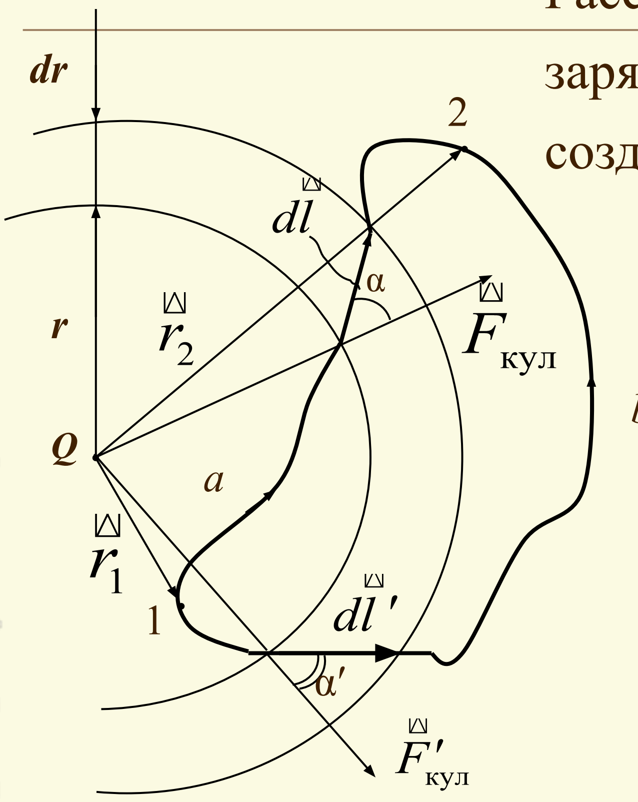
Электричество и магнетизм

Семестр 2

ЛЕКЦИЯ № 3

1. Работа сил электростатического поля при перемещении заряда. Потенциал и разность потенциалов.
2. Теорема о циркуляции вектора напряжённости электростатического поля.
3. Связь напряжённости и потенциала электростатического поля.
4. Эквипотенциальные поверхности

Работа сил электростатического поля при перемещении заряда. Потенциал.



Рассмотрим произвольное перемещение (1–*a*–2) заряда *q* в электростатическом поле. Пусть поле создаётся неподвижным точечным зарядом *Q*

$$dA = \vec{F}d\vec{l} = F \cdot dl \cdot \cos\alpha = F \cdot dr \ .$$

$$A_{1-2}\left(\vec{F}_{\text{Кул.}}\right) = \int_1^2 \vec{F}_{\text{К}} d\vec{l} = \int_1^2 F_K dr.$$

на перемещении $d\vec{l}'$ электрическая сила совершит работу

$$dA' = \vec{F} \cdot d\vec{l}' = F \cdot dl' \cdot \cos\alpha' = Fdr$$

$$A'_{1-b-2}\left(\vec{F}_{\text{К}}\right) = A_{1-a-2}\left(\vec{F}_{\text{К}}\right)$$

Вычислим работу кулоновской силы при перемещении заряда q из точки 1 в положение 2 (по любой траектории):

$$A_{1-2}\left(\vec{F}_{\text{Кул.}}\right) = \int_1^2 \vec{F}_{\text{К}} d\vec{l} = \int_{r_1}^{r_2} F_{\text{К}} \cdot dr = \int_{r_1}^{r_2} k_0 \frac{qQ}{r^2} dr =$$

$$= k_0 qQ \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = k_0 qQ \left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = k_0 qQ \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Силы, работа которых не зависит от вида траектории и определяется только положением её начальной и конечной точек, называются ***консервативными***.

Вывод:

Кулоновская сила консервативна.

Величина работы никак не связана с видом траектории. Она зависит только от положения её начальной (r_1) и конечной (r_2) точек.

В механике было показано, что *работа консервативной силы равна убыли потенциальной энергии системы*:

$$A_{1-2}\left(\vec{F}_{\text{конс.}}\right) = E_{p_1} - E_{p_2} = W_{p_1} - W_{p_2}$$

В последней формуле мы получили:

$$A_{1-2}\left(\vec{F}_{\text{Кул.}}\right) = k_0 \frac{qQ}{r_1} - k_0 \frac{qQ}{r_2} = W_{p_1} - W_{p_2}$$

Потенциальная энергия системы двух точечных зарядов, или, что то же самое, энергия заряда *q* в электрическом поле точечного заряда *Q* :

$$W_p = k_0 \frac{qQ}{r} + const$$

Константа принимается обычно равной нулю. Это означает, что принимается равной нулю энергия взаимодействия зарядов q и Q на бесконечном удалении их друг от друга (при $r = \infty$). Тогда на расстоянии r энергия взаимодействия равна:

$$\boxed{W_p = k_0 \frac{qQ}{r}}$$

Потенциальная энергия заряженной частицы в электрическом поле зависит, таким образом, от величины заряда q и от его положения в поле относительно заряда Q, создающего поле.

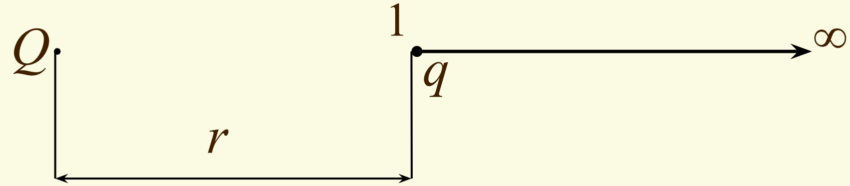
$$\boxed{W_p = k_0 \frac{qQ}{r}}$$

Энергия единичного ($q = 1$) точечного заряда уже не будет связана с величиной этого пробного заряда q и может быть принята в качестве энергетической характеристики данной точки электростатического поля:

$$\boxed{\varphi = \frac{W_p}{q} = k_0 \frac{Q}{r}}$$

- **потенциал точечного заряда Q**

Можно придать потенциалу и иной физический смысл. Поместим заряд q в поле точечного заряда Q. Первоначально расстояние между зарядами — r.



Отпустим заряд q. Под действием электрической силы отталкивания заряд q удалится в бесконечность. На этом перемещении кулоновская сила совершит работу:

$$A_{1-\infty}\left(F_{\text{Кул.}}\right)=\int_{1}^{\infty}\vec{F}_{\text{Кул.}}d\vec{l}=\int_{r}^{\infty}Fdr=\int_{r}^{\infty}k_0\frac{qQ}{r^2}dr=k_0qQ\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r}^{\infty}=k_0\frac{qQ}{r}$$

Получаем:

$$\varphi=k_0\frac{Q}{r}=\frac{A_{1-\infty}\left(F_{\text{Кул.}}\right)}{q}$$

$$\boxed{\varphi = k_0 \frac{Q}{r} = \frac{A_{1-\infty}\left(F_{\text{Кул.}}\right)}{q}}$$

<u>Потенциал</u> некоторой точки электростатического поля равен работе, совершаемой электрической силой при удалении единичного положительного заряда из этой точки в бесконечность.

Теперь вычислим потенциал поля, созданного системой точечных зарядов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$.

При перемещении заряда q из точки 1 в бесконечность электрическая сила совершит работу, равную алгебраической сумме работ сил, действующих на движущийся заряд со стороны зарядов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$

$$A_{1-\infty}\left(\vec{F}\right) = A_{1-\infty}\left(\vec{F}_1\right) + A_{1-\infty}\left(\vec{F}_2\right) + \dots + A_{1-\infty}\left(\vec{F}_N\right)$$

Работа каждой силы равна:

$$A_{1-\infty}\left(\vec{F}_i\right)=q\cdot k_0\frac{Q_i}{r_i}=q\cdot\varphi_i$$

Здесь $\varphi_i=k_0\dfrac{Q_i}{r_i}$ — потенциал поля, создаваемого в точке 1 зарядом Q_i.

Таким образом, суммарная работа равна:

$$A_{1-\infty}\left(\vec{F}\right)=q\varphi_1+q\varphi_2+\ldots+q\varphi_N=q\sum_{i=1}^{N}\varphi_i=q\varphi$$

где $\varphi=\sum_{i=1}^{N}\varphi_i$

Потенциал поля, созданного системой точечных зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых в рассматриваемой точке каждым из зарядов в отдельности:

$$\boxed{\varphi=\sum_{i=1}^{N}\varphi_i}$$ ***- принцип суперпозиции для потенциала***

Разность потенциалов.

Обратимся к вычислению работы электрической силы при перемещении заряда q из точки 1 теперь уже произвольного электростатического поля в бесконечность. Поскольку эта работа не зависит от формы траектории, унося заряд в бесконечность, пройдём предварительно точку 2 электростатического поля.

Работа на этом перемещении складывается из двух частей:

$$A_{1-\infty}\left(\vec{F}_{\text{эл.}}\right) = A_{1-2}\left(\vec{F}_{\text{эл.}}\right) + A_{2-\infty}\left(\vec{F}_{\text{эл.}}\right)$$

Разделив это равенство на величину переносимого заряда q, получим:

$$\frac{A_{1-\infty}\left(\vec{F}_{\text{эл.}}\right)}{q} = \frac{A_{1-2}\left(\vec{F}_{\text{эл.}}\right)}{q} + \frac{A_{2-\infty}\left(\vec{F}_{\text{эл.}}\right)}{q}$$

или: $$\frac{A_{1-2}\left(\vec{F}_{эл.}\right)}{q}=\frac{A_{1-\infty}\left(\vec{F}_{эл.}\right)}{q}-\frac{A_{2-\infty}\left(\vec{F}_{эл.}\right)}{q}=\varphi_1-\varphi_2$$

Здесь $$\varphi_1-\varphi_2=\frac{A_{1-\infty}\left(\vec{F}_{эл.}\right)}{q}-\frac{A_{2-\infty}\left(\vec{F}_{эл.}\right)}{q}$$ — *разность потенциалов* двух точек поля.

Разность потенциалов равна работе, совершаемой электрической силой при перемещении единичного положительного заряда из начальной точки в конечную:

$$\boxed{\varphi_1-\varphi_2=\frac{A_{1-2}\left(\vec{F}_{эл.}\right)}{q}}$$

Зная разность потенциалов двух точек поля, легко вычислить работу электрического поля, совершаемую при перемещении заряда *q* между этими точками:

$$A_{1-2}\left(\vec{F}_{\text{эл.}}\right) = q\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)$$

В международной системе единиц СИ потенциал (и разность потенциалов) измеряется в вольтах:

$$\varphi_1 = \frac{A_{1-\infty}\left(F_{\text{эл.}}\right)}{q}$$ - потенциал $\left[\frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \text{В}\right]$

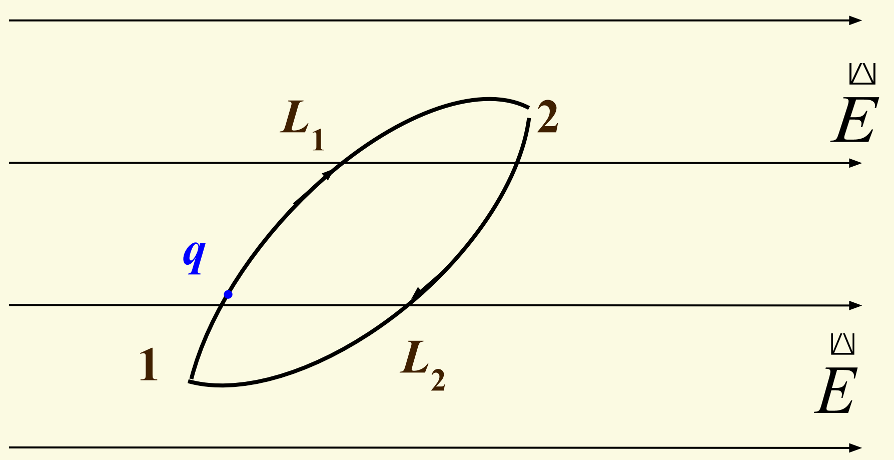
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{1-2}\left(F_{\text{эл.}}\right)}{q}$$ - разность потенциалов

Теорема о циркуляции вектора напряжённости электростатического поля

Существуют два равнозначных определения консервативной силы. Оба они подробно обсуждались в механике.

1. Консервативной называется сила, работа которой не зависит от формы траектории.

2. Консервативной называется сила, работа которой на замкнутой траектории равна нулю.



Рассмотрим перемещение заряда q в электростатическом поле $\vec{E}$ по замкнутой траектории. Заряд из точки 1 перемещается по пути L_1 в точку 2, а затем возвращается в исходное положение по другому пути L_2. В процессе этого движения на заряд со стороны поля действует $\vec{F} = q\vec{E}$ консервативная электрическая сила, а работа этой силы на замкнутой траектории $L = L_1 + L_2$ равна нулю:

$$A\left(\vec{F}_{\text{эл.}}\right) = \oint_L \vec{F}_{\text{эл.}} \cdot d\vec{l} = \oint_L q\vec{E} \cdot d\vec{l} = q\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0$$

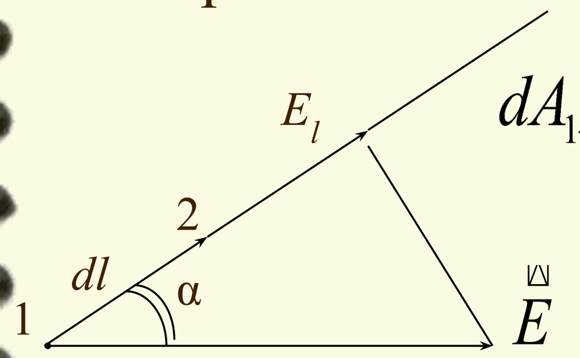
Поделив на q, получим:

$$\boxed{\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0}$$

<u>Теорема о циркуляции в электростатике</u>: *циркуляция вектора напряжённости электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю.*

Связь напряжённости и потенциала электростатического поля

Для отыскания связи, вычислим работу электрической силы на элементарном перемещении dl заряда q в электростатическом поле $\vec{E}$.



$$dA_{1-2}\left(\vec{F}_{\text{эл.}}\right)=\vec{F}d\vec{l}=q\vec{E}d\vec{l}=qEdl\cos\alpha=qE_l dl$$

Эту же работу можно связать с разностью потенциалов $(\phi_1 - \phi_2) = -(\phi_2 - \phi_1) = -d\phi$:

$$dA_{1-2}\left(\vec{F}_{\text{эл.}}\right)=q\left(\varphi_1-\varphi_2\right)=-qd\varphi$$

Объединив, получим: $E_l dl = -d\phi$ или $E_l = -\dfrac{d\varphi}{dl}$

Здесь E_l — проекция вектора напряжённости поля $\vec{E}$ на направление перемещения, а $d\varphi$ — изменение потенциала при переходе в поле из точки 1 в точку 2.

Записав для направлений x, y и z, получим соответствующие составляющие (проекции) вектора напряжённости:

$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \\ E_y = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}, \\ E_z = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}. \end{cases}$$

Первое уравнение этой системы означает, что проекция вектора напряжённости на ось x равна частной производной потенциала по x, взятой с противоположным знаком. Аналогично для $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$.

Полный вектор напряжённости можно представить в виде векторной суммы:

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$$

Последнее уравнение принято записывать так:

$$\boxed{\vec{E} = -grad\varphi}$$

Здесь векторный оператор «*градиент*» - *grad:*

$$\nabla = grad = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)$$

Последнее уравнение устанавливает искомую <u>связь</u> двух характеристик электростатического поля — напряжённости и потенциала: ***напряжённость электростатического поля равна градиенту потенциала с обратным знаком***:

$$\boxed{\vec{E} = -grad\varphi}$$

Единица измерения напряжённости электрического поля:

$$[E] = \frac{[\Delta\varphi]}{[\Delta l]} = \frac{\text{В}}{\text{м}}$$

Формула $\vec{E} = -grad\varphi$ выражает связь потенциала с напряженностью и позволяет

по известным значениям φ найти напряженность поля в каждой точке.

Можно решить и обратную задачу, т.е. по известным значениям $\vec{E}$ в каждой точке поля

найти разность потенциалов между двумя произвольными точками поля.

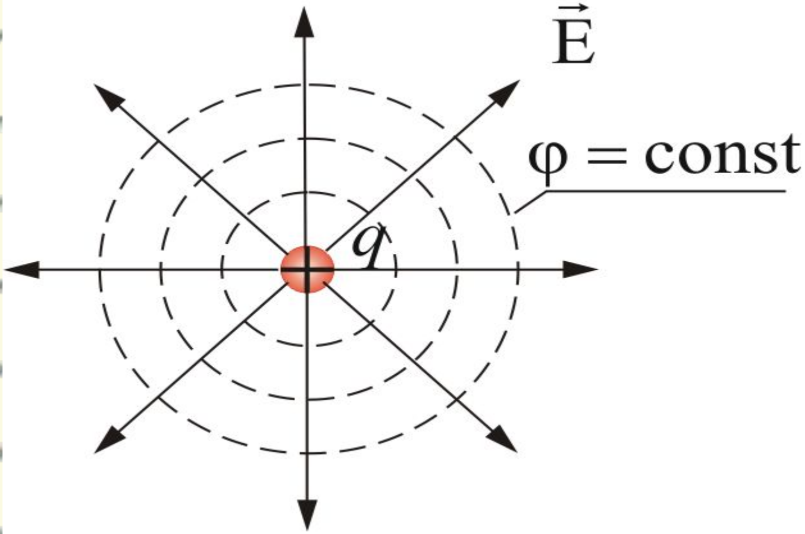
$$\boxed{\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l}}$$

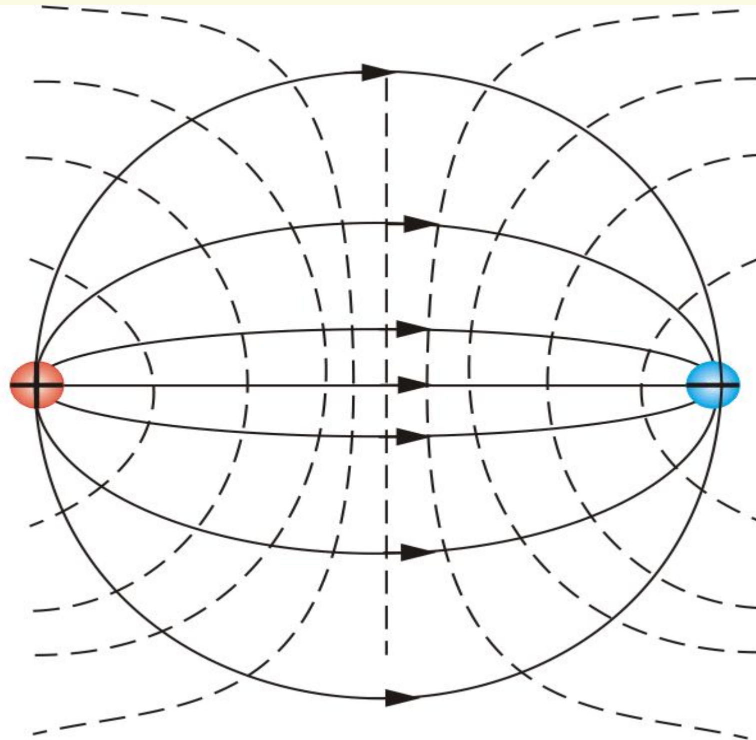
Эквипотенциальные поверхности

Воображаемая поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал, называется ***эквипотенциальной поверхностью*.**

Уравнение этой поверхности (пунктиры на рис.)

$$\varphi(x, y, z) = const$$





Линии напряженности и эквипотенциальные поверхности взаимно перпендикулярны