АЛГЕБРА

для потока «Прикладная математика и информатика»

Четвёртый модуль 2020 – 2021 уч. года

ЛЕКЦИ
Я 3

Г.М. Полотовский
(polotovsky@gmail.com
)

18 апреля 2022 г.

Теорема 2.5. *Пусть G – группа,* $g \in G$. *Множество* $< g > = \{g^n \mid n \in Z\}$ *всех степеней элемента* g *является подгруппой в G.*

Это утверждение непосредственно следует из определения 6 и теоремы 2.3.

Определение 7. Подгруппа $< g >$ называется *циклической подгруппой, порождённой элементом* g, а элемент g *– порождающим элементом* подгруппы $< g >$.

Замечания: в аддитивной записи $< g > = \{ng \mid n \in Z\}$;
образующий элемент циклической подгруппы, вообще говоря, может быть выбран не единственным способом.

Примеры.

1. $G = \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \equiv \boldsymbol{C}^*$ относительно операции умножения комплексных чисел.

$i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1; < i > = \{1, i, -1, -i\}$ – подгруппа порядка 4.

2. $GL_2(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle| a_{ij} \in R, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \right\}$.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, тогда $< A > = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$, поскольку

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Таким образом, циклическая группа, порождённая матрицей A, имеет порядок 2.

Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \ldots; A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Таким образом, теперь подгруппа, порождённая матрицей A, имеет бесконечный порядок.

Пусть G – произвольная группа, $g \in G$. Рассмотрим циклическую подгруппу, порожденную элементом g. Возможны следующие два случая:

1). Все степени элемента g различны между собой. Тогда группа $< g >$ бесконечна и не существует такого целого ненулевого числа n, что $g^n = e$.

2). Существуют различные $s < t$, такие что $g^s = g^t$. Умножим это равенство на g^{-s}, получим $g^{t-s} = e$. Следовательно, существует такое целое положительное число n, что $g^n = e$. Среди таких чисел n можно выбрать наименьшее.

<u>Определени</u> ***Іорядком элемента*** g называется наименьшее целое <u>положительное</u> число n, такое что $g^n = e$. Обозначение: $\operatorname{ord} g = n$. Если такого числа не существует, то говорят, что g имеет бесконечный порядок.

Примеры.

1) $G = \mathbb{Z}$, $\operatorname{ord} 0 = 1$, порядки остальных элементов G бесконечны, так как если кратное $nm = 0$ при $n \neq 0$, то $m = 0$.

Теорема 3.1. *Пусть G – группа, e – её нейтральный элемент,* $g \in G$. *Тогда*
(1) $g^k = e \Leftrightarrow \operatorname{ord} g \mid k$ ($a|b$ означает, что a является делителем числа b);
(2) $\operatorname{ord} g^k = \frac{\operatorname{ord} g}{(k, \operatorname{ord} g)}$ ((a, b) обозначен НОД (a, b)).

Доказательство. Пусть $\operatorname{ord} g = n$.

(1) Разделим с остатком k на n: $k = nt + r$, $0 \le r < n$.

$$g^k = g^{nt+r} = (g^n)^t g^r = eg^r = g^r;$$
$$g^k = e \Leftrightarrow g^r = e \Leftrightarrow r = 0 \text{ (т. к. } r < n).$$

(2) Пусть $(k, n) = d$ и $n = n_1 d, k = k_1 d$, т. е. $(n_1, k_1) = 1$.

$$\forall m\colon (g^k)^m = e \Leftrightarrow g^{km} = e \xLeftrightarrow[\text{в силу (1)}]{} n \mid km \Leftrightarrow n_1 \mid k_1 m \Leftrightarrow n_1 \mid m$$

Итак, $(g^k)^m = e \Leftrightarrow \frac{\operatorname{ord} g}{(k, \operatorname{ord} g)} \mid m$. В силу (1) $\operatorname{ord} g^k = \frac{\operatorname{ord} g}{(k, \operatorname{ord} g)}$. ■

Теорема 3.2. *Порядок циклической подгруппы, порождённой элементом g группы G, совпадает с порядком элемента g.*

Доказательство.

Если порядок элемента g бесконечен, то все его степени различны, поэтому циклическая группа $< g >$ бесконечна.

Пусть $\operatorname{ord} g = n$. Рассмотрим любой элемент $g^k \in < g >$.

Разделим с остатком k на n: $k = nt + r$, $0 \leq r < n$.

Имеем $g^k = g^{nt+r} = (g^n)^t g^r = eg^r = g^r$;

Следовательно, $< g > = \{g^0, g^1, g^2, \dots, g^{n-1}\}$, так как $0 \leq r < n$.

Все элементы в фигурных скобках различны:
если бы было $g^p = g^q$ при $0 \leq p < q < n$, то получили бы $g^{q-p} = e$ при $0 < q - p < n$, что противоречит тому, что $\operatorname{ord} g = n$.

Итак, $< g > = \{g^0, g^1, g^2, \dots, g^{n-1}\}$ и $| < g > | = n = \operatorname{ord} g$. ■

Определение 9. Группа G называется *циклической,* если существует элемент $g \in G$ такой, что $G =< g >$.

Следует отметить, что любая циклическая группа абелева, так как любые две степени элемента перестановочны между собой: $g^m g^n = g^n g^m \quad \forall m,n \in Z$. Также отметим, что циклические группы могут быть как конечными, так и бесконечными.

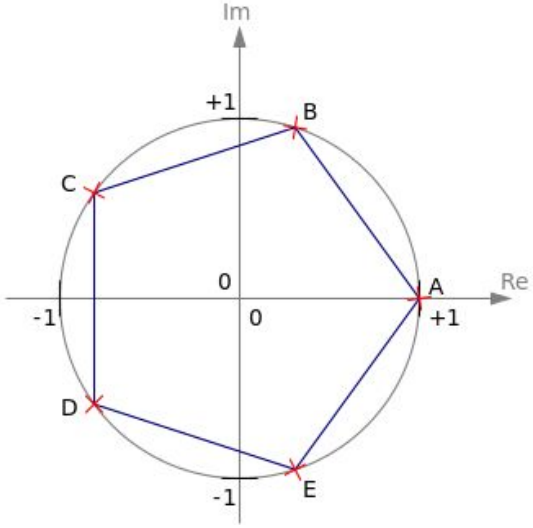
Примеры.

1. Группа $G = (Z, +)$ $-$ бесконечная циклическая группа.

В качестве порождающего элемента можно выбрать число 1 или число –1.

Других порождающих элементов у этой группы нет.

2. Пусть $U_n = \{\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n} \mid k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}\}$ –множество комплексных корней степени n из единицы.



Очевидно, $(U_n, \cdot)$ – группа порядка n, и эта группа циклическая – её образующим элементом будет

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},$$

поскольку $\varepsilon_1^k = \varepsilon_k \ \forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

Теорема 3.3. (1) *Конечная группа G циклическая* $\Leftrightarrow$ *в G есть элемент порядка* $|G|$.

(2) *Элемент* g^k *является образующим в конечной группе* $< g > \Leftrightarrow$

$$(k, \operatorname{ord} g) = 1.$$

(3) *Количество образующих в циклической группе порядка n равно* $\varphi(n)$.

Доказательство.

(1) очевидно (группа циклическая $\Leftrightarrow$ есть порождающий элемент $\Leftrightarrow$ порядок этого элемента равен порядку группы (теорема 3.2));

(2) следует из (1) и из утверждения (2) теоремы 3.1.

(3). Напомню, что через $\varphi(n)$ обозначается *функция Эйлера*, которая по определению есть количество чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n, поэтому (3) следует из (2).

Пример. $\boldsymbol{Z_6}$ ={0, 1, 2, 3, 4, 5}. $|Z_6|$=6. $\varphi(6) = 2$. Образующие: 1 и 5.

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

2 не является образующим.

{0, 2, 4} – подгруппа, порождённая элементом 2.

Теорема 3.4. (о подгруппах циклической группы)

(1) *Любая подгруппа циклической группы сама является циклической.*

(2) *Имеется взаимно однозначное соответствие между делителями порядка конечной циклической группы и её подгруппами.*

Доказательство. (1) Пусть $G =< g >$ и $H \subset G$ – подгруппа в G.

Если $H = \{e\}$ или $H = G$, то H циклическая.

Пусть $H \neq \{e\}$. Так как в G все элементы являются степенями элемента $g \in G$, то элементы из H тоже являются степенями элемента g, где $g \neq e$.

Если $g^k \in H$ то $g^{-k} = \left(g^k\right)^{-1} \in H$, поскольку H – подгруппа.

Таким образом, в H найдётся элемент g в положительной степени. Среди всех таких положительных степеней выберем элемент g^m с **наименьшим показателем** m, т. е. если $g^t \in H$ и $0 \leq t < m$, то $t = 0$.

Покажем, что $H =< g^m >$.

Так как $g^m \in H$, то $< g^m > \subset H$.

Чтобы показать обратное включение, надо показать, что любой элемент из H является некоторой степенью элемента g^m.

Как уже отмечалось, все элементы из H являются степенями элемента g^m.

Пусть $g^k \in H$. Поделим с остатком k на m: $k = mq + r$ и $0 \leq r < m$.

$g^r = g^{k-mq} = g^k(g^m)^{-q} \in H$, т. к. $g^k \in H$ и $g^m \in H$.

$r = 0$ в силу выбора числа m, поэтому $k = mq$, т. е. $g^k = (g^m)^q$, ч. т. д.

(2) Пусть G – циклическая группа порядка n, и g – её порождающий элемент, т. е. $G = \{e, g, g^2, g^3, \dots, g^{n-1}\}$.

Пусть $k|n$, т. е. $n = kq$, где $q \in Z$. Тогда $\{e = (g^k)^0, g^k, (g^k)^2, \dots, (g^k)^{q-1}\}$ – циклическая подгруппа порядка q: замкнутость операции очевидна из свойств степени, а $(g^k)^q = g^n = e$.

Таким образом, имеем инъекцию из множества делителей порядка группы G в множество её циклических подгрупп.

Обратно, пусть H – подгруппа конечной циклической группы $G =< g >$ и $|G| = n$, т. е. $g^n = e$ и $n -$ **наименьшее из таких положительных чисел.**

В доказательстве части (1) мы доказали, что неединичная подгруппа H однозначно определяется числом $m = \min_{g^k \in H}\{k > 0\}$, причём если $|H| = q$, то $(g^m)^q = e$, т. е. $g^{mq} = e$ и mq – **наименьший из таких показателей.**

Следовательно, $n = mq$, т. е. каждой подгруппе конечной циклической группы отвечает делитель q её порядка n, и это соответствие – инъекция. ■

Итак, если $G =< g >$, $|G| = n$ и $H =< g^m > \subset G$, то $m = \min\limits_{g^k \in H}\{k > 0\}$, $q = |H|$ – делитель числа n и $m = \frac{n}{q} = \frac{|G|}{|H|}$.

Пример.

Z_6. $\quad 6 \vdots \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 6.$

Подгруппы: $\{Z_6\}$ $\{0, 2, 4\}$ $\{0, 3\}$ $\{0\}$

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Упражнение. Перечислите все подгруппы группы Z_{15}, выбрав в качестве образующей в Z_{15} класс вычетов числа 2.