



# Приближенные формулы Лапласа и Пуассона

## Локальная приближенная формула Лапласа.

При больших  $n$  имеет место приближенное равенство

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) \quad (1)$$

где

$n$  - число опытов (испытаний),

$p$  - вероятность успеха,

$q=1-p$  - вероятность неуспеха,

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

## Интегральная приближенная формула Лапласа.

При больших  $n$  имеет место приближенное равенство

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad (2)$$

где

$n$  - число опытов (испытаний),

$p$  - вероятность успеха,

$q=1-p$  - вероятность неуспеха,

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Функция  $\Phi(x)$  называется функцией Лапласа. При нахождении значений функции  $\varphi(x)$  и  $\Phi(x)$  для отрицательных значений аргументов следует иметь в виду, что  $\varphi(x)$  – четная, а  $\Phi(x)$  – нечетная.

Отметим еще, что приближенными формулами Лапласа (1) и (2) на практике пользуются в случае, если  $nrq > 10$  или  $nrq = 10$ . Если же  $nrq < 10$ , то эти формулы приводят к довольно большим погрешностям.

# Следствия из интегральной формулы Лапласа

- **Следствие 1.** Вероятность того, что число наступлений события А в  $n$  повторных независимых испытаниях будет отличаться от величины не более чем на  $\varepsilon$  (по абсолютной величине), вычисляется по формуле

$$P(|m - np| \leq \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)$$

- **Следствие 2.** Вероятность того, что доля наступлений события А в  $n$  повторных независимых испытаниях будет отличаться от вероятности  $p$  наступления этого события в одном испытании не более чем на  $\Delta$  (по абсолютной величине), вычисляется по формуле

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \Delta\right) = \Phi\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)$$

## Приближенная формула Пуассона.

При больших  $n$  и малых  $p$  справедлива формула

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (3)$$

где

$n$  - число опытов (испытаний),

$p$  - вероятность успеха,

$$\lambda = np$$

**Пример 1.** Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течении времени  $T$  равна 0,002. Найти вероятность того, что за время  $T$  откажут ровно три элемента.

Решение. По условию дано:  $n = 1000$ ,  $p = 0,002$ ,  $\lambda = np = 2$ ,  $k = 3$

Искомая вероятность

$$P_{1000}(3) = \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} = \frac{2^3}{3!} e^{-2} = \frac{8}{6} e^{-2} \approx 0,18.$$

**Пример 2.** Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути 0,004. Найти вероятность того, что в пути повреждено меньше трех изделий.

Решение. По условию дано  $n = 500$ ,  $p = 0,004$ ,  $\lambda = np = 2$

По теореме сложения вероятностей

$$\begin{aligned} P &= P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) = \\ &= e^{-2} + \frac{2}{1!}e^{-2} + \frac{4}{2!}e^{-2} = 5e^{-2} = 0,68. \end{aligned}$$



**Пример 3.** Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятность того, что магазин получит более двух разбитых бутылок.

Решение. По условию дано:  $n = 1000$ ,  $p = 0,003$ ,  $\lambda = np = 3$

Получаем 
$$P_{1000}(k > 2) = 1 - P_{1000}(k \leq 2) = 1 - (P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2)) =$$
$$= 1 - (e^{-3} + 3e^{-3} + 4,5e^{-3}) = 0,5678.$$

**Пример 4.** Вероятность наступления события А в каждом из 900 независимых испытаний равна  $p = 0,8$ . Найдите вероятность того, что событие А произойдет: а) 750 раз; б) 710 раз; в) от 710 до 740 раз.

Решение: Так как  $npq = 900 \times 0,8 \times 0,2 = 14,4 > 10$ , то в пунктах а) и б) воспользуемся формулой (1), а в пункте в) – формулой (2).

$$\text{а) } x = \frac{750 - 900 \cdot 0,8}{\sqrt{900 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 2,5 \quad \frac{1}{12} \varphi(2,5) = \frac{1}{12} \cdot 0,0175 \approx 0,00146$$

$$\text{б) } x = \frac{750 - 720}{12} \approx -0,83 \quad \frac{1}{12} \cdot 0,2827 \approx 0,0236$$

$$\text{в) } x_1 = \frac{710 - 720}{12} \approx -0,83 \quad x_2 = \frac{740 - 720}{12} \approx 1,67$$

**Пример 5.** Вероятность того, что электролампочка, изготовленная данным заводом, является бракованной, равна 0,02. Для контроля отобрано наудачу 1000 лампочек. Оцените вероятность того, что частота бракованных лампочек в выборке отличается от вероятности 0,02 менее чем на 0,01.

Решение. Пусть  $k$  – число бракованных лампочек в выборке. Нам нужно оценить вероятность выполнения неравенства

$\left| \frac{k}{1000} - 0,02 \right| < 0,01$  Оно равносильно неравенству  $11 \leq k \leq 29$ . Следовательно

$$P\left(\left|\frac{k}{1000} - 0,02\right| < 0,01\right) = P_{1000}(11 \leq k \leq 29)$$

Так как  $npq = 1000 \times 0,02 \times 0,98 = 19,6 > 10$ , то для вычисления вероятности  $P_{1000}(11 \leq k \leq 29)$  воспользуемся интегральной приближенной формулой Лапласа. В данном случае

$$x_1 = \frac{11 - 1000 \cdot 0,02}{\sqrt{1000 \cdot 0,02 \cdot 0,98}} \approx -2,03 \quad x_2 = \frac{29 - 20}{4,43} \approx \frac{9}{4,43} \approx 2,03$$

$\Phi(-2,03) \approx -0,4788$ ;  $\Phi(2,03) \approx 0,4788$ .

Следовательно, по формуле (2) имеем:

$P_{1000}(11 \leq k \leq 29) \approx 0,4788 + 0,4788 = 0,9576$ .

**Пример 6.** Подлежат исследованию 1000 проб руды. Вероятность промышленного содержания металла в каждой пробе равна 0,15. Найти границы, в которых с вероятностью 0,9973 будет заключено число проб руды с промышленным содержанием металла.

- **Решение.** Искомые границы для числа проб  $t$  руды с промышленным содержанием металла (из данных 1000 проб) определяются величинами  $m_1$  и  $m_2$  (см. интегральную теорему Муавра-Лапласа). Будем предполагать, что искомые границы симметричны относительно величины  $np$ , где  $n=1000$  и  $p=0,15$ . Тогда  $m_1=np-$  ,  $m_2=np+$  для некоторого положительного  $\varepsilon$ , и, тем самым, единственной определяющей неизвестной данной задачи становится величина  $\varepsilon$ . Из следствия 1 и условия задачи следует, что

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) \approx \frac{0,9973}{2} = 0,49865 .$$

- По таблице значений функции Лапласа найдем такое  $t$ , что  $\Phi(t) = 0,49865$ . Получим  $t = 3$ . Тогда  $\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}} = 3 \quad \varepsilon = 34$ . Экончательно получаем искомые границы:  $m_1 = np - \varepsilon = 116$ ,  $m_2 = np + \varepsilon = 184$ , т.е. с вероятностью 0,9973 число проб руды с промышленным содержанием металла (из данных 1000 проб) попадет в интервал (116; 184).