

Лекция 9. Числа в компьютере

Машинные коды чисел

Арифметические операции в компьютере выполняются в двоичной системе счисления

Все четыре действия сводятся к операциям *сложения и сдвига чисел.*

Для этого представления чисел используются прямой, обратный и дополнительный коды.

Машинные коды чисел

Прямой
код $[x]_{\text{пр}}$

$[x]_{\text{пр}} = x$, при $x \geq 0$ или $[x]_{\text{пр}} = 1 - x$, при $x < 0$,
то есть $[x]_{\text{пр}} = 0, x_1 x_2 \dots x_n$ или $[x]_{\text{пр}} = 1, x_1 x_2 \dots x_n$.

Прямой код двоичного числа совпадает с записью самого числа, а в знаковом разряде проставляются 0 или 1 для положительных и отрицательных чисел соответственно.

Машинные коды чисел

Обратный
код $[x]_{\text{обр}}$

$$[x]_{\text{обр.}} = x, \text{ при } x \geq 0 \text{ или } [x]_{\text{обр.}} = 10 + x - 10^n, \text{ при } x < 0,$$

где n – количество разрядов.

Обратный код отрицательного числа образуется путем записи в *знаковый разряд 1*, а *цифровые разряды инвертируются*.

Машинные коды чисел

Дополнительный код $[x]_{\text{доп.}}$

$$[x]_{\text{доп.}} = x, \text{ при } x \geq 0 \text{ или } [x]_{\text{доп.}} = 10 + x, \text{ при } x < 0.$$

Дополнительный код отрицательного числа образуется путем *записи в знаковый разряд 1, цифровые разряды инвертируются, а к младшему разряду прибавляется 1.*

Машинные коды чисел

Рассмотренные коды чисел используются для замены вычитания сложением

При сложении двух правильных дробей результат может оказаться больше единицы, что приведет к переполнению уже упомянутой разрядной сетки - *теряются старшие разряды результата*

Модифицированные обратный $[x]_{\text{обр.}}^M$ и дополнительный $[x]_{\text{доп.}}^M$ коды.

Они образуются по таким же правилам, лишь под знак числа отводятся два разряда: сочетание цифр 00 в знаковых разрядах свидетельствует о том, что число положительное, цифр 11 – оно отрицательное.

Размещение чисел в разрядной сетке

Совокупность двоичных разрядов, предназначенных для хранения и обработки чисел, образует *разрядную сетку* компьютера.

Формы представления

Естественная – с *фиксированной запятой* (точкой)

Нормальная или полулогарифмическая – с *плавающей запятой* (точкой)

Лекция 9. Числа в компьютере

Размещение чисел в разрядной сетке

Представления двоичных чисел с фиксированной запятой

Запятая фиксируется перед старшим разрядом (при представлении правильных дробей) или после младшего (при представлении целых чисел), отделяя целую часть числа от дробной. Под знак числа отводится нулевой бит (0 – «+», 1 – «-»),

Десятичное число **3105**
в 16-тиразрядной сетке будет размещено следующим образом

$$3105_{10} = C21_{16} = 110000100001_2$$

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 3 | 7 | 11 | 15 | | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | | + | | | | C | | | | 2 | | | | | 1 |

Размещение чисел в разрядной сетке

Представления
чисел с
плавающей
запятой

Изображаются в виде

$$N = m \cdot q^p,$$

где m – мантисса числа ($|m| < 1$);

q – основание системы счисления;

p – порядок числа, который указывает положение запятой в числе, при разных порядках положение запятой различно

Отсюда и название – *с плавающей запятой*.

$$123_{10} = 0,123 \cdot 10^3 = 0,0123 \cdot 10^4 = \dots$$

Нормализованные и ненормализованные числа, первые – это такие, у которых абсолютная величина мантиссы удовлетворяет условию

$$1/q \leq |m| < 1.$$

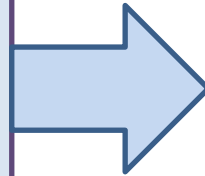
$0,123$ является нормализованным, а $0,0123$ – нет.

Для двоичной системы имеем $1/2_{10} = 0,1_2$,

Лекция 9. Числа в компьютере

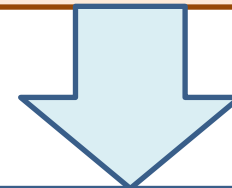
Размещение чисел в разрядной сетке

Представления
чисел с
плавающей
запятой



Число

$555,441_{10} = 22B,70E5_{16} = 0,22B70E5 \cdot 10^3$
в 32-хразрядной сетке оно будет размещено



0 7 11 15 19 23 27 31

1 0 0 0 0 1 1 0 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 1 1 1 0
0

+ 3 2 2 B 7 0 E

Выполнение арифметических операций

Операции над числами с фиксированной запятой

При выполнении *сложения* машинные коды чисел просто складываются, при этом коды отрицательных чисел преобразуются в обратный или дополнительный коды

$$x = 0,1101, y = -0,0110, x + y = ?$$

$$[x]_{\text{доп.}}^M = 00,1101 \quad \text{или} \quad [x]_{\text{обр.}}^M = 00,1101$$

$$\begin{array}{r} + [y]_{\text{доп.}}^M = 11,1010 \\ \hline 100,0111 \end{array} \quad \begin{array}{r} + [y]_{\text{обр.}}^M = 11,1001 \\ \hline 100,0110 \\ + \quad \quad \quad 1 \\ \hline 00,0111 \end{array}$$

Итак, $x + y = 00,0111$. И действительно: $13 + (-6) = 7$.

Выполнение арифметических операций

Операции над числами с фиксированной запятой

Умножение сводится к последовательности операций суммирования и сдвига (влево или вправо)

$$x = 0,110, y = 1,101, x \cdot y = ?$$

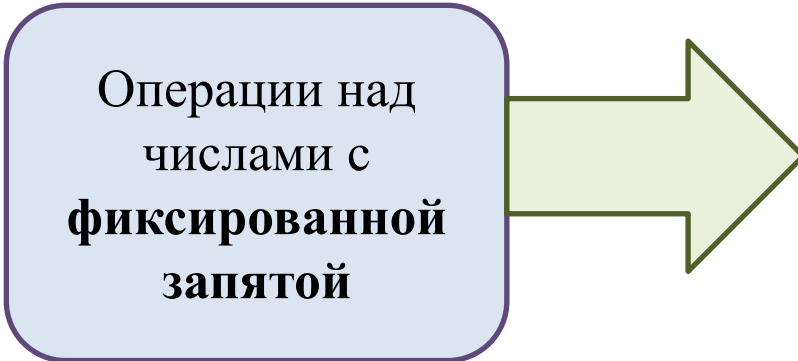
Определяем знак произведения: $0 + 1 = 1$ – произведение отрицательно

0,110

$$\begin{array}{r} \times \underline{0,101} \\ \quad 110 \\ + \quad 000 \\ \underline{\quad 110} \\ \quad 1110 \end{array}$$

Итак, $x \cdot y = 1,1110$. И действительно: $6 \cdot (-5) = -30$.

Операции над
числами с
фиксированной
запятой



Деление состоит в последовательности операций вычитания и сдвигов, причем делитель вычитается из делимого или очередного остатка. При делении без восстановления остатка полученный в результате вычитания остаток сдвигается на разряд влево. Если он положительный, из него вычитается делитель и в разряд частного записывается 1, если отрицательный – к нему прибавляется делитель и в разряд частного записывается 0.

Выполнение арифметических операций

Операции над числами с плавающей запятой

Сложение и вычитание выполняются как над мантиссами, так и над порядками. Сначала порядки выравниваются. Затем производится сложение мантисс и при необходимости нормализация результата.

$$x = 0,101001 \cdot 10^{110}, y = -0,101110 \cdot 10^{101}, x + y = ?$$

$$y = -0,010111 \cdot 10^{110}$$

$$[x]^M = 00,101001$$

$$+ [y]_{\text{доп.}}^M = \underline{11,101001}$$

$$00,010010 (p = 110).$$

Нормализуем результат с уменьшением порядка на 1:

$$x + y = 0,10010 \cdot 10^{101}.$$

И действительно: $41 + (-23) = 18$.

Выполнение арифметических операций

Операции над
числами с
плавающей
запятой

Умножение и деление выполняются аналогично тому, как и эти операции над числами с фиксированной запятой. Порядки при умножении складываются, а при делении вычитаются

$$(0.11110 \times 10^{101}) \times (0.1001 \times 10^{100}) = (0.11110 \times 0.1001) \times 10^{(101 + 100)} = 0.100001110 \times 10^{1001}.$$

И действительно: $30 \times 9 = 270$.