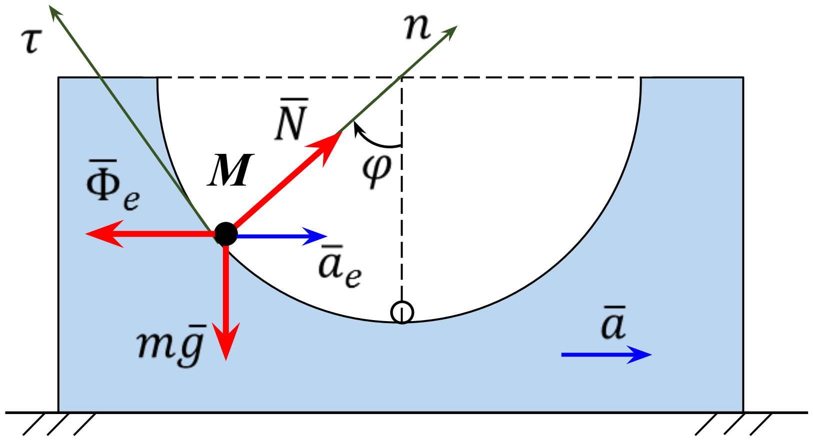
Материальная точка движется относительно неинерциальной системы отсчета так же как и относительно инерциальной , если к приложенным активным силам и реакциям связей прибавить переносную и кориолисову силы инерции.

Силы инерции $\bar{\Phi}_e$ и $\bar{\Phi}_e$ являются поправками на неинерциальность системы отсчета.

В неинерциальной системе отсчета точка приобретает ускорение не только в результате действия приложенных к ней сил, но и в результате ускоренного движения самой системы отсчета.

Пример 1.

Материальная точка массой $\boldsymbol{m}$ движется по гладкой поверхности бака, имеющего форму полусферы радиуса $\boldsymbol{R}$. В начальный момент времени точка находилась в нижнем положении в состоянии относительного покоя. Бак начинает двигаться поступательно и прямолинейно по горизонтальной плоскости с постоянным ускорением $\boldsymbol{a}$. Определить при каком значении ускорения $\boldsymbol{a}$ точка достигнет верхнего края бака, а также силу давления точки на бак в этом положении.



Решение:

Свяжем подвижную систему координат с баком.

Переносное движение поступательное следовательно:

$$\bar{a}_\text{к} = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r = 0; \;\; \bar{\Phi}_\text{к} = -m\bar{a}_\text{к} = 0; \;\; \bar{\Phi}_e = -m\bar{a}$$

$$m\bar{a}_r = m\bar{g} + \bar{\Phi}_e + \bar{N}$$

$$s = r\varphi, \;\; a_r{}^\tau = \ddot{s}, \quad v_r = \dot{s}$$

$$\tau: \quad m\ddot{s} = \Phi_e cos\varphi - mgsin\varphi$$

$$n: \quad \frac{m\dot{s}^2}{r} = N - \Phi_e sin\varphi - mgcos\varphi$$

Сделаем замену переменных:

$$\ddot{s} = \frac{d\dot{s}}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = \frac{\dot{s}d\dot{s}}{ds} = \frac{d\dot{s}^2}{2Rd\varphi}$$

$$m\frac{d\dot{s}^2}{2Rd\varphi} = macos\varphi - mgsin\varphi; \qquad d\dot{s}^2 = 2Rd\varphi(acos\varphi - gsin\varphi);$$

Пример 1(продолжение).

$$\dot{s}^2 = 2R(a sin\varphi + g cos\varphi) + C;$$

Н.У. $\quad t = 0: \quad \varphi(0) = 0, \qquad \dot{s}(0) = 0$

$$0 = 2Rg + C \quad \Rightarrow \quad C = -2Rg$$

$$v_r{}^2 = 2R(a sin\varphi + g cos\varphi) - 2Rg$$

Условие достижения точкой верхнего края бака: при $\varphi = \frac{\pi}{2}, \qquad v_r = 0.$

$$0 = 2Ra - 2gR \Rightarrow \quad a = g.$$

Для определения давления точки на бак, воспользуемся уравнением:

$$n: \quad \frac{m v_r{}^2}{r} = N - \Phi_e sin\varphi - mg cos\varphi$$

$$N = \Phi_e sin\varphi + mg cos\varphi - \frac{m v_r{}^2}{r}$$

при $\varphi = \frac{\pi}{2}, \qquad v_r = 0, \qquad a = g: \qquad N = \Phi_e = mg.$

Частные случаи движения системы отсчета.

1. Система отсчета движется поступательно.

$$\bar{\omega}_e = 0,\ \bar{\Phi}_\text{к} = -2m\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r = 0$$

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{\Phi}_e$$

2. Система отсчета движется поступательно, равномерно и прямолинейно.

$$\bar{a}_e = \bar{a}_O + \bar{\varepsilon}_e \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_e \times (\omega_e \times \bar{\rho}), \qquad \bar{a}_\text{к} = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r$$

Движение равномерное и прямолинейное $\Rightarrow$ $\bar{a}_O = 0$.

Движение поступательное $\Rightarrow$ $\bar{\omega}_e = 0,\ \bar{\varepsilon}_e = 0.$

$$\bar{\Phi}_e = 0, \qquad \bar{\Phi}_\text{к} = 0$$

$m\bar{a}_r = \bar{F}$ – инерциальная система отсчета.

Любая система отсчета, которая движется поступательно, равномерно и прямолинейно относительно другой инерциальной системы отсчета, также является инерциальной.

Принцип относительности Галилея-Ньютона:

Никаким механическим экспериментом невозможно определить, находится ли данная система отсчета в состоянии покоя или совершает поступательное, равномерное и прямолинейное движение по отношению к инерциальной системе отсчета.

Частные случаи движения точки.

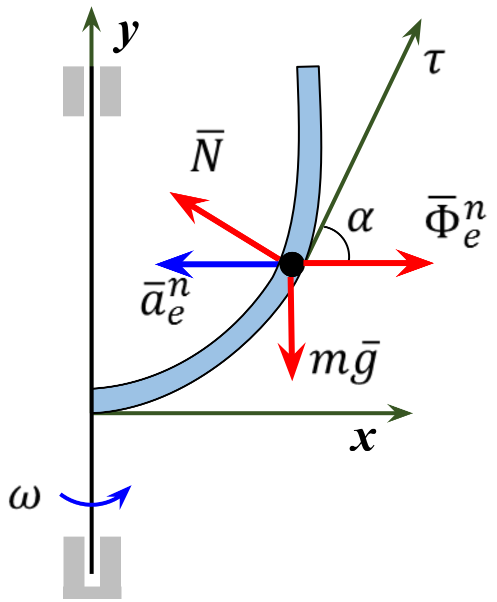
1. Точка движется равномерно и прямолинейно относительно подвижной системы (относительное движение по инерции).

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_к\,; \qquad \bar{v}_r = \overline{const}, \qquad \Rightarrow \quad \bar{a}_r = \frac{\tilde{d}\,\bar{v}_r}{dt} = 0, \quad \bar{F} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_к = 0.$$

2. Относительный покой.

$$\bar{a}_r = 0, \bar{v}_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\Phi}_к = -2m\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r = 0$$

$\bar{F} + \bar{\Phi}_e = 0$ – условие относительного равновесия точки.



Пример: Определить, какую форму должна иметь гладкая трубка, вращающаяся относительно вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω, чтобы материальная точка, помещенная в любую точку этой трубки, оставалась в состоянии покоя относительно трубки.

Решение. $\quad \Phi_e^n = m\omega^2 x$

Условие относительного равновесия точки: $\quad \bar{N} + m\bar{g} + \bar{\Phi}_e = 0$

$$\tau: \quad \Phi_e^n \cos\alpha - mg\sin\alpha = 0$$

$$m\omega^2 x\cos\alpha - mg\sin\alpha = 0; \quad \omega^2 x\cos\alpha = g\sin\alpha$$

$$tg\alpha = \frac{\omega^2 x}{g} = \frac{dy}{dx}$$

$$dy = \frac{\omega^2 x dx}{g} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{\omega^2 x^2}{2g}$$

Равновесие и движение точки относительно Земли.

Система отсчета, связанная с Землей не является инерциальной. Земля движется относительно гелиоцентрической системы отсчета как свободное твердое тело, участвуя в следующих движениях:

– обращается вокруг Солнца по эллиптической орбите, близкой к круговой;

– вращается вокруг собственной оси с практически постоянной скоростью.

Переносная сила инерции точки в системе отсчета, связанная с Землей:

$$\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e = -m(\bar{a}_O + \bar{a}_e^n)$$

Ускорением от орбитального движения Земли вокруг Солнца ($a_O \approx 5{,}9 \cdot 10^{-3}$ м/с^2) можно пренебречь.

Тогда переносная сила инерции для точки расположенной на широте φ:

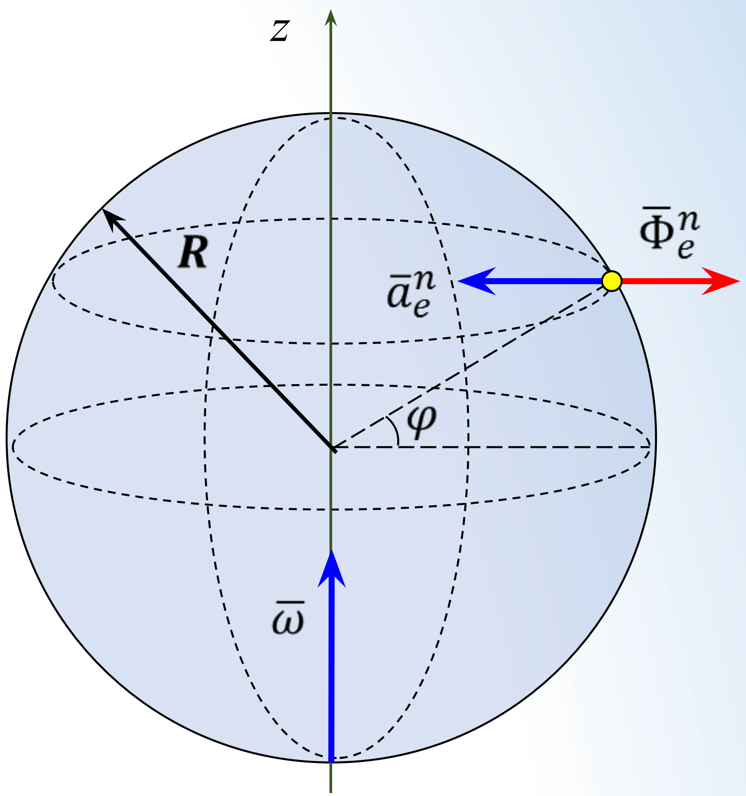
$$\Phi_e^n = m\omega^2 R cos\varphi$$

$$\omega = 7{,}29 \cdot 10^{-5} \text{рад/с}$$

$$R = 6{,}34 \cdot 10^6 \text{м}$$

$$a_e^n = 3{,}3 \cdot 10^{-2} cos\varphi \text{ м/с}^2$$

Максимальное значение переносная сила инерции имеет на экваторе.



Равновесие и движение точки относительно Земли.

Вес тела.

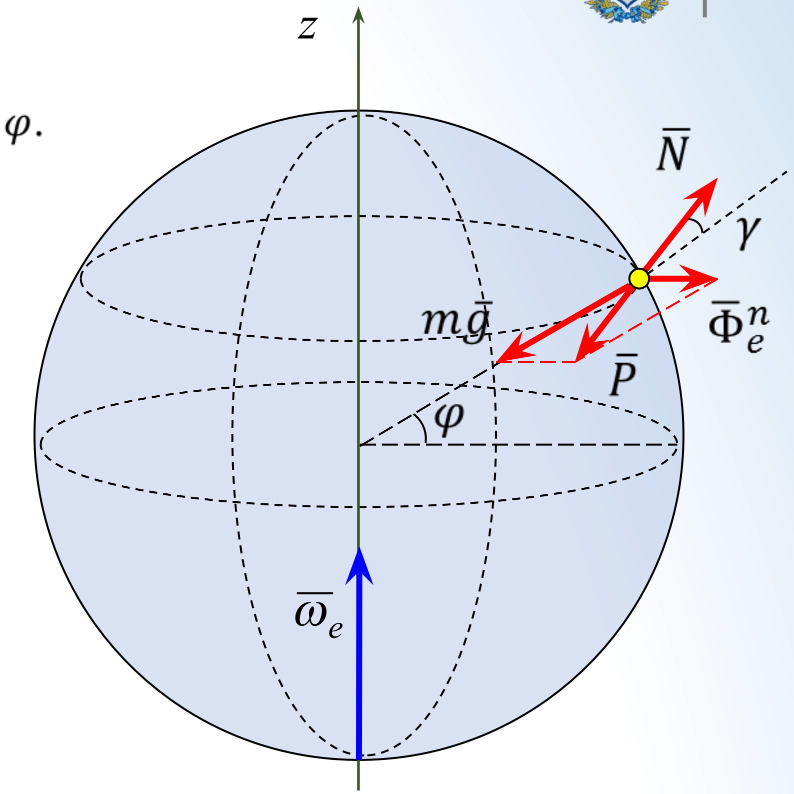
Рассмотрим равновесие точки, расположенной на поверхности Земли на широте φ.

$$\bar{a}_r = 0; \quad \bar{v}_r = 0; \quad \bar{N} + m\bar{g} + \bar{\Phi}_e^n = 0$$

$$\bar{N} = -(m\bar{g} + \bar{\Phi}_e^n) = -\bar{P}$$

$\bar{P} = m\bar{g} + \bar{\Phi}_e^n$ – вес тела.

$$\frac{\Phi_e^n}{mg} = \frac{\omega^2 R\cos\varphi}{g} \approx 0{,}00343\cos\varphi$$



Линия действия силы веса определяет местную вертикаль (т.е. линию отвеса в данной точке поверхности Земли).

Отклонение веса тела от направления силы притяжения:

$$\frac{\sin\gamma}{\Phi_e^n} = \frac{\sin\varphi}{P}; \qquad \sin\gamma \approx \frac{\Phi_e^n}{mg}\sin\varphi = 0{,}001715\sin 2\varphi$$

При $\varphi = 60^\circ, \qquad \gamma \approx 0{,}085^\circ.$

Минимальное значение вес тела имеет на экваторе.

Стартуя с «Морского старта» в районе экватора ракета «Зенит-2» может вывести на низкую опорную орбиту почти 15000 кг полезной нагрузки, а при старте с Байконура – 13700 кг.

Равновесие и движение точки относительно Земли.

Отклонение падающего тела к востоку.

Пусть тело падает на Землю с некоторой высоты *H* под действием силы тяжести.

Скорость тела $\bar{v}_r$ направлена по вертикали к центру Земли.

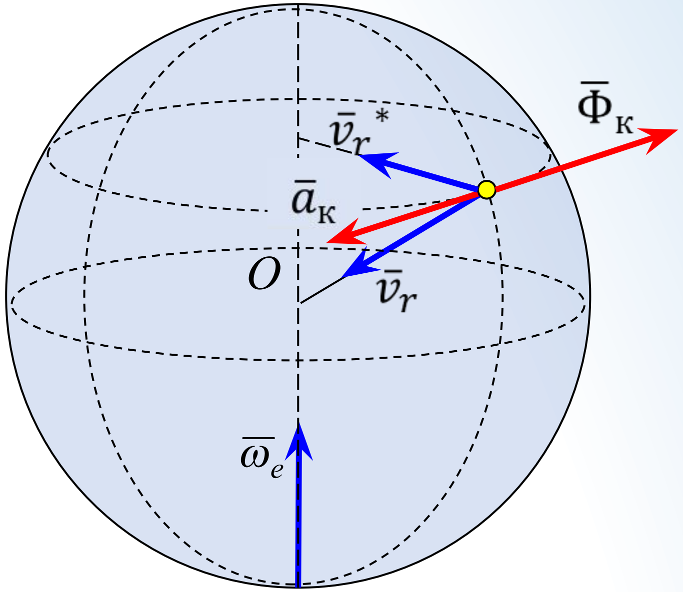
Тогда ускорение Кориолиса

$$\bar{a}_\text{к} = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r$$

направлено по касательной к параллели на запад.

А сила инерции Кориолиса – по касательной к параллели на восток.

При падении с высоты 100м, на широте 50°, отклонение составляет 0,01 м.

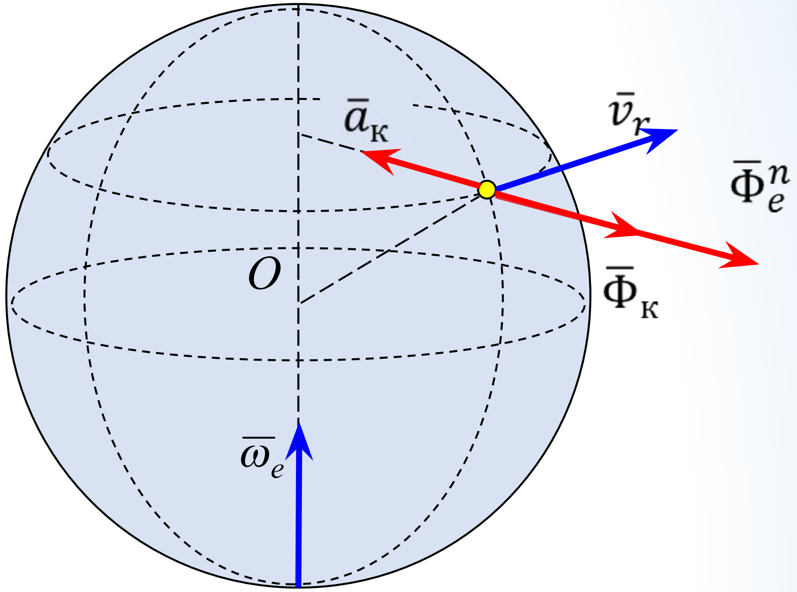


Движение вдоль параллели.

При движении точки вдоль параллели, сила инерции Кориолиса направлена вдоль одной линии с переносной силой инерции.

При движении на запад эти силы направлены в одну сторону, при движении на восток – в противоположные.

При движении точки по параллели изменяется только ее вес.

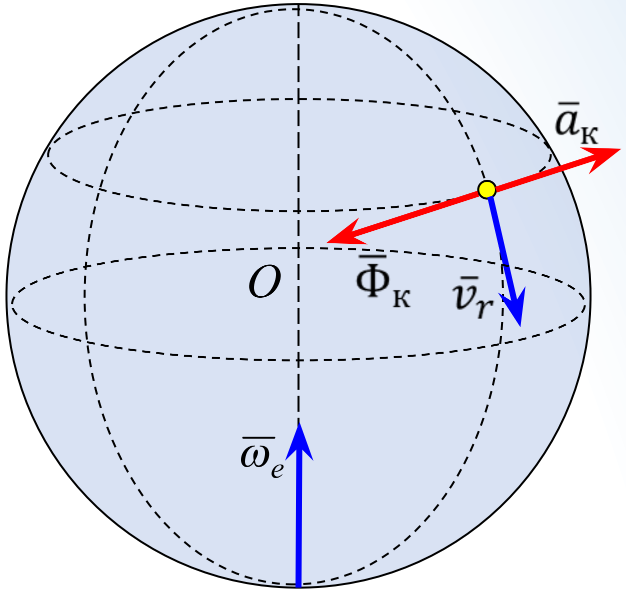


Равновесие и движение точки относительно Земли.

Движение вдоль меридиана.

При движении тела вдоль меридиана в Северном полушарии, ускорение Кориолиса направлено влево от направления ее движения, а сила инерции Кориолиса – вправо.

В Северном полушарии тело, движущееся вдоль земной поверхности, будет отклоняться вправо от направления движения. В Южном полушарии отклонение будет происходить влево.



Закон Бэра. Правый берег рек в Северном полушарии более подмыт, чем левый на прямых участках рек. В Южном полушарии левый берег подмыт сильнее.