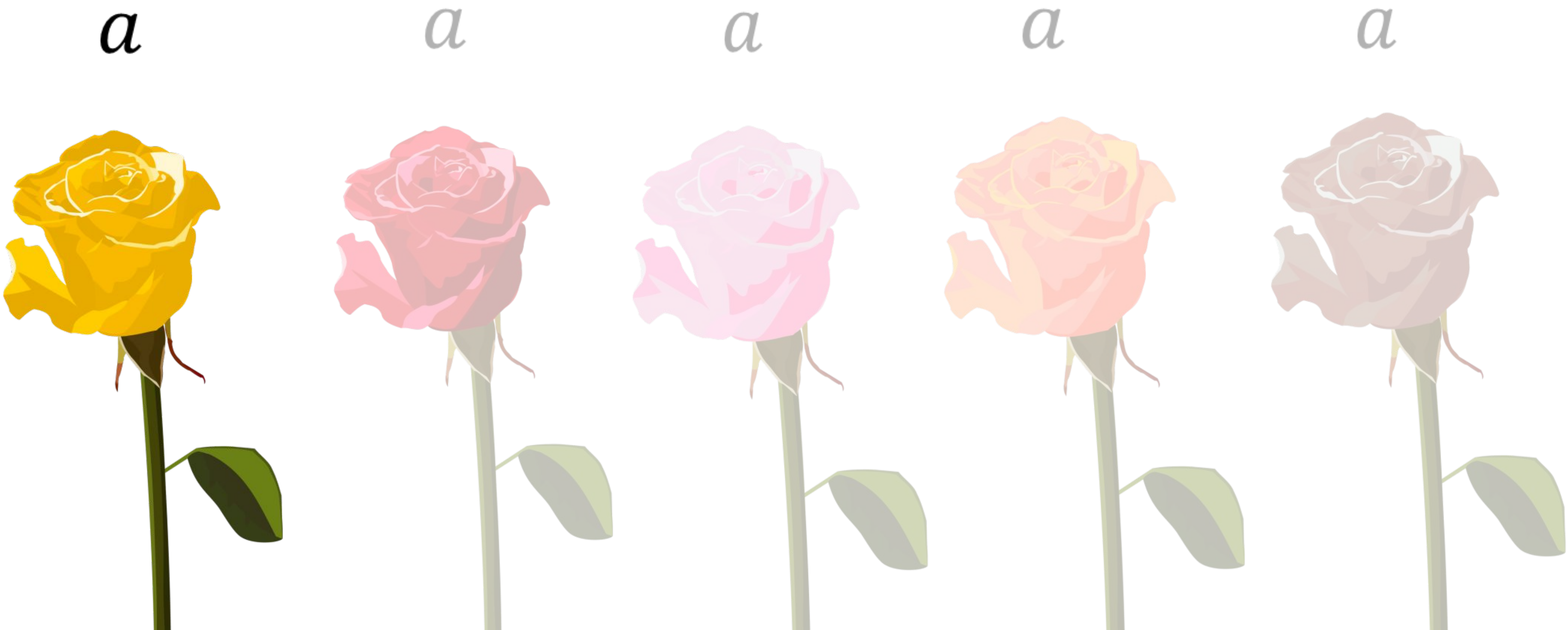
Сочетания

Имеется 5 роз разного цвета. Составить букет из трех роз. Какие букеты могут быть составлены?



a

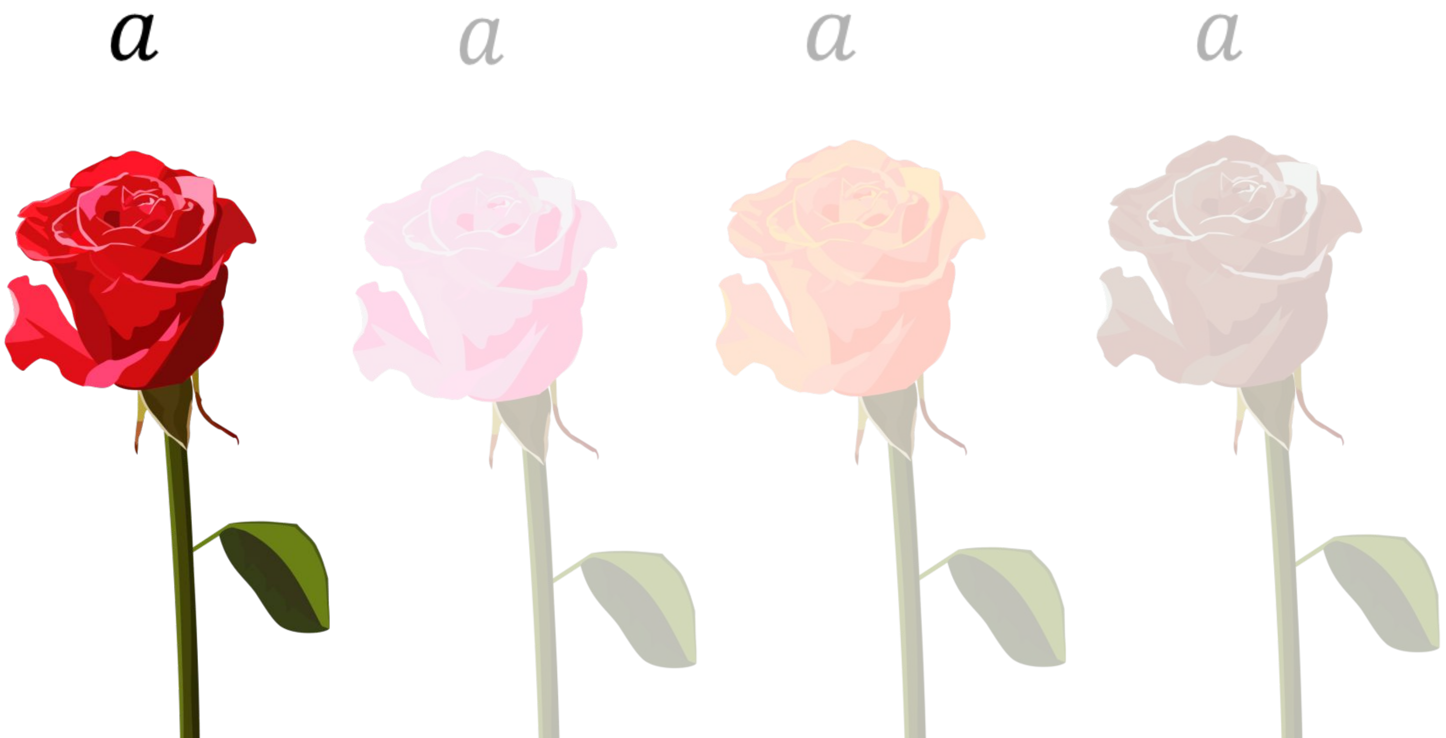
a

a

a

a

a


a
a
a
a

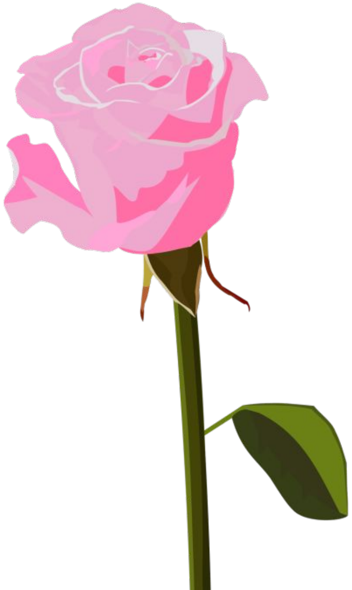
a

a

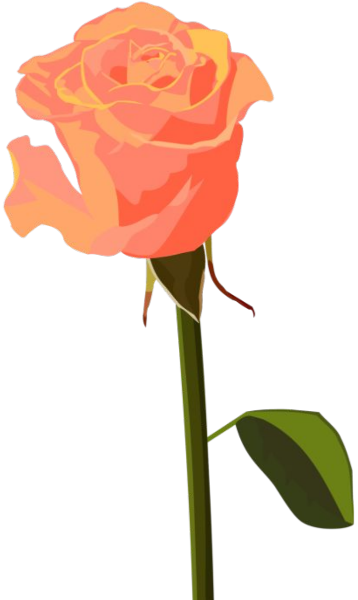
a

a

a



a



a

α

α

a

a

a a a a a

α

a

a

Число перестановок равно a

a

a a

a

a a

a a

a a

a

a a

a

a

В наборе 12 карандашей. Надо выбрать 3 карандаша. Сколькими способами можно сделать выбор?

a a a a

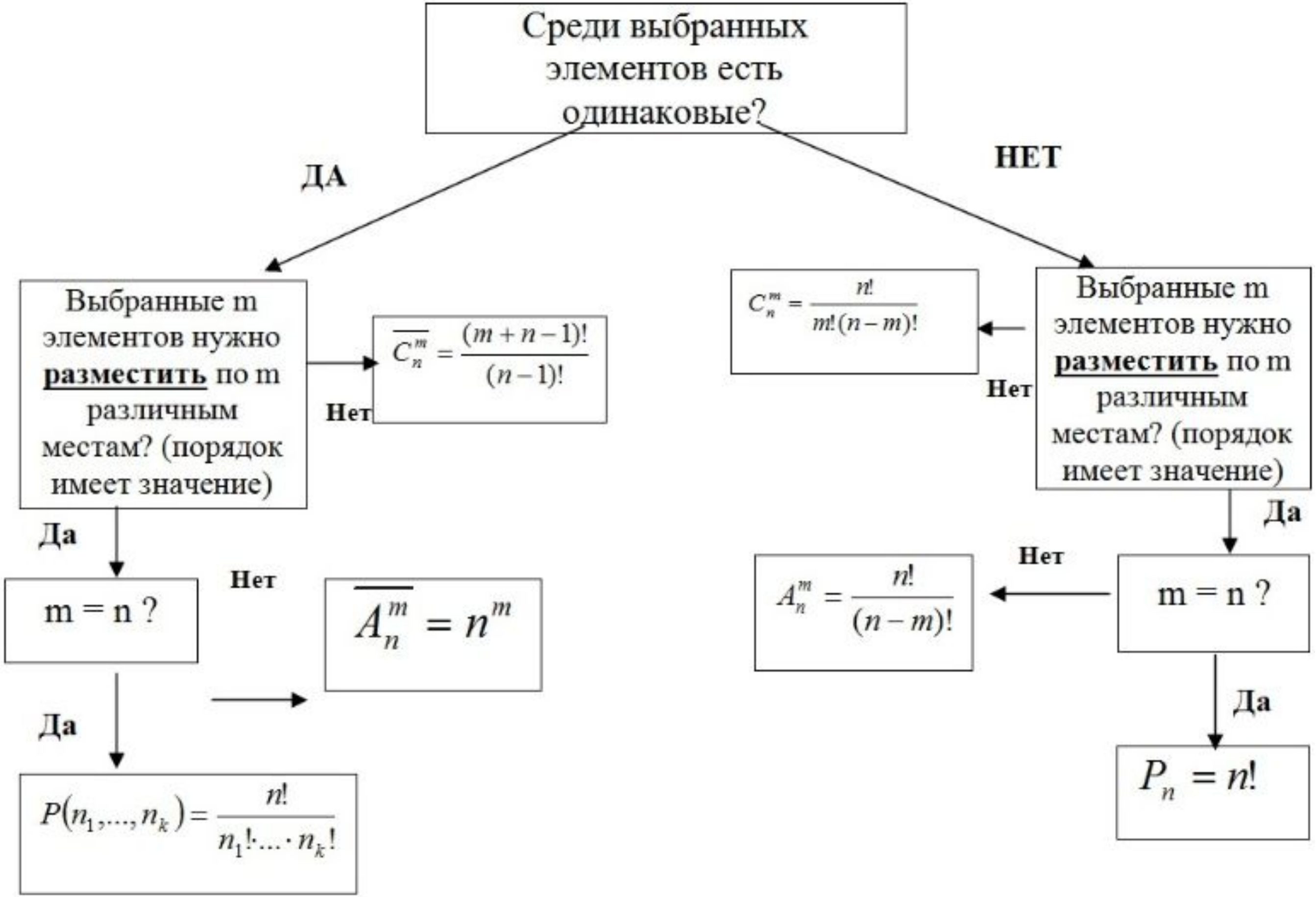
В классе учатся 14 мальчиков и 12 девочек. Для участия в соревнованиях следует выделить четырёх мальчиков и трёх девочек. Сколькими способами можно сделать выбор?

14 мальчиков

12 девочек

220220.

ОПОРНЫЙ КОНСПЕКТ ПО РАЗДЕЛУ "КОМБИНАТОРИКА"



Правила сложения и умножения в комбинаторике

Правило суммы. Если два действия A и B взаимно исключают друг друга, причем действие A можно выполнить m способами, а B – n способами, то выполнить одно любое из этих действий (либо A, либо B) можно $n + m$ способами.

Пример 1.

В классе учится 16 мальчиков и 10 девочек. Сколькими способами можно назначить одного дежурного?

Решение

Дежурным можно назначить либо мальчика, либо девочку, т.е. дежурным может быть любой из 16 мальчиков, либо любая из 10 девочек.

По правилу суммы получаем, что одного дежурного можно назначить 16+10=26 способами.

Правило произведения. Пусть требуется выполнить последовательно k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие n_2 способами, третье – n_3 способами и так до k-го действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий вместе могут быть выполнены:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

способами.

Пример 2.

В классе учится 16 мальчиков и 10 девочек. Сколькими способами можно назначить двух дежурных?

Решение

Первым дежурным можно назначить либо мальчика, либо девочку. Т.к. в классе учится 16 мальчиков и 10 девочек, то назначить первого дежурного можно 16+10=26 способами.

После того, как мы выбрали первого дежурного, второго мы можем выбрать из оставшихся 25 человек, т.е. 25-ю способами.

По теореме умножения двое дежурных могут быть выбраны 26*25=650 способами.

Сочетания без повторений. Сочетания с повторениями

Классической задачей комбинаторики является задача о числе сочетаний без повторений, содержание которой можно выразить вопросом: *сколькими способами можно выбрать m из n различных предметов?*

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример 3.

Необходимо выбрать в подарок 4 из 10 имеющихся различных книг. Сколькими способами можно это сделать?

Решение

Нам из 10 книг нужно выбрать 4, причем порядок выбора не имеет значения. Таким образом, нужно найти число сочетаний из 10 элементов по 4:

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{6!\cdot 4!} = 210.$$

Рассмотрим задачу о числе сочетаний с повторениями: имеется по r одинаковых предметов каждого из n различных типов; *сколькими способами можно выбрать m ($m \leq r$) из этих (n*r) предметов?*

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

Пример 4.

В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

Решение

Т.к. среди 7 пирожных могут быть пирожные одного сорта, то число способов, которыми можно купить 7 пирожных, определяется числом сочетаний с повторениями из 7 по 4.

$$\overline{C}_4^7 = C_{4+7-1}^7 \frac{10!}{7!\cdot 3!} = 120.$$

Размещения без повторений. Размещения с повторениями

Классической задачей комбинаторики является задача о числе размещений без повторений, содержание которой можно выразить вопросом: *<u>сколькими способами можно выбрать и разместить по m различным местам m из n различных предметов?</u>*

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример 5.

В некоторой газете 12 страниц. Необходимо на страницах этой газеты поместить четыре фотографии. Сколькими способами можно это сделать, если ни одна страница газеты не должна содержать более одной фотографии?

Решение.

В данной задаче мы не просто выбираем фотографии, а размещаем их на определенных страницах газеты, причем каждая страница газеты должна содержать не более одной фотографии. Таким образом, задача сводится к классической задаче об определении числа размещений без повторений из 12 элементов по 4 элемента:

$$A_{12}^4 = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!} = 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 11880\,.$$

Таким образом, 4 фотографии на 12 страницах можно расположить 11880 способами.

Также классической задачей комбинаторики является задача о числе размещений с повторениями, содержание которой можно выразить вопросом: *сколькими способами можно выбрать и разместить по m различным местам m из n предметов, среди которых есть одинаковые?*

$$\overline{A}_n^m = n^m$$

Пример 6.

У мальчика остались от набора для настольной игры штампы с цифрами 1, 3 и 7. Он решил с помощью этих штампов нанести на все книги пятизначные номера– составить каталог. Сколько различных пятизначных номеров может составить мальчик?

Решение

Можно считать, что опыт состоит в 5-кратном выборе с возвращением одной из 3 цифр (1, 3, 7). Таким образом, число пятизначных номеров определяется числом размещений с повторениями из 3 элементов по 5:

$$\overline{A}_3^5 = 3^5 = 243.$$