Вычисление пределов функций

1 и 2 замечательные пределы функций, точки разрыва функций

1 замечательный предел

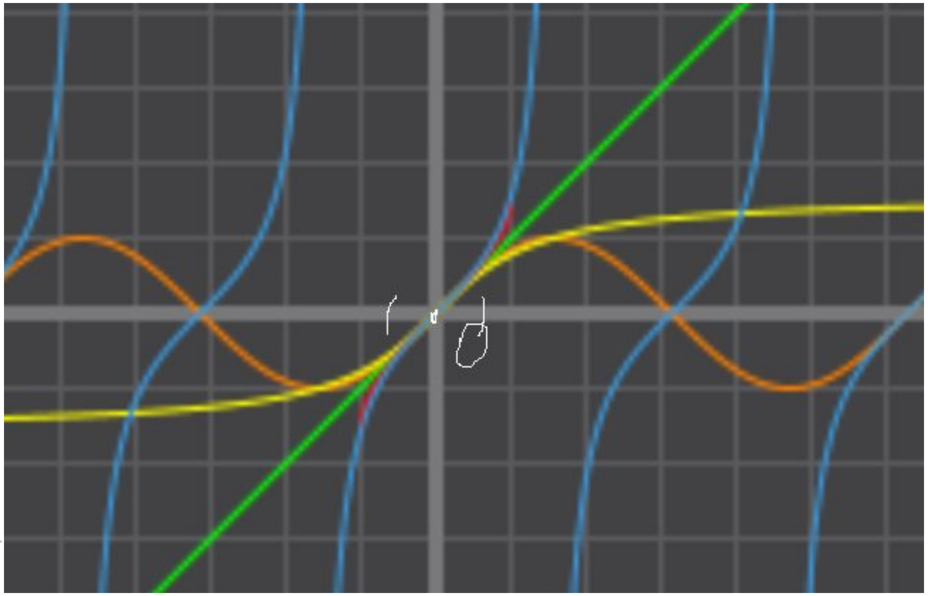
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\quad \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{shx}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=?:1=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}\cdot\frac{e^x}{e^x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{1}{e^x}=(t=2x)=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{thx}{x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{arcthx}{x}=1$$



$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{arctg(kx)}{x}=k;\ldots$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}\cdot\frac{k}{k}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}\cdot k=(t=kx)=k\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=k\cdot 1=k$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos kx-\cos mx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{k-m}{2}x\cdot\sin\frac{k+m}{2}x}{x\cdot x}=(-2)\cdot\left(\frac{k-m}{2}\right)\left(\frac{k+m}{2}\right)=\frac{m^2-k^2}{2};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{\sin mx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{\sin mx}\cdot\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}\cdot\frac{x}{\sin mx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\sin mx}{x}\right)}=\frac{k}{m};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2kx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 kx}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin kx}{x}\right)^2=2\cdot k^2;$$

Примеры:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot arctg\,4x}{1-\cos 6x}=\left(\begin{array}{l}1-\cos 6x=2\sin^2 3x\\ \dfrac{1-\cos 6x}{x^2}\to 2\cdot 3^2=18\end{array}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\cos 6x}\cdot\left(\frac{x}{x}\right)\cdot\frac{arctg\,4x}{1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\dfrac{1-\cos 6x}{x^2}\right)}\cdot\frac{arctg\,4x}{x}=4\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}2\left(\dfrac{\sin 3x}{x}\right)^2}=4\cdot\frac{1}{2\cdot 9}=\frac{4}{18}=\frac{2}{9};$$

$$2)\ \lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\pi-x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left(\begin{array}{l}\pi-x=t\Rightarrow x=\pi-t\\ \sin 3x=\sin(3\pi-3t)=\sin 3t\end{array}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{t}=3;$$

$$3)\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\pi-4x}=\left(\frac{\cos\dfrac{\pi}{2}}{0}=\frac{0}{0}\right)=\left(\begin{array}{l}t=\pi-4x\Rightarrow x=\dfrac{\pi-t}{4}\\ \cos 2x=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{t}{2}\right)=\sin\dfrac{t}{2}\end{array}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\dfrac{t}{2}}{t}=\frac{1}{2};$$

№219

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\begin{pmatrix} t=x-1\Rightarrow x=t+1 \\ \sin \pi x=\sin \pi(t+1)=\sin(\pi t+\pi)=-\sin \pi t \\ \sin 3\pi x=\sin 3\pi(t+1)=\sin(3\pi t+3\pi)=-\sin 3\pi t \end{pmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin \pi t}{-\sin 3\pi t}\cdot\frac{t}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin \pi t}{t}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\sin 3\pi t}{t}\right)}=\frac{\pi}{3\pi}=\frac{1}{3};$$

4) №222

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cdot\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}=\begin{pmatrix} t=x-a \\ t\to 0\Leftrightarrow x\to a\end{pmatrix}=$$

$$=\lim_{t\to 0}2\frac{\sin\frac{t}{2}}{t}\cdot\cos\frac{t+2a}{2}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos a=\cos a$$

$$=\begin{pmatrix} t=x-a\Rightarrow x=t+a \\ \sin x=\sin(t+a)=\sin t\cos a+\cos t\sin a\end{pmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t\cos a+\cos t\sin a-\sin a}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\left(\frac{\sin t}{t}\cdot\cos a\right)+\left(\frac{\cos t\sin a-\sin a}{t}\right)\right]=\cos a+\lim_{t\to 0}\frac{-\sin a(1-\cos t)}{t}=$$

$$=\cos a-\sin a\cdot\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}\cdot t=\cos a$$

230. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi - x}$.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}=\left(\begin{array}{l} t=\pi-x\Rightarrow x=\pi-t\Rightarrow \\ \sin\frac{x}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right)=\cos\frac{t}{2}\end{array}\right)=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos\frac{t}{2}}{t}=\lim_{t\to0}\frac{2\sin^2\frac{t}{4}}{t^2}\cdot t=2\cdot\frac{1}{16}\cdot\lim_{t\to0}t=0$$

$$\left(\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2\right)$$

231. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1-2\cos x}{\pi - 3x}$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\left(\frac{1}{2}-\cos x\right)}{-3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}=-\frac{2}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\frac{\pi}{3}-\cos x}{x-\frac{\pi}{3}}=-\frac{2}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}\right)\sin\frac{x+\frac{\pi}{3}}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}=$$

$$=\left(t=x-\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=t+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{4}{3}\lim_{t\to0}\frac{\sin\frac{t}{2}}{t}\cdot\cos\left(t+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{-4}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3};$$

5) №224

$$\lim_{x\to -2}\frac{tg\pi x}{x+2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\begin{pmatrix} t=x+2\Rightarrow x=t-2 \\ tg\pi\left(t-2\right)=tg\pi t \end{pmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{tg\,\pi t}{t}=\lim\frac{\left(\dfrac{\sin \pi t}{\cos \pi t}\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin \pi t}{t}\cdot\frac{1}{\cos \pi t}=\pi\cdot\frac{1}{\cos 0}=\pi$$

6) №226

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-tgx}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\left(\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(-\cos x\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}};$$

ДЗ: №№ 220; 223; 233; 235; 236;

237; 238

Пример задания из КТ :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin x-\sqrt{2}}{\sin 4x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}2\frac{\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin 4x}=2\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\sin\frac{\pi}{4}}{\sin 4x}=2\cdot\lim\frac{2\sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)\cos\left(\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)}{\sin 4x}=$$

$$=\left(\begin{array}{l} t=x-\frac{\pi}{4}\to 0\Rightarrow \\ x=t+\frac{\pi}{4}\end{array}\right)=4\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{t}{2}\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 4\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}=4\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{t}{2}}{-\sin 4t}\cdot\lim_{t\to 0}\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-4\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{t}{2}}{\sin 4t}=$$

$$=-2\sqrt{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{t}{2}}{t}\cdot\frac{t}{\sin 4t}=-2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{4};$$

Примеры из КТ :

$$1)\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos 5x}}{\sin^2 x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos 5x}}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos 5x}}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos 5x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2-1-\cos 5x}{\sin^2 x\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos 5x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{\sin^2 x\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos 5x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{5x}{2}}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos 5x}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{5}{2}x}{\sin x}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4\sqrt{2}}=\frac{25\sqrt{2}}{8};$$

$$2)\ \lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{4x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{4x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\left(t=\frac{1}{x}\to 0\right)=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos\frac{t}{4}}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{t}{8}}{t^2}=$$

$$=2\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin\frac{t}{8}}{t}\right)^2=2\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2=\frac{1}{32};$$

$$3)\ \textit{Замечание}: \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{-5x}}{\arcsin 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{-5x}}{\arcsin 2x}\cdot\frac{e^{5x}}{e^{5x}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{8x}-1}{\arcsin 2x}\cdot\frac{1}{e^{5x}}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{5x}}=1\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{8x}-1}{x}\cdot\frac{x}{\arcsin 2x}=\lim_{x\to 0}8\cdot\frac{e^{8x}-1}{8x}\cdot\frac{1}{\left(2\cdot\dfrac{\arcsin 2x}{2x}\right)}=\frac{8}{2}=4;$$

2 замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left(1^{\infty}\right)=e\approx 2{,}71878....;\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Примеры :

$$1)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{x+7}\right)^{2x-1}=\left(\textit{получить в скобках выражение}: 1+\frac{1}{f(x)}\right)=\left(\begin{gathered}\frac{x-4}{x+7}=\frac{(x+7)-7-4}{x+7}=\\ =1-\frac{11}{x+7}=1+\frac{1}{\left(\frac{x+7}{-11}\right)}\end{gathered}\right)=$$

$$=\left(\begin{gathered}\textit{в показателе домножим}\\ \textit{и поделим на } f(x)\end{gathered}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+7}{-11}\right)}\right)^{\frac{x+7}{-11}\cdot\frac{-11}{x+7}\cdot(2x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-11(2x-1)}{x+7}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-22x+11}{x+7}}=e^{-22};$$

$$2)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{2x^2+3}\right)^{x^2} = \left(1^\infty\ ?\ \textit{нет}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3-1-x^2}{2x^2+3}\right)^{x^2} = \lim\left(1-\frac{x^2+1}{2x^2+3}\right)^{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\dfrac{2x^2+3}{-x^2-1}\right)}\right)^{x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty} x^2} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = 0\right) = 0$$

В этом примере нет 2 замечательного предела

ДЗ: №№ 246-252

Точки разрыва функции

Опр. Функция f(x) непрерывной в точке x=a, если

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0$: $|x-a|<\delta \rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$, т.е. существует предел

функции в точке x= a:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A = f(a)$$

Точки разрыва, классификация:

1) точки устранимого разрыва.

x=a – точка устранимого разрыва, если f(x) неопределена

в точке x=a, но $\exists \lim_{x\to a} f(x) = A$ $\Rightarrow$ функцию можно доопределить

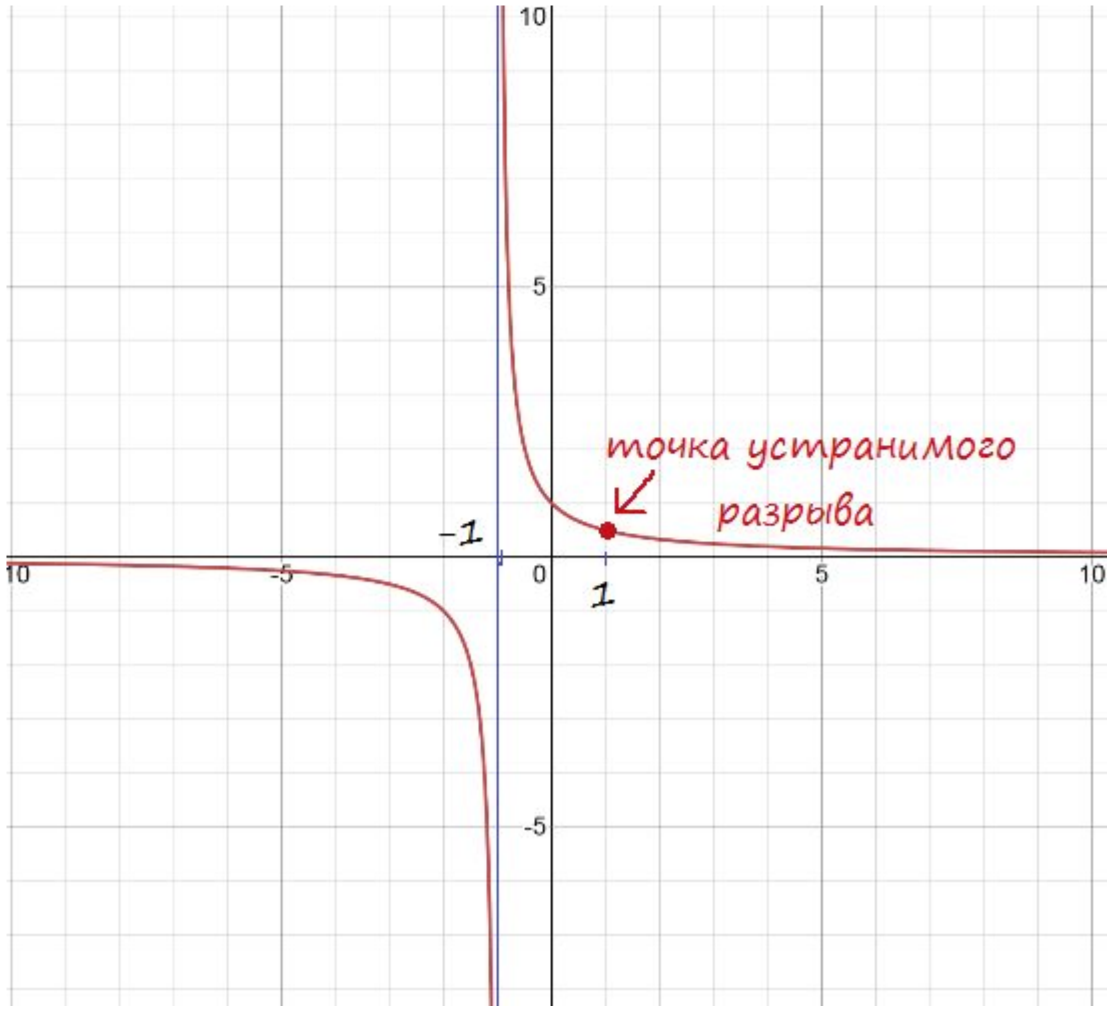
в точке x=a: f(a)=A.

Пример:

$$1)\ \ f(x)=\frac{x-1}{x^2-1};\ \ a=1:\ f(1)=\frac{0}{0}???$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=1-\textit{ точка устранимого разрыва}\Rightarrow$$

$$\textit{доопределим функцию в точке } x=1:\quad f(1)=\frac{1}{2}.$$



10
5
-5
0
10
-5
5
10
-1
1
точка устранимого
разрыва

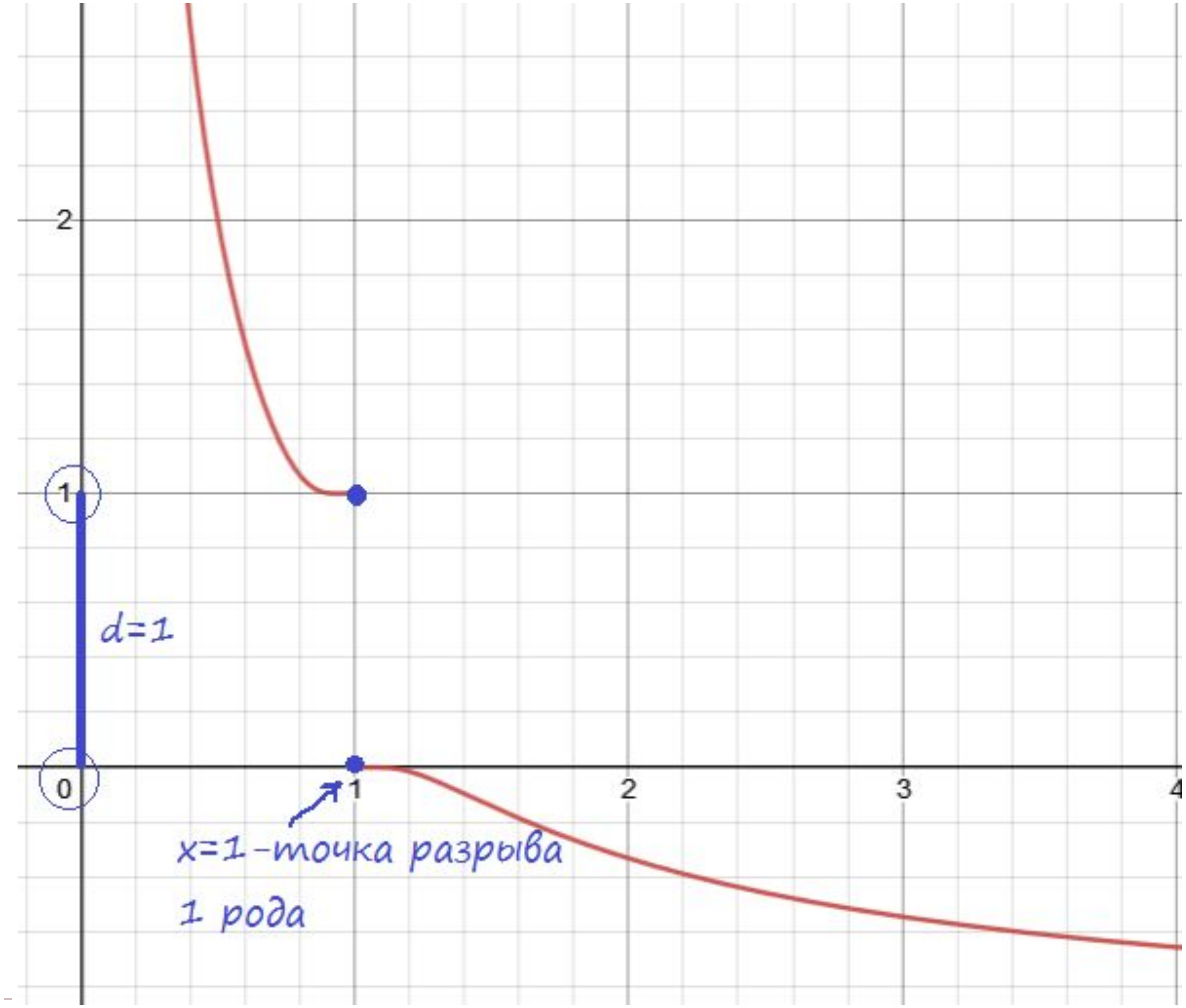
2) *Точка разрыва* 1 *рода*:

$x = a$ *является точкой разрыва* 1 *рода, если*

$\exists \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A; \exists \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = B;$ $f(a)$ *либо не определено, либо* $f(a) = C;$

скачок $d = |A - B|$

$$f(x) = \frac{1}{1 - 2^{\frac{x}{x-1}}}; \; a = 1$$



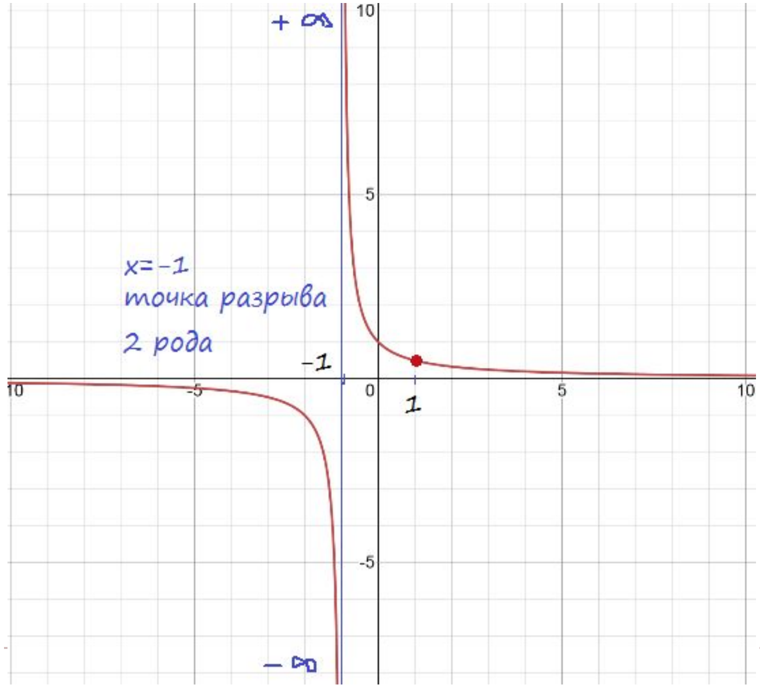
3) *Точка разрыва 2 рода.*

$x = a$ *является точкой разрыва* 2 *рода, если*

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty \;\; и\,/\,или \;\; \lim_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty \;\; и\,/\,или \;\; \nexists \lim_{x\to a\pm 0} f(x)$$

$$f(x) = \ln(x),\ a = 0;\ \ f(x) = \frac{1}{x},\ a = 0;\ f(x) = tg(x),\ a_k = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z;$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1};\ \ a = -1$$



Примеры задач:

№1. $f(x)=\dfrac{1}{2-2^{\frac{1}{x+1}}}$; $f(-1)=??$; $f(0)=???$

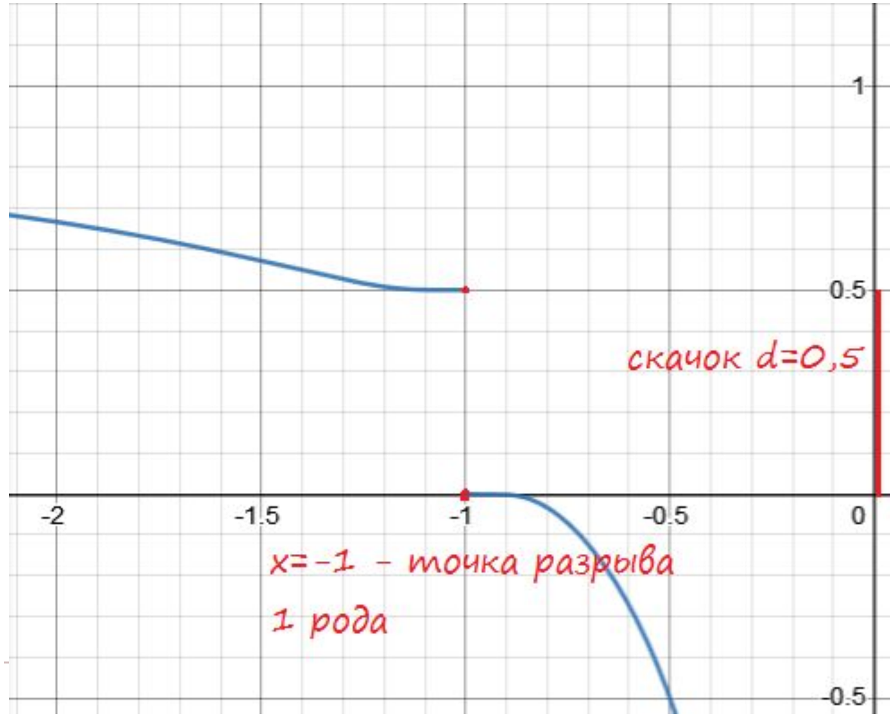
$x+1=0 \Rightarrow x=-1;\quad 2-2^{\frac{1}{x+1}}=0 \Rightarrow 2^{\frac{1}{x+1}}=2^1 \Rightarrow \dfrac{1}{x+1}=1 \Rightarrow x=0;$

1) $x=-1;$

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{1}{2-2^{\frac{1}{x+1}}}=\left(\begin{array}{l} x<-1 \Rightarrow x+1<0,\ (x+1)\to 0 \Rightarrow \\ \dfrac{1}{x+1}\to -\infty \Rightarrow 2^{\frac{1}{x-1}}\to 2^{-\infty}=\dfrac{1}{2^{\infty}}=0 \end{array}\right)=\frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{1}{2-2^{\frac{1}{x+1}}}=\left(\begin{array}{l} x>-1 \Rightarrow x+1>0, (x+1)\to 0 \Rightarrow \\ \dfrac{1}{x+1}\to +\infty \Rightarrow 2^{\frac{1}{x+1}}\to 2^{+\infty}=+\infty \end{array}\right)=0$$

$x=-1$ *является точкой разрыва* 1 *рода.*



2) $x=0;\ \ f(x)=\dfrac{1}{2-2^{\frac{1}{x+1}}};$

$$\lim_{x\to -0}\frac{1}{2-2^{\frac{1}{x+1}}}=\left(\begin{array}{l} -1<x<0\Rightarrow 0<x+1<1\Rightarrow \dfrac{1}{x+1}>1,\ \ \dfrac{1}{x+1}\to 1\Rightarrow \\ 2-2^{\frac{1}{x+1}}<0,\ \ 2-2^{\frac{1}{x+1}}\to -0 \end{array}\right)=\left(\frac{1}{-0}=-\infty\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to +0}\frac{1}{2-2^{\frac{1}{x+1}}}=\left(\begin{array}{l} x>0\Rightarrow x+1>1\Rightarrow \dfrac{1}{x+1}<1,\ \dfrac{1}{x+1}\to 1 \\ 2-2^{\frac{1}{x+1}}>0,\ \ 2-2^{\frac{1}{x+1}}\to +0 \end{array}\right)=\left(\frac{1}{+0}\right)=+\infty$$

$x=0-$*точка разрыва* 2 *рода*

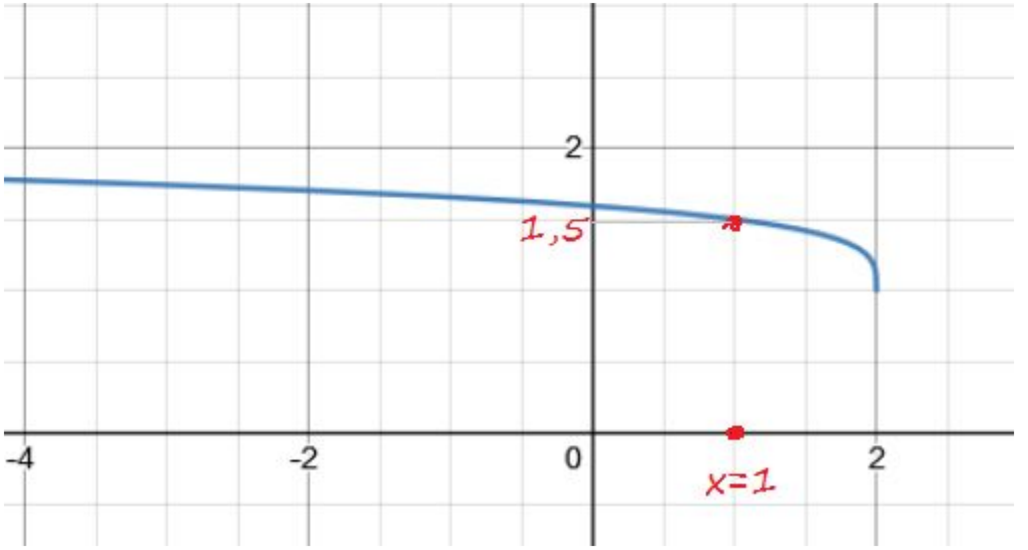
$$№2.\ f(x)=\frac{\sqrt{2-x}-1}{\sqrt[3]{2-x}-1};$$

точки разрыва : $\sqrt[3]{2-x}-1=0 \Rightarrow x=1;$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2-x}-1}{\sqrt[3]{2-x}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2-x}-1}{(2-x)^{\frac{1}{3}}-1}\cdot\frac{\sqrt{2-x}+1}{\sqrt{2-x}+1}\cdot\frac{(2-x)^{\frac{2}{3}}+(2-x)^{\frac{1}{3}}\cdot 1+1^2}{(2-x)^{\frac{2}{3}}+(2-x)^{\frac{1}{3}}\cdot 1+1^2}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2-x-1}{2-x-1}\cdot\frac{(2-x)^{\frac{2}{3}}+(2-x)^{\frac{1}{3}}+1}{\sqrt{2-x}+1}=\frac{(2-1)^{\frac{2}{3}}+(2-1)^{\frac{1}{3}}+1}{\sqrt{2-1}+1}=\frac{3}{2};$$

$x=1$ *точка устранимого разрыва.*



$$№3.\quad f(x)=\frac{\sin 3x}{|x|};\left(\frac{\sin 3x}{-x}\to -3;\ \frac{\sin 3x}{x}\to 3\right)$$

$$x=0:\ f(0)=\frac{0}{0}=????\quad |x|=\begin{cases}-x,\ x<0\\ x, x\ge 0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to -0}\frac{\sin 3x}{|x|}=\lim_{x\to -0}\frac{\sin 3x}{-x}=-3;\quad \lim_{x\to +0}\frac{\sin 3x}{|x|}=\lim_{x\to +0}\frac{\sin 3x}{x}=3$$

$$x=0-\textit{точка разрыва 1 рода};\ d=|-3-3|=6$$

Домашнее задание.

1) $f(x) = arctg\,\dfrac{1}{4-x^2};$

2) $f(x) = e^{x-\frac{1}{x}};$

3) $f(x) = \dfrac{1}{1-2^{\frac{x}{x-1}}};\; x=0;\; x=1;$

4) $f(x) = 2-e^{\frac{x-1}{x^2}};$

5) $f(x) = 1-e^{-\frac{1}{|x|}};$

6) $f(x) = \dfrac{1}{1+2^{tgx}};$