

Вычисление пределов функций

1 и 2 замечательные пределы функций, точки разрыва
функций

1 замечательный предел

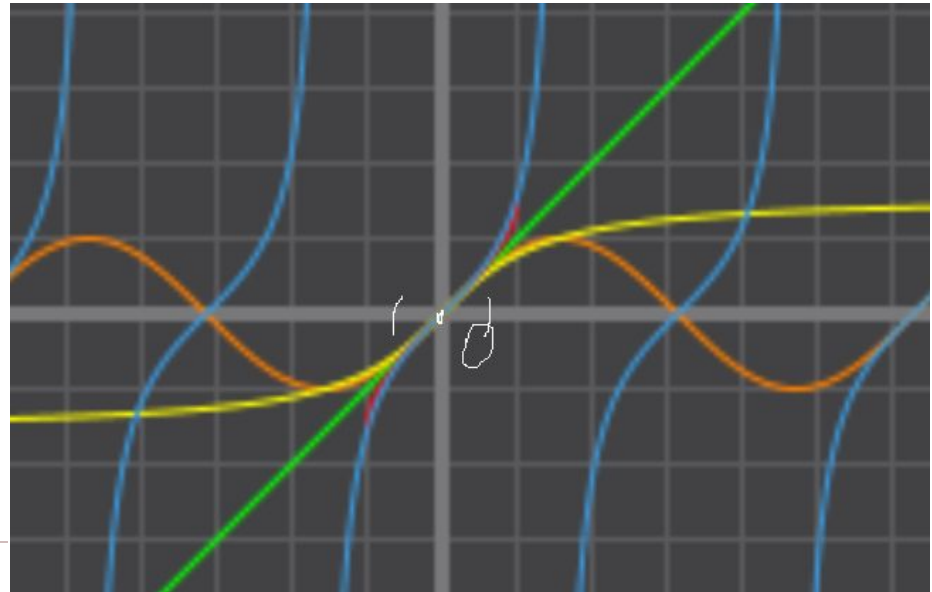
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = ? : 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} \cdot \frac{e^x}{e^x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot \frac{1}{e^x} = (t = 2x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th} x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcth} x}{x} = 1$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(kx)}{x} = k; \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} \cdot \frac{k}{k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} \cdot k = (t = kx) = k \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = k \cdot 1 = k$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos kx - \cos mx}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{k-m}{2} x \cdot \sin \frac{k+m}{2} x}{x \cdot x} = (-2) \cdot \left(\frac{k-m}{2} \right) \left(\frac{k+m}{2} \right) = \frac{m^2 - k^2}{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{\sin mx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{\sin mx} \cdot \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} \cdot \frac{x}{\sin mx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sin mx}{x} \right)} = \frac{k}{m};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2kx}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 kx}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin kx}{x} \right)^2 = 2 \cdot k^2;$$



Примеры:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{arctg} 4x}{1 - \cos 6x} &= \left(\begin{array}{l} 1 - \cos 6x = 2 \sin^2 3x \\ \frac{1 - \cos 6x}{x^2} \rightarrow 2 \cdot 3^2 = 18 \end{array} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \cos 6x} \cdot \left(\frac{x}{x} \right) \cdot \frac{\operatorname{arctg} 4x}{1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\frac{1 - \cos 6x}{x^2} \right)} \cdot \frac{\operatorname{arctg} 4x}{x} = 4 \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(\frac{\sin 3x}{x} \right)^2} = 4 \cdot \frac{1}{2 \cdot 9} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}; \end{aligned}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\pi - x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left(\begin{array}{l} \pi - x = t \Rightarrow x = \pi - t \\ \sin 3x = \sin(3\pi - 3t) = \sin 3t \end{array} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3t}{t} = 3;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\pi - 4x} = \left(\frac{\cos \frac{\pi}{2}}{0} = \frac{0}{0} \right) = \left(\begin{array}{l} t = \pi - 4x \Rightarrow x = \frac{\pi - t}{4} \\ \cos 2x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right) = \sin \frac{t}{2} \end{array} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} = \frac{1}{2};$$

№219

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \left(\begin{array}{l} t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1 \\ \sin \pi x = \sin \pi(t + 1) = \sin(\pi t + \pi) = -\sin \pi t \\ \sin 3\pi x = \sin 3\pi(t + 1) = \sin(3\pi t + 3\pi) = -\sin 3\pi t \end{array} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin \pi t}{-\sin 3\pi t} \cdot \frac{t}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \pi t}{t} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sin 3\pi t}{t} \right)} = \frac{\pi}{3\pi} = \frac{1}{3}; \end{aligned}$$



4) №222

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2}}{x-a} = \left(\begin{array}{l} t = x-a \\ t \rightarrow 0 \Leftrightarrow x \rightarrow a \end{array} \right) =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} 2 \frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \cdot \cos \frac{t+2a}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos a = \cos a$$

$$= \left(\begin{array}{l} t = x-a \Rightarrow x = t+a \\ \sin x = \sin(t+a) = \sin t \cos a + \cos t \sin a \end{array} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t \cos a + \cos t \sin a - \sin a}{t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin t}{t} \cdot \cos a \right) + \left(\frac{\cos t \sin a - \sin a}{t} \right) \right] = \cos a + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin a (1 - \cos t)}{t} =$$

$$= \cos a - \sin a \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{t}{2}}{t^2} \cdot t = \cos a$$



$$230. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\pi - x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\pi - x} = \left(\begin{array}{l} t = \pi - x \Rightarrow x = \pi - t \Rightarrow \\ \sin \frac{x}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right) = \cos \frac{t}{2} \end{array} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \frac{t}{2}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{t}{4}}{t^2} \cdot t = 2 \cdot \frac{1}{16} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} t = 0$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = 2 \right)$$

$$231. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \left(\frac{1}{2} - \cos x \right)}{-3 \left(x - \frac{\pi}{3} \right)} = -\frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos \frac{\pi}{3} - \cos x}{x - \frac{\pi}{3}} = -\frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin \left(\frac{x - \frac{\pi}{3}}{2} \right) \sin \frac{x + \frac{\pi}{3}}{2}}{x - \frac{\pi}{3}} =$$

$$= \left(t = x - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = t + \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{4}{3} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{t}{2}}{t} \cdot \cos \left(t + \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) = \frac{-4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3};$$

5) №224

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x+2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left(\frac{t = x+2 \Rightarrow x = t-2}{\operatorname{tg} \pi(t-2) = \operatorname{tg} \pi t} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \pi t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\sin \pi t}{\cos \pi t} \right)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \pi t}{t} \cdot \frac{1}{\cos \pi t} = \pi \cdot \frac{1}{\cos 0} = \pi$$

6) №226

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (-\cos x) = -\frac{1}{\sqrt{2}};$$

ДЗ: №№ 220; 223; 233; 235;

236;

237; 238

Пример задания из КТ:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin x - \sqrt{2}}{\sin 4x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} 2 \frac{\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin 4x} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{4}}{\sin 4x} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin \left(\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) \cos \left(\frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} \right)}{\sin 4x} = \\ &= \left(\begin{array}{l} t = x - \frac{\pi}{4} \rightarrow 0 \Rightarrow \\ x = t + \frac{\pi}{4} \end{array} \right) = 4 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{t}{2} \cos \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\sin 4 \left(t + \frac{\pi}{4} \right)} = 4 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{t}{2}}{-\sin 4t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \cos \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = -4 \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin 4t} = \\ &= -2\sqrt{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{t}{2}}{t} \cdot \frac{t}{\sin 4t} = -2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{4}; \end{aligned}$$



Примеры из КТ :

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos 5x}}{\sin^2 x} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos 5x}}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos 5x}}{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos 5x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 1 - \cos 5x}{\sin^2 x \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos 5x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{\sin^2 x \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos 5x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{5x}{2}}{\sin^2 x \cdot \sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos 5x}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{5}{2} x}{\sin x} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{5}{2} \right)^2 = \frac{25}{4\sqrt{2}} = \frac{25\sqrt{2}}{8}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{4x} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{4x}}{\left(\frac{1}{x} \right)^2} = \left(t = \frac{1}{x} \rightarrow 0 \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \frac{t}{4}}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{t}{8}}{t^2} = \\ &= 2 \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{t}{8}}{t} \right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{8} \right)^2 = \frac{1}{32}; \end{aligned}$$



3) Замечание: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-5x}}{\arcsin 2x} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-5x}}{\arcsin 2x} \cdot \frac{e^{5x}}{e^{5x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{8x} - 1}{\arcsin 2x} \cdot \frac{1}{e^{5x}} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{5x}} = 1 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{8x} - 1}{x} \cdot \frac{x}{\arcsin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} 8 \cdot \frac{e^{8x} - 1}{8x} \cdot \frac{1}{\left(2 \cdot \frac{\arcsin 2x}{2x} \right)} = \frac{8}{2} = 4; \end{aligned}$$



2 замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = (1^\infty) = e \approx 2,71878\dots; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-4}{x+7}\right)^{2x-1} = \left(\text{получить в скобках выражение: } 1 + \frac{1}{f(x)} \right) = \left(\begin{array}{l} \frac{x-4}{x+7} = \frac{(x+7)-7-4}{x+7} = \\ = 1 - \frac{11}{x+7} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{x+7}{-11}\right)} \end{array} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{l} \text{в показателе домножим} \\ \text{и поделим на } f(x) \end{array} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{x+7}{-11}\right)} \right)^{\frac{x+7}{-11} \cdot \frac{-11}{x+7} \cdot (2x-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-11(2x-1)}{x+7}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-22x+11}{x+7}} = e^{-22};$$



$$\begin{aligned}
2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{2x^2 + 3} \right)^{x^2} &= (1^\infty ? \text{нет}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 3 - 1 - x^2}{2x^2 + 3} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x^2 + 1}{2x^2 + 3} \right)^{x^2} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{2x^2 + 3}{-x^2 - 1} \right)} \right)^{x^2} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} x^2} = \left(\left(\frac{1}{2} \right)^\infty = 0 \right) = 0
\end{aligned}$$

В этом примере нет 2 замечательного предела

ДЗ: №№ 246-252

Точки разрыва функции

Опр. Функция $f(x)$ непрерывной в точке $x=a$, если

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |x-a| < \delta \rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$, т.е. существует предел

функции в точке $x = a$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A = f(a)$$

Точки разрыва, классификация:

1) точки устранимого разрыва.

$x=a$ – точка устранимого разрыва, если $f(x)$ неопределена

в точке $x=a$, но $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Rightarrow$ функцию можно доопределить

в точке $x=a: f(a)=A$.



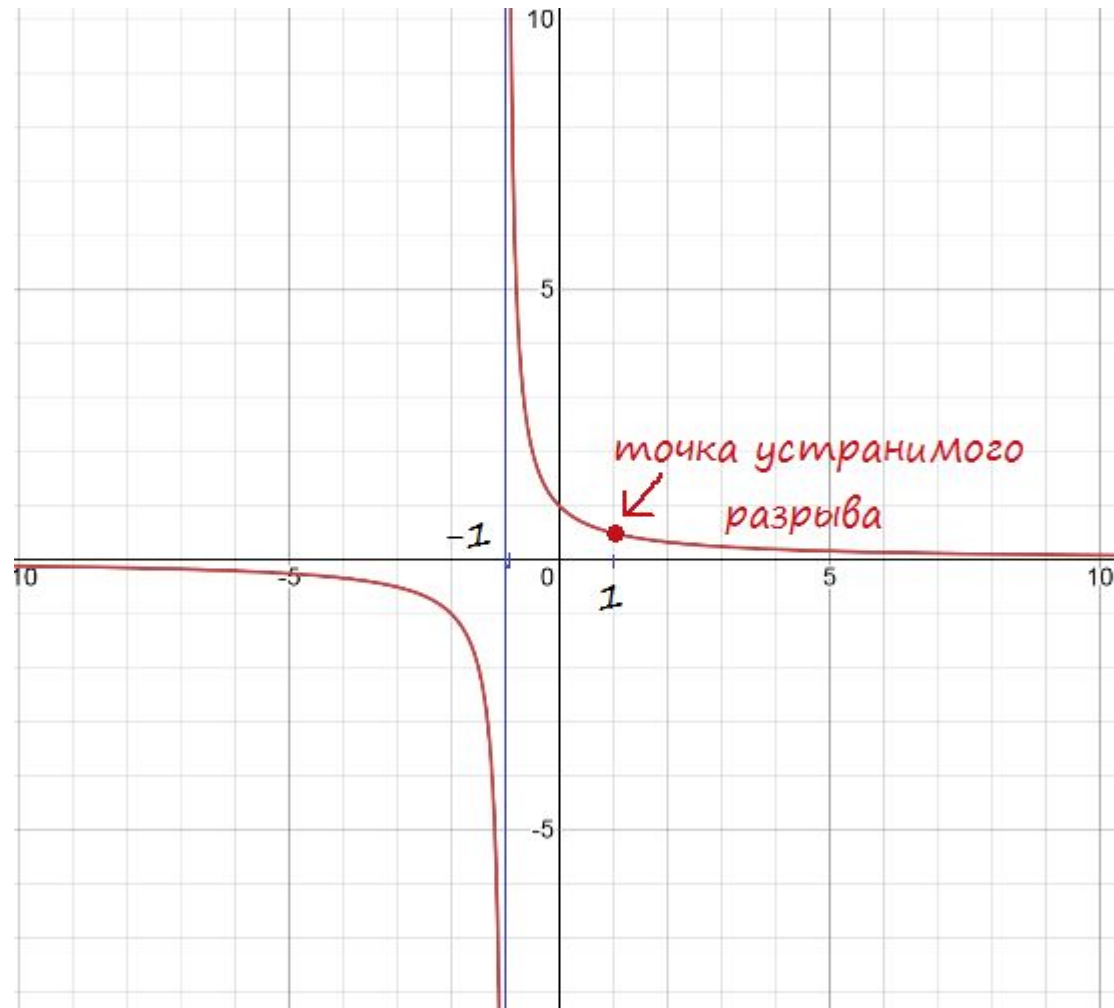
Пример:

$$1) f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}; \quad a=1: f(1) = \frac{0}{0} ???$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x=1 - \text{точка устранимого разрыва} \Rightarrow$$

доопределим функцию в точке $x=1$: $f(1) = \frac{1}{2}$.





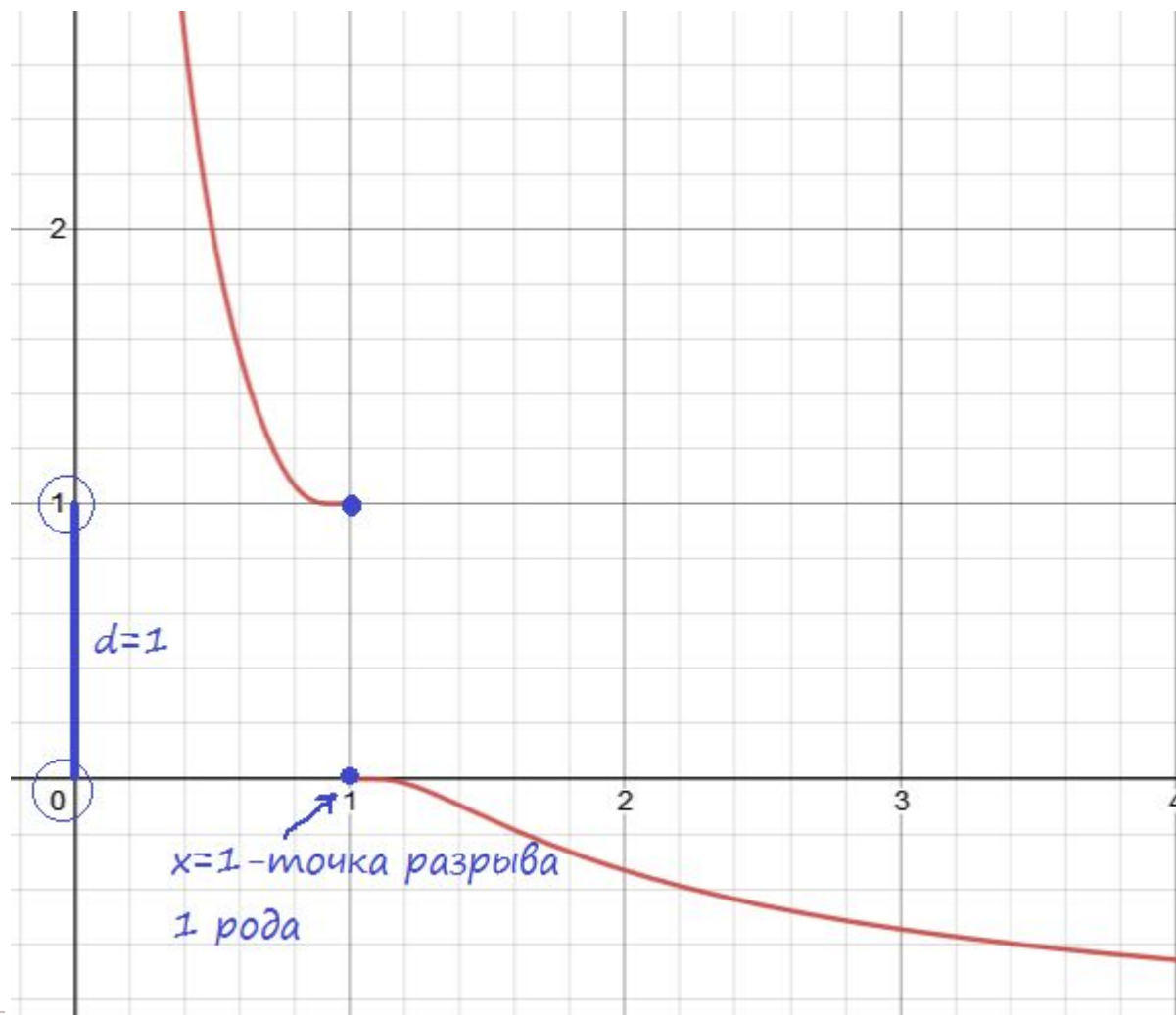
2) Точка разрыва 1 рода:

$x = a$ является точкой разрыва 1 рода, если

$\exists \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A; \exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = B; f(a)$ либо не определено, либо $f(a) = C;$

скачок $d = |A - B|$

$$f(x) = \frac{1}{1 - 2^{\frac{x}{x-1}}}; a = 1$$



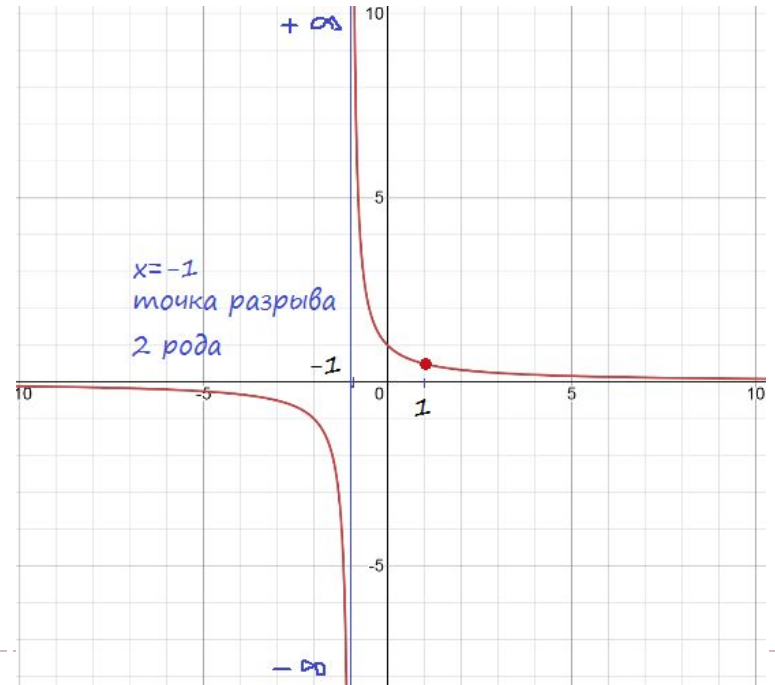
3) Точка разрыва 2 рода.

$x = a$ является точкой разрыва 2 рода, если

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \pm\infty \text{ и/или } \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \pm\infty \text{ и/или } \exists \lim_{x \rightarrow a\pm 0} f(x)$$

$$f(x) = \ln(x), a = 0; f(x) = \frac{1}{x}, a = 0; f(x) = \operatorname{tg}(x), a_k = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}; a = -1$$



Примеры задач:

$$\text{№1. } f(x) = \frac{1}{2 - 2^{\frac{1}{x+1}}}; f(-1) = ??; f(0) = ???$$

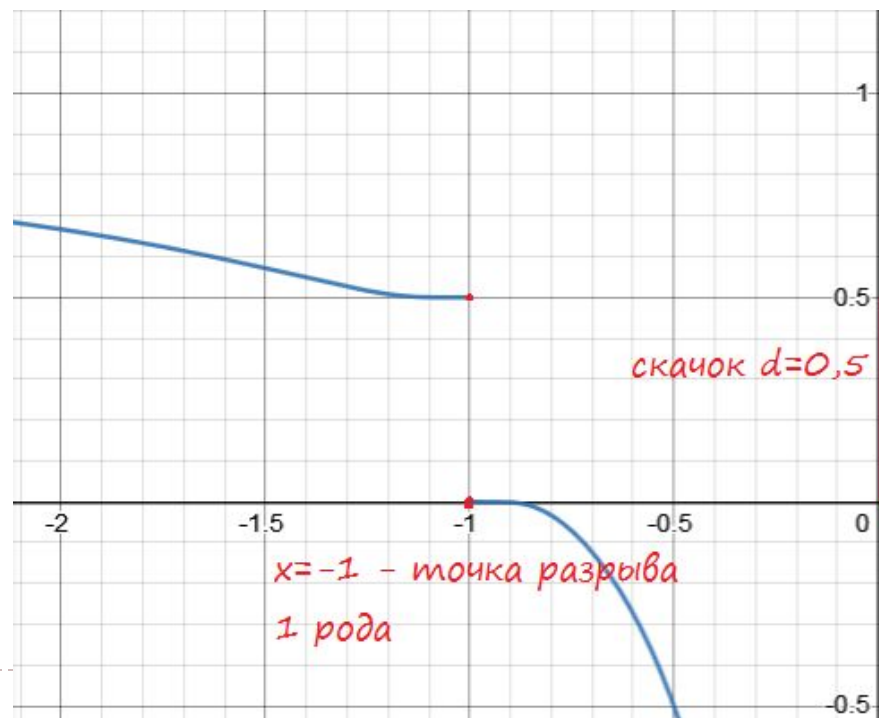
$$x+1=0 \Rightarrow x=-1; \quad 2 - 2^{\frac{1}{x+1}} = 0 \Rightarrow 2^{\frac{1}{x+1}} = 2^1 \Rightarrow \frac{1}{x+1} = 1 \Rightarrow x=0;$$

1) $x = -1$;

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{2 - 2^{\frac{1}{x+1}}} = \left(\begin{array}{l} x < -1 \Rightarrow x+1 < 0, (x+1) \rightarrow 0 \Rightarrow \\ \frac{1}{x+1} \rightarrow -\infty \Rightarrow 2^{\frac{1}{x+1}} \rightarrow 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0 \end{array} \right) = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1}{2 - 2^{\frac{1}{x+1}}} = \left(\begin{array}{l} x > -1 \Rightarrow x+1 > 0, (x+1) \rightarrow 0 \Rightarrow \\ \frac{1}{x+1} \rightarrow +\infty \Rightarrow 2^{\frac{1}{x+1}} \rightarrow 2^{+\infty} = +\infty \end{array} \right) = 0$$

$x = -1$ является точкой разрыва 1 рода.

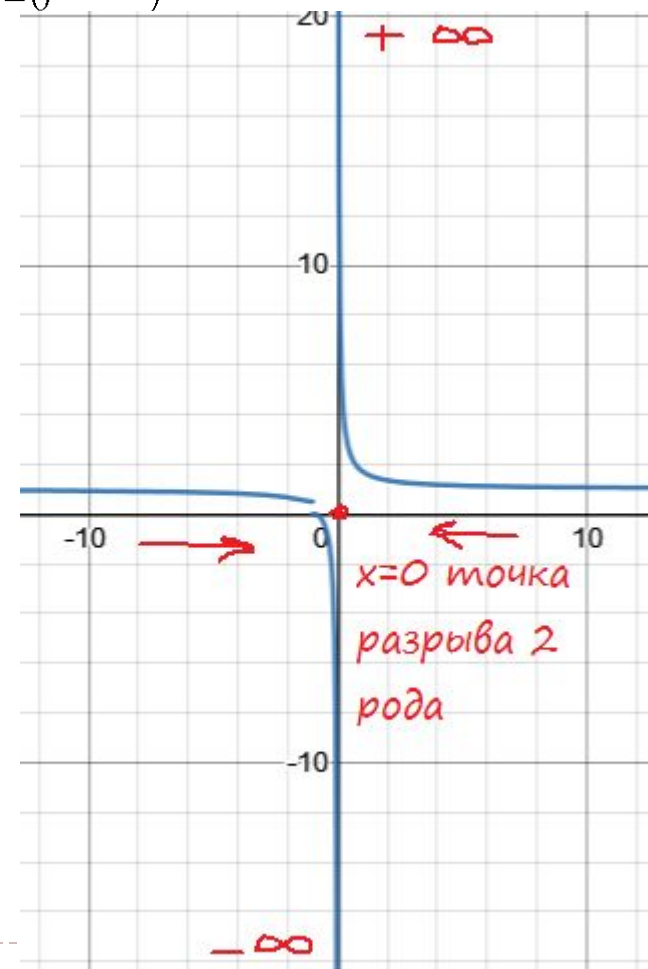


$$2) \quad x=0; \quad f(x) = \frac{1}{2-2^{\frac{1}{x+1}}};$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{2-2^{\frac{1}{x+1}}} = \left(\begin{array}{l} -1 < x < 0 \Rightarrow 0 < x+1 < 1 \Rightarrow \frac{1}{x+1} > 1, \frac{1}{x+1} \rightarrow 1 \Rightarrow \\ 2-2^{\frac{1}{x+1}} < 0, 2-2^{\frac{1}{x+1}} \rightarrow -0 \end{array} \right) = \left(\frac{1}{-0} = -\infty \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{2-2^{\frac{1}{x+1}}} = \left(\begin{array}{l} x > 0 \Rightarrow x+1 > 1 \Rightarrow \frac{1}{x+1} < 1, \frac{1}{x+1} \rightarrow 1 \\ 2-2^{\frac{1}{x+1}} > 0, 2-2^{\frac{1}{x+1}} \rightarrow +0 \end{array} \right) = \left(\frac{1}{+0} \right) = +\infty$$

$x=0$ – точка разрыва 2 рода



$$\text{№2. } f(x) = \frac{\sqrt{2-x}-1}{\sqrt[3]{2-x}-1};$$

точки разрыва: $\sqrt[3]{2-x}-1=0 \Rightarrow x=1$;

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x}-1}{\sqrt[3]{2-x}-1} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x}-1}{(2-x)^{\frac{1}{3}}-1} \cdot \frac{\sqrt{2-x}+1}{\sqrt{2-x}+1} \cdot \frac{(2-x)^{\frac{2}{3}}+(2-x)^{\frac{1}{3}}+1}{(2-x)^{\frac{2}{3}}+(2-x)^{\frac{1}{3}}+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x-1}{2-x-1} \cdot \frac{(2-x)^{\frac{2}{3}}+(2-x)^{\frac{1}{3}}+1}{\sqrt{2-x}+1} = \frac{(2-1)^{\frac{2}{3}}+(2-1)^{\frac{1}{3}}+1}{\sqrt{2-1}+1} = \frac{3}{2}; \end{aligned}$$

$x=1$ точка устранимого разрыва.



$$\text{№3. } f(x) = \frac{\sin 3x}{|x|}; \left(\frac{\sin 3x}{-x} \rightarrow -3; \frac{\sin 3x}{x} \rightarrow 3 \right)$$

$$x = 0: f(0) = \frac{0}{0} = \text{????} \quad |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin 3x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin 3x}{-x} = -3; \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin 3x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin 3x}{x} = 3$$

$x = 0$ – точка разрыва 1 рода; $d = |-3 - 3| = 6$



Домашнее задание.

$$1) f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{4-x^2};$$

$$2) f(x) = e^{x-\frac{1}{x}};$$

$$3) f(x) = \frac{1}{1-2^{\frac{x}{x-1}}}; x \neq 0; x \neq 1;$$

$$4) f(x) = 2 - e^{\frac{x-1}{x^2}};$$

$$5) f(x) = 1 - e^{-\frac{1}{|x|}};$$

$$6) f(x) = \frac{1}{1+2^{\operatorname{tg}x}};$$

