

# Электричество и магнетизм

*Семестр 2*

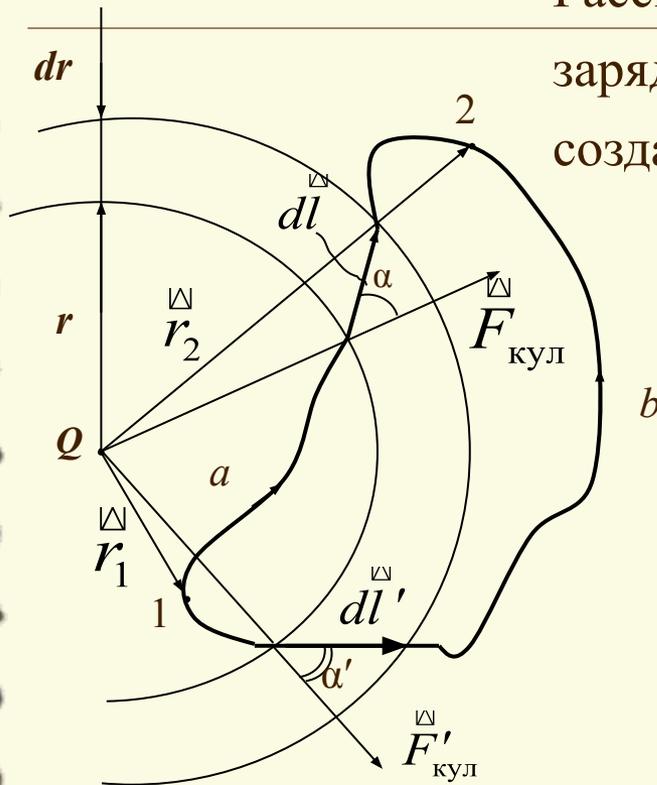
# ЛЕКЦИЯ № 3

---

- 1. Работа сил электростатического поля при перемещении заряда. Потенциал и разность потенциалов.**
- 2. Теорема о циркуляции вектора напряжённости электростатического поля.**
- 3. Связь напряжённости и потенциала электростатического поля.**
- 4. Эквипотенциальные поверхности**

# Работа сил электростатического поля при перемещении заряда. Потенциал.

Рассмотрим произвольное перемещение (1–a–2) заряда  $q$  в электростатическом поле. Пусть поле создаётся неподвижным точечным зарядом  $Q$



$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F \cdot dl \cdot \cos \alpha = F \cdot dr$$

$$A_{1-2}(\vec{F}_{\text{Кул.}}) = \int_1^2 \vec{F}_K \cdot d\vec{l} = \int_1^2 F_K dr.$$

на перемещении  $d\vec{l}'$  электрическая сила совершит работу

$$dA' = \vec{F} \cdot d\vec{l}' = F \cdot dl' \cdot \cos \alpha' = F dr$$

$$A'_{1-b-2}(\vec{F}_K) = A_{1-a-2}(\vec{F}_K)$$

Вычислим работу кулоновской силы при перемещении заряда  $q$  из точки 1 в положение 2 (по любой траектории):

$$\begin{aligned} A_{1-2}(\vec{F}_{\text{Кул.}}) &= \int_1^2 \vec{F}_{\text{К}} \cdot d\vec{l} = \int_{r_1}^{r_2} F_{\text{К}} \cdot dr = \int_{r_1}^{r_2} k_0 \frac{qQ}{r^2} dr = \\ &= k_0 qQ \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = k_0 qQ \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = k_0 qQ \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \end{aligned}$$

Силы, работа которых не зависит от вида траектории и определяется только положением её начальной и конечной точек, называются **консервативными**.

**Вывод:**

**Кулоновская сила консервативна.**

Величина работы никак не связана с видом траектории. Она зависит только от положения её начальной ( $r_1$ ) и конечной ( $r_2$ ) точек.

---

В механике было показано, что *работа консервативной силы равна убыли потенциальной энергии системы:*

$$A_{1-2} \left( \overset{\nabla}{F}_{\text{конс.}} \right) = E_{p_1} - E_{p_2} = W_{p_1} - W_{p_2}$$

В последней формуле мы получили:

$$A_{1-2} \left( \overset{\boxtimes}{F}_{\text{Кул.}} \right) = k_0 \frac{qQ}{r_1} - k_0 \frac{qQ}{r_2} = W_{p_1} - W_{p_2}$$

Потенциальная энергия системы двух точечных зарядов, или, что то же самое, энергия заряда  $q$  в электрическом поле точечного заряда  $Q$  :

---

$$W_p = k_0 \frac{qQ}{r} + const$$

Константа принимается обычно равной нулю. Это означает, что принимается равной нулю энергия взаимодействия зарядов  $q$  и  $Q$  на бесконечном удалении их друг от друга (при  $r = \infty$ ). Тогда на расстоянии  $r$  энергия взаимодействия равна:

$$W_p = k_0 \frac{qQ}{r}$$

Потенциальная энергия заряженной частицы в электрическом поле зависит, таким образом, от величины заряда  $q$  и от его положения в поле относительно заряда  $Q$ , создающего поле.

$$W_p = k_0 \frac{qQ}{r}$$

Энергия единичного ( $q = 1$ ) точечного заряда уже не будет связана с величиной этого пробного заряда  $q$  и может быть принята в качестве энергетической характеристики данной точки электростатического поля:

$$\varphi = \frac{W_p}{q} = k_0 \frac{Q}{r}$$

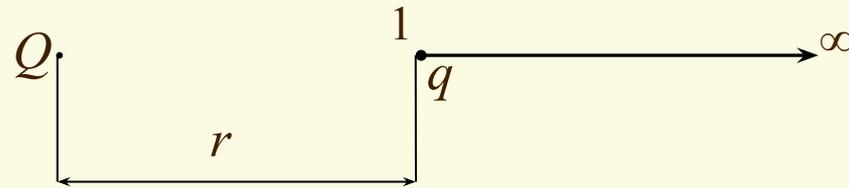
**точечного**

**- потенциал**

**заряда  $Q$**

Можно придать потенциалу и иной физический смысл.  
Поместим заряд  $q$  в поле точечного заряда  $Q$ .  
Первоначально расстояние между зарядами —  $r$ .

---



Отпустим заряд  $q$ . Под действием электрической силы отталкивания заряд  $q$  удалится в бесконечность. На этом перемещении кулоновская сила совершит работу:

$$A_{1-\infty}(F_{\text{Кул.}}) = \int_1^{\infty} F_{\text{Кул.}} dl = \int_r^{\infty} F dr = \int_r^{\infty} k_0 \frac{qQ}{r^2} dr = k_0 qQ \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_r^{\infty} = k_0 \frac{qQ}{r}$$

Получаем:

$$\varphi = k_0 \frac{Q}{r} = \frac{A_{1-\infty}(F_{\text{Кул.}})}{q}$$

$$\varphi = k_0 \frac{Q}{r} = \frac{A_{1-\infty}(F_{\text{Кул.}})}{q}$$

***Потенциал некоторой точки электростатического поля равен работе, совершаемой электрической силой при удалении единичного положительного заряда из этой точки в бесконечность.***

Теперь вычислим потенциал поля, созданного системой точечных зарядов  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$ .

При перемещении заряда  $q$  из точки 1 в бесконечность электрическая сила совершит работу, равную алгебраической сумме работ сил, действующих на движущийся заряд со стороны зарядов  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$

$$A_{1-\infty}(\vec{F}) = A_{1-\infty}(\vec{F}_1) + A_{1-\infty}(\vec{F}_2) + \dots + A_{1-\infty}(\vec{F}_N)$$

Работа каждой силы равна:

$$A_{1-\infty}(\vec{F}_i) = q \cdot k_0 \frac{Q_i}{r_i} = q \cdot \varphi_i$$

Здесь  $\varphi_i = k_0 \frac{Q_i}{r_i}$  — потенциал поля, создаваемого в точке 1 зарядом  $Q_i$ .

Таким образом, суммарная работа равна:

$$A_{1-\infty}(\vec{F}) = q\varphi_1 + q\varphi_2 + \dots + q\varphi_N = q \sum_{i=1}^N \varphi_i = q\varphi$$

$$\text{где } \varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i$$

Потенциал поля, созданного системой точечных зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых в рассматриваемой точке каждым из зарядов в отдельности:

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i$$

**- принцип суперпозиции для потенциала**

## Разность потенциалов.

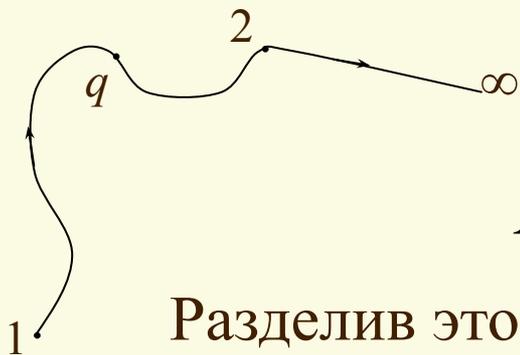
Обратимся к вычислению работы электрической силы при перемещении заряда  $q$  из точки 1 теперь уже произвольного электростатического поля в бесконечность. Поскольку эта работа не зависит от формы траектории, унося заряд в бесконечность, пройдем предварительно точку 2 электростатического поля.

Работа на этом перемещении складывается из двух частей:

$$A_{1-\infty}(\vec{F}_{\text{эл.}}) = A_{1-2}(\vec{F}_{\text{эл.}}) + A_{2-\infty}(\vec{F}_{\text{эл.}})$$

Разделив это равенство на величину переносимого заряда  $q$ , получим:

$$\frac{A_{1-\infty}(\vec{F}_{\text{эл.}})}{q} = \frac{A_{1-2}(\vec{F}_{\text{эл.}})}{q} + \frac{A_{2-\infty}(\vec{F}_{\text{эл.}})}{q}$$



или: 
$$\frac{A_{1-2}(\overset{\nabla}{F}_{\text{эл.}})}{q} = \frac{A_{1-\infty}(\overset{\nabla}{F}_{\text{эл.}})}{q} - \frac{A_{2-\infty}(\overset{\nabla}{F}_{\text{эл.}})}{q} = \varphi_1 - \varphi_2$$

Здесь  $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{1-\infty}(\overset{\nabla}{F}_{\text{эл.}})}{q} - \frac{A_{2-\infty}(\overset{\nabla}{F}_{\text{эл.}})}{q}$  — *разность потенциалов* двух точек поля.

***Разность потенциалов*** равна работе, совершаемой электрической силой при перемещении единичного положительного заряда из начальной точки в конечную:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{1-2}(\overset{\nabla}{F}_{\text{эл.}})}{q}$$

Зная разность потенциалов двух точек поля, легко вычислить работу электрического поля, совершаемую при перемещении заряда  $q$  между этими точками:

$$A_{1-2}(\overset{\Delta}{F}_{\text{эл.}}) = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

В международной системе единиц СИ потенциал (и разность потенциалов) измеряется в вольтах:

$$\varphi_1 = \frac{A_{1-\infty}(F_{\text{эл.}})}{q} \quad \text{- потенциал} \quad \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \text{В} \right]$$

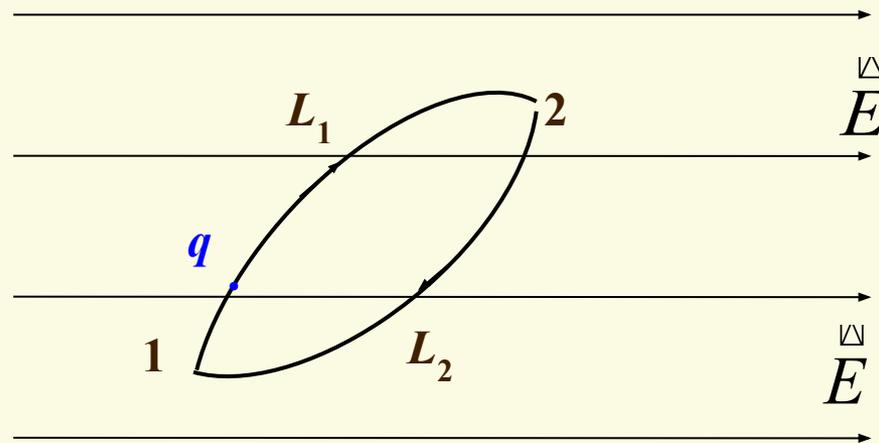
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{1-2}(F_{\text{эл.}})}{q} \quad \text{- разность потенциалов}$$

# Теорема о циркуляции вектора напряжённости электростатического поля

Существуют два равнозначных определения консервативной силы. Оба они подробно обсуждались в механике.

1. Консервативной называется сила, работа которой не зависит от формы траектории.

2. Консервативной называется сила, работа которой на замкнутой траектории равна нулю.



Рассмотрим перемещение заряда  $q$  в электростатическом поле  $\vec{E}$  по замкнутой траектории. Заряд из точки 1 перемещается по пути  $L_1$  в точку 2, а затем возвращается в исходное положение по другому пути  $L_2$ . В процессе этого движения на заряд со стороны поля действует  $\vec{F} = q\vec{E}$  консервативная электрическая сила, а работа этой силы на замкнутой траектории  $L = L_1 + L_2$  равна нулю:

$$A(\vec{F}_{\text{эл.}}) = \oint_L \vec{F}_{\text{эл.}} \cdot d\vec{l} = \oint_L q\vec{E} \cdot d\vec{l} = q \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$$

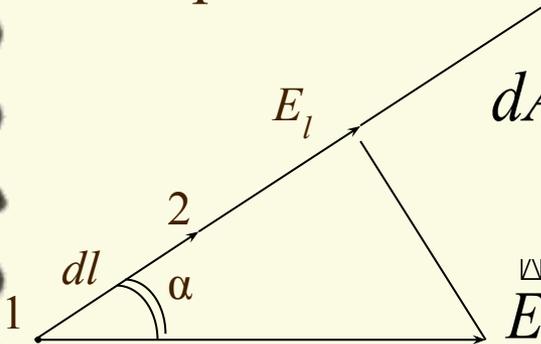
Поделив на  $q$ , получим:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \mathbf{0}$$

Теорема о циркуляции в электростатике: *циркуляция вектора напряжённости электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю.*

# Связь напряжённости и потенциала электростатического поля

Для отыскания связи, вычислим работу электрической силы на элементарном перемещении  $dl$  заряда  $q$  в электростатическом поле  $\vec{E}$ .



$$dA_{1-2}(\vec{F}_{\text{эл.}}) = \vec{F} dl = q \vec{E} dl = q E dl \cos \alpha = q E_l dl$$

Эту же работу можно связать с разностью потенциалов  $(\phi_1 - \phi_2) = -(\phi_2 - \phi_1) = -d\phi$ :

$$dA_{1-2}(\vec{F}_{\text{эл.}}) = q(\phi_1 - \phi_2) = -q d\phi$$

Объединив, получим:  $E_l dl = -d\phi$  или  $E_l = -\frac{d\phi}{dl}$

Здесь  $E_l$  — проекция вектора напряжённости поля  $\vec{E}$  на направление перемещения, а  $d\varphi$  — изменение потенциала при переходе в поле из точки 1 в точку 2.

Записав для направлений  $x$ ,  $y$  и  $z$ , получим соответствующие составляющие (проекции) вектора напряжённости:

$$\begin{cases} E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \\ E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \\ E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \end{cases}$$

Первое уравнение этой системы означает, что проекция вектора напряжённости на ось  $x$  равна частной производной потенциала по  $x$ , взятой с противоположным знаком. Аналогично для  $y$  и  $z$ .

Полный вектор напряжённости можно представить в виде векторной суммы:

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right)$$

Последнее уравнение принято записывать так:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$$

Здесь векторный оператор «градиент» - *grad*:

$$\nabla = \operatorname{grad} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right)$$

Последнее уравнение устанавливает искомую связь двух характеристик электростатического поля — напряжённости и потенциала:

*напряжённость электростатического поля равна градиенту потенциала с обратным знаком:*

$$\nabla E = -grad\varphi$$

Единица измерения напряжённости электрического поля:

$$[E] = \frac{[\Delta\varphi]}{[\Delta l]} = \frac{\text{В}}{\text{м}}$$

Формула  $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$  выражает связь потенциала с напряженностью и позволяет

по известным значениям  $\varphi$  найти напряженность поля в каждой точке.

Можно решить и обратную задачу, т.е. по известным значениям  $\vec{E}$  в каждой точке поля

найти разность

потенциалов между двумя произвольными точками поля.

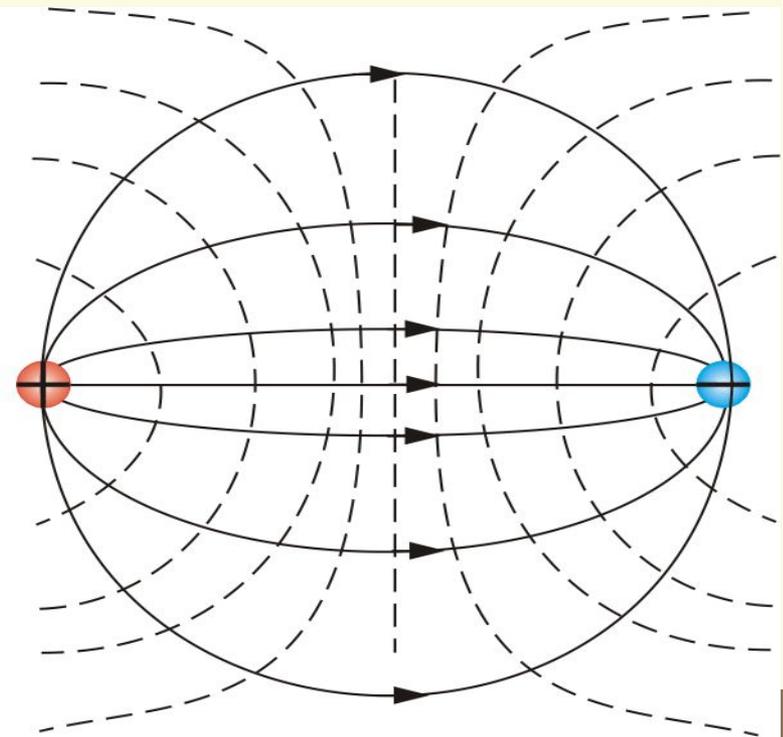
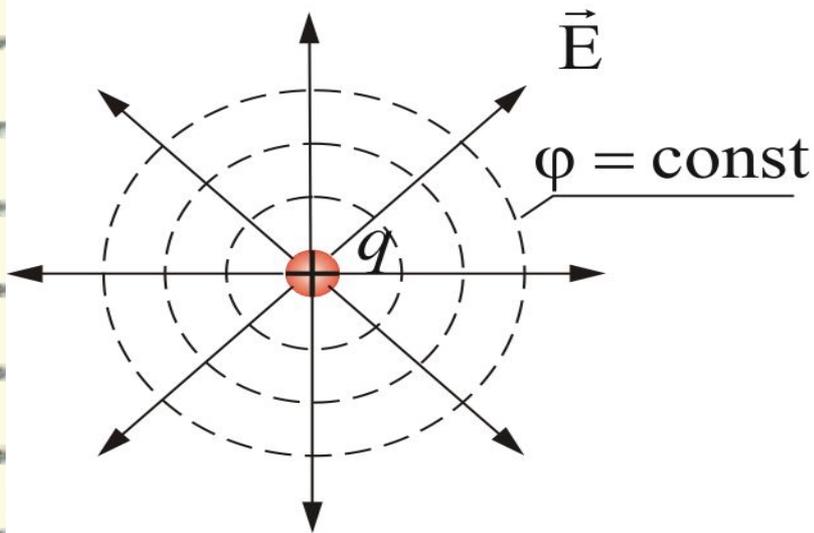
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

# Эквипотенциальные поверхности

Воображаемая поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал, называется **эквипотенциальной поверхностью**.

Уравнение этой поверхности (пунктиры на рис.)

$$\varphi(x, y, z) = \text{const}$$



# Линии напряженности и эквипотенциальные поверхности взаимно перпендикулярны

