Приближенные формулы Лапласа и Пуассона

Локальная приближенная формула Лапласа.

При больших n имеет место приближенное равенство

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) \qquad (1)$$

где

n - число опытов (испытаний),

p - вероятность успеха,

q=1-p - вероятность неуспеха,

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Интегральная приближенная формула Лапласа.

При больших **n** имеет место приближенное равенство

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (2)$$

где

n - число опытов (испытаний),

p - вероятность успеха,

q=1-p - вероятность неуспеха,

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx.$$

Функция **Ф(х) называется функцией Лапласа**. При нахождении значений функции $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ для отрицательных значений аргументов следует иметь в виду, что $\varphi(x)$ - четная, а Ф(х) – нечетная.

Отметим еще, что приближенными формулами Лапласа (1) и (2) на практике пользуются в случае, если **npq > 10**

или **npq = 10**. Если же **npq < 10**, то эти формулы приводят к довольно большим погрешностям.

Следствия из интегральной формулы Лапласа

- ***Следствие 1.*** Вероятность того, что число наступлений события A в n повторных независимых испытаниях будет отличаться от величины не более чем на (по абсолютной величине), вычисляется по формуле

$$P\left(\left|m - np\right| \le \varepsilon\right) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right).$$

- ***Следствие 2***. Вероятность того, что доля наступлений события A в n повторных независимых испытаниях будет отличаться от вероятности p наступления этого события в одном испытании не более чем на (по абсолютной величине), вычисляется по формуле

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \Delta\right) = \Phi\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right).$$

Приближенная формула Пуассона.

При больших **n** и малых **p** справедлива формула

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (3)$$

где

n - число опытов (испытаний),

p - вероятность успеха,

$$\lambda = np$$

Пример 1. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течении времени *T* равна 0,002. Найти вероятность того, что за время *T* откажут ровно три элемента.

Решение. По условию дано: $n = 1000,\ p = 0{,}002,\ \lambda = np = 2,\ k = 3$

Искомая вероятность

$$P_{1000}(3) = \frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} = \frac{2^3}{3!}e^{-2} = \frac{8}{6}e^{-2} \approx 0{,}18.$$

Пример 2. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути 0,004. Найти вероятность того, что в пути повреждено меньше трех изделий.

Решение. По условию дано $n = 500,\ p = 0,004, \lambda = np = 2$

По теореме сложения вероятностей

$$P = P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) =$$
$$= e^{-2} + \frac{2}{1!}e^{-2} + \frac{4}{2!}e^{-2} = 5e^{-2} = 0,68.$$

Пример 3. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятность того, что магазин получит более двух разбитых бутылок.

Решение. По условию дано: $n = 1000,\ p = 0,003,\ \lambda = np = 3$

Получаем $$P_{1000}(k > 2) = 1 - P_{1000}(k \le 2) = 1 - \left(P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2)\right) =$$
$$= 1 - \left(e^{-3} + 3e^{-3} + 4,5e^{-3}\right) = 0,5678.$$

Пример 4. Вероятность наступления события А в каждом из 900 независимых испытаний равна p = 0,8. Найдите вероятность того, что событие А произойдет: а) 750 раз; б) 710 раз; в) от 710 до 740 раз.

Решение: Так как npq = 900 × 0,8 × 0,2 = 14,4 > 10, то в пунктах а) и б) воспользуемся формулой (1), а в пункте в) – формулой (2).

а) $x = \dfrac{750 - 900 \cdot 0{,}8}{\sqrt{900 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 2{,}5$ $\quad \dfrac{1}{12}\varphi(2{,}5) = \dfrac{1}{12} \cdot 0{,}0175 \approx 0{,}00146$

б) $x = \dfrac{750 - 720}{12} \approx -0{,}83$ $\quad \dfrac{1}{12} \cdot 0{,}2827 \approx 0{,}0236$

в) $x_1 = \dfrac{710 - 720}{12} \approx -0{,}83$ $\quad x_2 = \dfrac{740 - 720}{12} \approx 1{,}67$

Пример 5. Вероятность того, что электролампочка, изготовленная данным заводом, является бракованной, равна 0,02. Для контроля отобрано наудачу 1000 лампочек. Оцените вероятность того, что частота бракованных лампочек в выборке отличается от вероятности 0,02 менее чем на 0,01.

Решение. Пусть *k* – число бракованных лампочек в выборке. Нам нужно оценить вероятность выполнения неравенства

$\left|\frac{k}{1000}-0{,}02\right|<0{,}01$ Оно равносильно неравенству 11 £ *k* £ 29. Следовательно

$$P\left(\left|\frac{k}{1000}-0{,}02\right|<0{,}01\right)=P_{1000}(11\le k\le 29)$$

Так как *npq* = 1000 × 0,02 × 0,98 = 19,6 > 10, то для вычисления вероятности P1000 (11 £ k £ 29) воспользуемся интегральной приближенной формулой Лапласа. В данном случае

$$x_1=\frac{11-1000\cdot 0{,}02}{\sqrt{1000\cdot 0{,}02\cdot 0{,}98}}\approx -2{,}03 \qquad x_2=\frac{29-20}{4{,}43}\approx\frac{9}{4{,}43}\approx 2{,}03$$

Ф(- 2,03) ≈ - 0, 4788; Ф(2,03 ≈ 0,4788.

Следовательно, по формуле (2) имеем:

P1000 (11 ≤ k ≤ 29) ≈ 0,4788 + 0,4788 = 0,9576.

Пример 6. Подлежат исследованию 1000 проб руды. Вероятность промышленного содержания металла в каждой пробе равна 0,15. Найти границы, в которых с вероятностью 0,9973 будет заключено число проб руды с промышленным содержанием металла.

- ***Решение***. Искомые границы для числа проб m руды с промышленным содержанием металла (из данных 1000 проб) определяются величинами m_1 и m_2 (см. интегральную теорему Муавра-Лапласа). Будем предполагать, что искомые границы симметричны относительно величины np, где n=1000 и p=0,15. Тогда $m_1=np-$, $m_1=np+$ для некоторого положительного , и, тем самым, единственной определяющей неизвестной данной задачи становится величина . Из следствия 1 и условия задачи следует, что

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) \approx \frac{0{,}9973}{2} = 0{,}49865 .$$

- По таблице значений функции Лапласа найдем такое *t,* что Ф (t)=0,49865. Получим t=3. Тогда $\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}} = 3$ $\varepsilon = 34$. Окончательно получаем искомые границы: $m_1 = np - = 116$, $m_1 = np + = 184$, т.е. с вероятностью 0,9973 число проб руды с промышленным содержанием металла (из данных 1000 проб) попадет в интервал (116; 184).