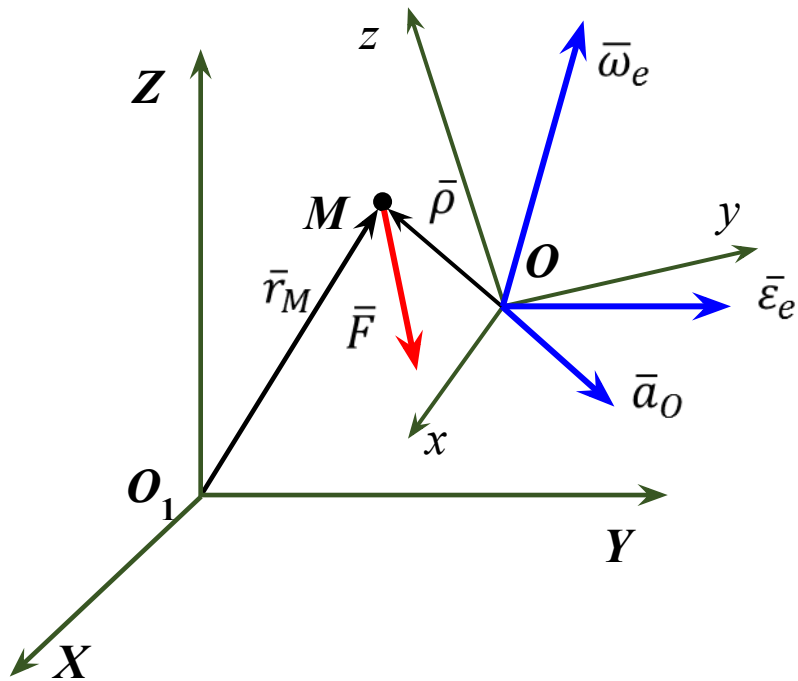


Система отсчета, движущаяся с ускорением относительно другой, инерциальной системы отсчета называется **неинерциальной**.

Рассмотрим движение точки  $M$  под действием силы  $\vec{F}$  по отношению с двум системам отсчета (сложное движение.)



в общем случае переносного движения

Система  $O_1XYZ$  – инерциальная.

Движение неинерциальной системы  $Oxuz$  (переносное движение для точки  $M$ ) задано и не зависит от движения точки.

Приложенные к точке силы в соответствии с основным уравнением динамики точки определяют ее абсолютное движение (относительно инерциальной системы  $O_1XYZ$ )

Рассмотрим движение точки относительно неинерциальной системы  $Oxuz$  (относительное движение).

Основное уравнение в инерциальной системе отсчета:

$$m\bar{a} = \vec{F}.$$

В соответствии с кинематической теоремой Кориолиса:

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k,$$

$$\bar{a}_e = \bar{a}_O + \bar{\varepsilon}_e \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_e \times (\omega_e \times \bar{\rho}),$$

$$\bar{a}_k = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r.$$

Подставляя выражение для абсолютного ускорения в основное уравнение динамики точки, получим:

$$m(\bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k) = \bar{F}.$$

Разрешим полученное выражение относительно ускорения  $\bar{a}_r$ :

$$m\bar{a}_r = \bar{F} - (m\bar{a}_e) - (m\bar{a}_k).$$

Обозначим:

$$\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e \quad - \text{переносная сила инерции}$$

$$\bar{\Phi}_k = -m\bar{a}_k \quad - \text{кориолисова сила инерции}$$

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k \quad - \text{динамическая теорема Кориолиса или основное уравнение динамики относительного движения точки.}$$

*Материальная точка движется относительно неинерциальной системы отсчета так же как и относительно инерциальной, если к приложенным активным силам и реакциям связей прибавить переносную и кориолисову силы инерции.*

Силы инерции  $\bar{\Phi}_e$  и  $\bar{\Phi}_k$  являются поправками на неинерциальность системы отсчета.

В неинерциальной системе отсчета точка приобретает ускорение не только в результате действия приложенных к ней сил, но и в результате ускоренного движения самой системы отсчета.

## Пример 1.



Материальная точка массой  $m$  движется по гладкой поверхности бака, имеющего форму полусферы радиуса  $R$ . В начальный момент времени точка находилась в нижнем положении в состоянии относительного покоя. Бак начинает двигаться поступательно и прямолинейно по горизонтальной плоскости с постоянным ускорением  $\mathbf{a}$ . Определить при каком значении ускорения  $\mathbf{a}$  точка достигнет верхнего края бака, а также силу давления точки на бак в этом положении.

**Решение:**

Свяжем подвижную систему координат с баком.

Переносное движение поступательное следовательно:

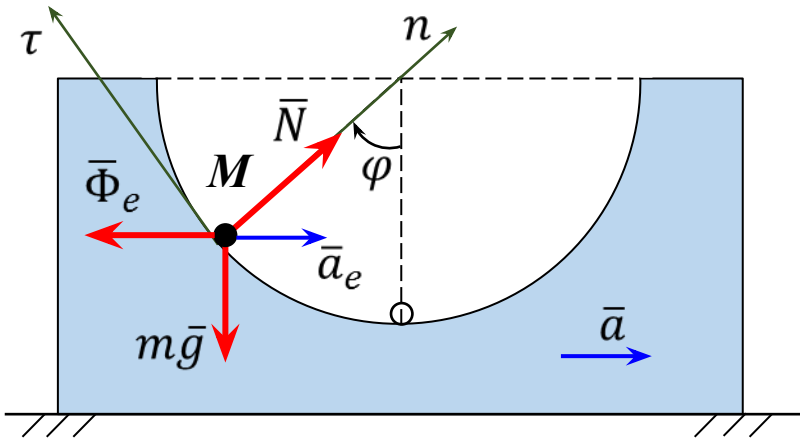
$$\bar{a}_k = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r = 0; \quad \bar{\Phi}_k = -m\bar{a}_k = 0; \quad \bar{\Phi}_e = -m\bar{a}$$

$$m\bar{a}_r = m\bar{g} + \bar{\Phi}_e + \bar{N}$$

$$s = r\varphi, \quad a_r^\tau = \ddot{s}, \quad v_r = \dot{s}$$

$$\tau: \quad m\ddot{s} = \Phi_e \cos\varphi - mg \sin\varphi$$

$$n: \quad \frac{m\dot{s}^2}{r} = N - \Phi_e \sin\varphi - mg \cos\varphi$$



Сделаем замену переменных:

$$\ddot{s} = \frac{d\dot{s}}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = \frac{\dot{s}d\dot{s}}{ds} = \frac{d\dot{s}^2}{2Rd\varphi}$$

$$m \frac{d\dot{s}^2}{2Rd\varphi} = m a \cos\varphi - mg \sin\varphi;$$

$$d\dot{s}^2 = 2Rd\varphi(a \cos\varphi - g \sin\varphi);$$

## Пример 1(продолжение).



$$\dot{s}^2 = 2R(asin\varphi + gcos\varphi) + C;$$

Н.У.  $t = 0: \varphi(0) = 0, \quad \dot{s}(0) = 0$

$$0 = 2Rg + C \Rightarrow C = -2Rg$$

$$v_r^2 = 2R(asin\varphi + gcos\varphi) - 2Rg$$

Условие достижения точкой верхнего края бака: при  $\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad v_r = 0.$

$$0 = 2Ra - 2gR \Rightarrow a = g.$$

Для определения давления точки на бак, воспользуемся уравнением:

$$n: \frac{mv_r^2}{r} = N - \Phi_e sin\varphi - mgcos\varphi$$

$$N = \Phi_e sin\varphi + mgcos\varphi - \frac{mv_r^2}{r}$$

при  $\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad v_r = 0, \quad a = g: \quad N = \Phi_e = mg.$

1. Система отсчета движется поступательно.

$$\bar{\omega}_e = 0, \quad \bar{\Phi}_k = -2m\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r = 0$$

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{\Phi}_e$$

2. Система отсчета движется поступательно, равномерно и прямолинейно.

$$\bar{a}_e = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon}_e \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_e \times (\omega_e \times \bar{\rho}), \quad \bar{a}_k = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r$$

Движение равномерное и прямолинейное  $\Rightarrow \bar{a}_0 = 0$ .

Движение поступательное  $\Rightarrow \bar{\omega}_e = 0, \quad \bar{\varepsilon}_e = 0$ .

$$\bar{\Phi}_e = 0, \quad \bar{\Phi}_k = 0$$

$m\bar{a}_r = \bar{F}$  – инерциальная система отсчета.

Любая система отсчета, которая движется поступательно, равномерно и прямолинейно относительно другой инерциальной системы отсчета, также является инерциальной.

***Принцип относительности Галилея-Ньютона:***

*Никаким механическим экспериментом невозможно определить, находится ли данная система отсчета в состоянии покоя или совершает поступательное, равномерное и прямолинейное движение по отношению к инерциальной системе отсчета.*

1. Точка движется равномерно и прямолинейно относительно подвижной системы (относительное движение по инерции).

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k; \quad \bar{v}_r = \overline{const}, \quad \Rightarrow \quad \bar{a}_r = \frac{d\bar{v}_r}{dt} = 0, \quad \bar{F} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k = 0.$$

2. Относительный покой.

$$\bar{a}_r = 0, \bar{v}_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\Phi}_k = -2m\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r = 0$$

$$\bar{F} + \bar{\Phi}_e = 0 \text{ — условие относительного равновесия точки.}$$

**Пример:** Определить, какую форму должна иметь гладкая трубка, вращающаяся относительно вертикальной оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , чтобы материальная точка, помещенная в любую точку этой трубки, оставалась в состоянии покоя относительно трубки.

**Решение.**  $\Phi_e^n = m\omega^2 x$

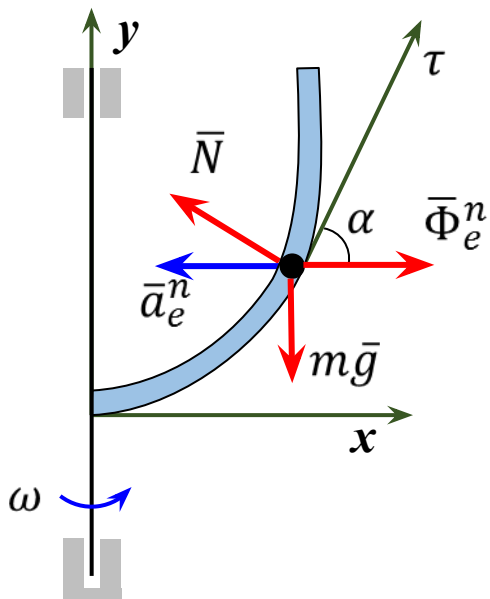
Условие относительного равновесия точки:  $\bar{N} + m\bar{g} + \bar{\Phi}_e = 0$

$$\tau: \quad \Phi_e^n \cos\alpha - mg \sin\alpha = 0$$

$$m\omega^2 x \cos\alpha - mg \sin\alpha = 0; \quad \omega^2 x \cos\alpha = g \sin\alpha$$

$$tg\alpha = \frac{\omega^2 x}{g} = \frac{dy}{dx}$$

$$dy = \frac{\omega^2 x dx}{g} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{\omega^2 x^2}{2g}$$



# Равновесие и движение точки относительно Земли.



Система отсчета, связанная с Землей не является инерциальной. Земля движется относительно гелиоцентрической системы отсчета как свободное твердое тело, участвуя в следующих движениях:

- обращается вокруг Солнца по эллиптической орбите, близкой к круговой;
- вращается вокруг собственной оси с практически постоянной скоростью.

Переносная сила инерции точки в системе отсчета, связанной с Землей:

$$\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e = -m(\bar{a}_O + \bar{a}_e^n)$$

Ускорением от орбитального движения Земли вокруг Солнца ( $a_O \approx 5,9 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2$ ) можно пренебречь.

Тогда переносная сила инерции для точки расположенной на широте  $\varphi$ :

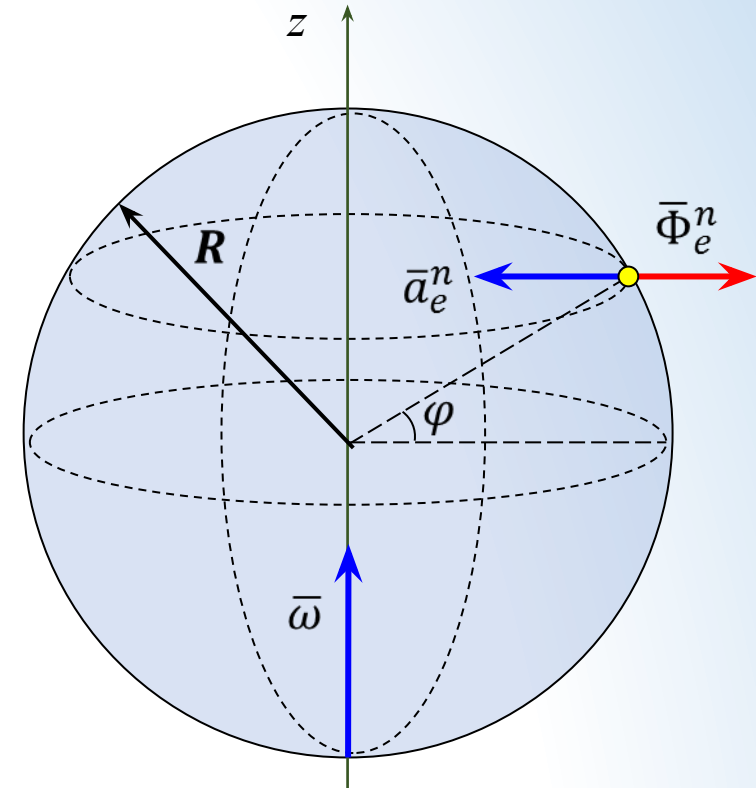
$$\Phi_e^n = m\omega^2 R \cos\varphi$$

$$\omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с}$$

$$R = 6,34 \cdot 10^6 \text{ м}$$

$$a_e^n = 3,3 \cdot 10^{-2} \cos\varphi \text{ м/с}^2$$

Максимальное значение переносная сила инерции имеет на экваторе.





## Вес тела.

Рассмотрим равновесие точки, расположенной на поверхности Земли на широте  $\varphi$ .

$$\bar{a}_r = 0; \quad \bar{v}_r = 0; \quad \bar{N} + m\bar{g} + \bar{\Phi}_e^n = 0$$

$$\bar{N} = -(m\bar{g} + \bar{\Phi}_e^n) = -\bar{P}$$

$$\bar{P} = m\bar{g} + \bar{\Phi}_e^n \text{ – вес тела.}$$

$$\frac{\bar{\Phi}_e^n}{m\bar{g}} = \frac{\omega^2 R \cos\varphi}{g} \approx 0,00343 \cos\varphi$$

Линия действия силы веса определяет местную вертикаль (т.е. линию отвеса в данной точке поверхности Земли).

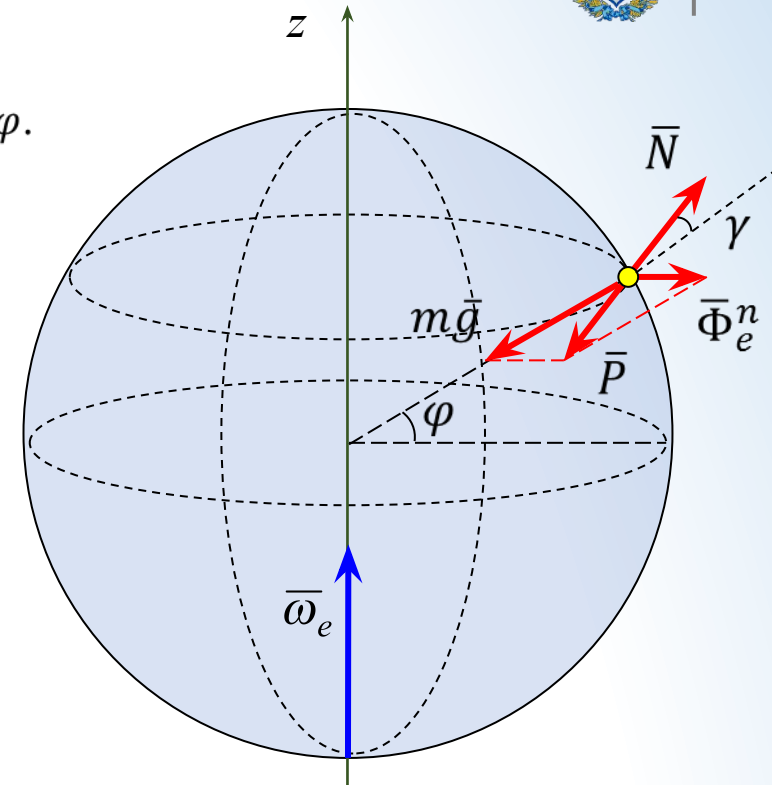
Отклонение веса тела от направления силы притяжения:

$$\frac{\sin\gamma}{\bar{\Phi}_e^n} = \frac{\sin\varphi}{P}; \quad \sin\gamma \approx \frac{\bar{\Phi}_e^n}{m\bar{g}} \sin\varphi = 0,001715 \sin 2\varphi$$

$$\text{При } \varphi = 60^\circ, \quad \gamma \approx 0,085^\circ.$$

Минимальное значение вес тела имеет на экваторе.

Стартуя с «Морского старта» в районе экватора ракета «Зенит-2» может вывести на низкую опорную орбиту почти 15000 кг полезной нагрузки, а при старте с Байконура – 13700 кг.





## Отклонение падающего тела к востоку.

Пусть тело падает на Землю с некоторой высоты  $H$  под действием силы тяжести.

Скорость тела  $\vec{v}_r$  направлена по вертикали к центру Земли.

Тогда ускорение Кориолиса

$$\vec{a}_k = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$$

направлено по касательной к параллели на запад.

А сила инерции Кориолиса – по касательной к параллели на восток.

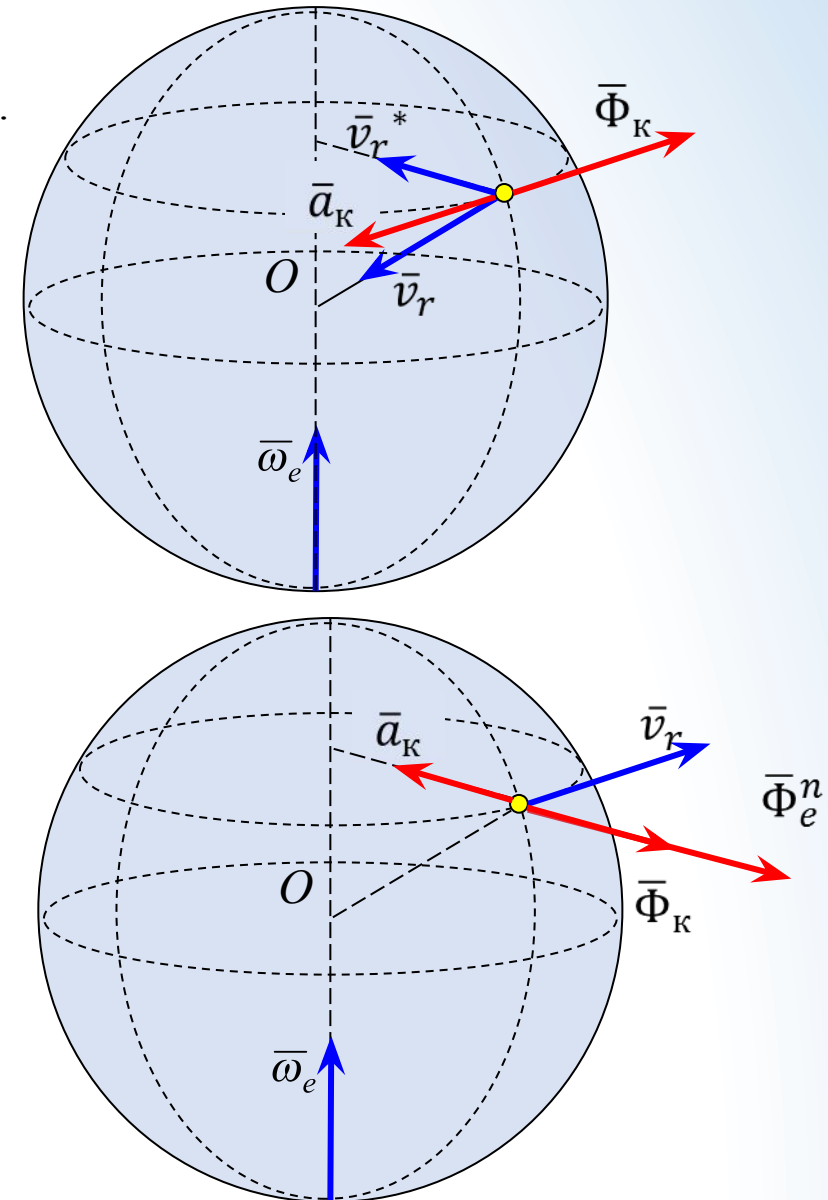
При падении с высоты 100м, на широте  $50^\circ$ , отклонение составляет 0,01 м.

## Движение вдоль параллели.

При движении точки вдоль параллели, сила инерции Кориолиса направлена вдоль одной линии с переносной силой инерции.

При движении на запад эти силы направлены в одну сторону, при движении на восток – в противоположные.

При движении точки по параллели изменяется только ее вес.



## Движение вдоль меридиана.

При движении тела вдоль меридиана в Северном полушарии, ускорение Кориолиса направлено влево от направления ее движения, а сила инерции Кориолиса – вправо.

*В Северном полушарии тело, движущееся вдоль земной поверхности, будет отклоняться вправо от направления движения. В Южном полушарии отклонение будет происходить влево.*

Закон Бэра. Правый берег рек в Северном полушарии более подмыт, чем левый на прямых участках рек. В Южном полушарии левый берег подмыт сильнее.

