Классическая теория излучения

Лекция 1

1. Общая теория Максвелла — Лоренца

1. Уравнения поля

- Электромагнитное поле →

  напряженность электрического и магнитного полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ (функции r и t).
- Электрическое состояние вещества →

  $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ + две функции места и времени – плотность заряда ρ и плотность тока $\mathbf{i}$.
- Если скорость заряда в некоторой заданной точке в заданный момент времени есть $\mathbf{v}$, то плотность тока:

$$\mathbf{i} = \rho\mathbf{v}. \qquad (1.1)$$

- Для заданного распределения зарядов и токов электромагнитное поле определяется уравнениями Максвелла–Лоренца:

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{H}} = 0, \qquad (1.2а)$$

$$\mathrm{div}\mathbf{H} = 0, \qquad (1.2б)$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{v}, \qquad (1.2в)$$

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho. \qquad (1.2г)$$

- Заряд и ток удовлетворяют уравнению непрерывности (закон сохранения заряда):

$$\mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) + \dot{\rho} = 0. \quad (1.3)$$

1. Общая теория Максвелла — Лоренца

1. Уравнения поля

- Уравнение Лоренца

$$\mathbf{k} = \rho\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,[\mathbf{vH}]\right), \qquad (1.4)$$

- $\mathbf{k}$ – плотность силы, действующей на плотность заряда ρ.
- Для точечного заряда e в уравнениях (1.2) и (1.4) надо перейти к случаю, когда ρ сконцентрирована в бесконечно малом объеме.
- Тогда уравнение Лоренца (1.4) можно проинтегрировать по этому объему и получить полную силу, действующую на частицу:

$$\mathbf{K} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vH}]\right). \quad (1.5)$$

- Поле, входящее в (1.4) или (1.5), представляет собой как внешнее поле, создаваемое другими зарядами, так и поле, создаваемое самим точечным зарядом.

1. Общая теория Максвелла — Лоренца

2. Потенциалы

- Уравнения поля (1.2) можно свести к более простым уравнениям, связывающим только одну векторную и одну скалярную функцию вместо двух векторных.
- Из уравнения (1.2б) следует, что:

$$\mathbf{H} = \mathrm{rot}\mathbf{A}. \quad (1.7а)$$

- где **A** называется **векторным потенциалом**
- Тогда (1.2а) примет вид

$$\mathrm{rot}(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}) = 0$$

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}} = -\,\mathrm{grad}\varphi, (1.7б)$$

- где φ представляет собой скалярную функцию, которая называется **скалярным потенциалом**.

1. Общая теория Максвелла — Лоренца

2. Потенциалы

- Тогда два других уравнения (1.2в) и (1.2г), используя общее векторное соотношение

$$\mathrm{rot\,rot} = \mathrm{grad\,div} - \nabla^2,$$

- преобразуются в

$$\frac{1}{c^2}\,\ddot{\mathbf{A}} - \nabla^2\mathbf{A} + \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\dot{\varphi}\right) = \frac{4\pi}{\mathrm{c}}\rho\mathbf{v}, \qquad (1.8\text{а})$$

$$-\nabla^2\varphi - \frac{1}{c}\mathrm{div}\dot{\mathbf{A}} = 4\pi\rho. \qquad (1.8\text{б})$$

- Поскольку $\mathrm{rot\,grad}\,\chi = 0$ для любой скалярной функции χ , то можно добавить к $\mathbf{A}$ градиент произвольной функции χ.
- Чтобы электрическое поле $\mathbf{E}$ не изменилось при замене $\mathbf{A}$ на $\mathbf{A} - \mathrm{grad}\chi$, согласно (1.7б), необходимо заменить φ на $\varphi + (1/\mathrm{c})\dot{\chi}$.
- Эта свобода выбора потенциалов используется для упрощения уравнения поля (1.8).

1. Общая теория Максвелла — Лоренца

2. Потенциалы

- Если $\mathbf{A_0}$ и φ_0 являются некоторыми возможными значениями потенциалов $\mathbf{A}$ и φ ,
- И если положить теперь

$$\mathbf{A} = \mathbf{A_0} - \operatorname{grad}\chi \quad \text{и} \quad \varphi = \varphi_0 + \frac{1}{c}\,\dot{\chi}$$

- то χ определяется из уравнения:

$$-\nabla^2\chi - \frac{1}{c^2}\ddot{\chi} = \operatorname{div}\mathbf{A}_0 + \frac{1}{c}\,\dot{\varphi}_0. \qquad (1.9)$$

- откуда получается

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\dot{\varphi} = 0. \qquad (1.10)$$

- Равенство (1.10) представляет собой соотношение между потенциалами и называется **условием Лоренца**.

2. Потенциалы

- Уравнения поля (1.8) принимают теперь простую форму

$$-\Box\mathbf{A} \equiv \frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{A}} - \nabla^2\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{v} \qquad (1.11а)$$

$$-\Box\varphi \equiv \frac{1}{c^2}\ddot{\varphi} - \nabla^2\varphi = 4\pi\rho \qquad (1.11б)$$

- Таким образом, $\mathbf{A}$ и φ удовлетворяют неоднородным волновым уравнениям.
- Если заменить $\mathbf{A}$ на $\mathbf{A} - \mathrm{grad}\chi$ и φ на $\varphi + (1/c)\dot{\chi}$, то напряженности полей, и условие Лоренца (1.10) останутся неизменными.
- Различные способы, которыми можно выбрать, $\mathbf{A}$ и φ, оставляя $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ неизмененными, называют различными выборами калибровки, а инвариантность $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ относительно таких преобразований называется градиентной инвариантностью.
- Специальный класс калибровки, когда выполняется условие (1.10), называется **лоренцовой калибровкой**.

$$\mathrm{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\dot{\varphi} = 0. \qquad (1.10)$$

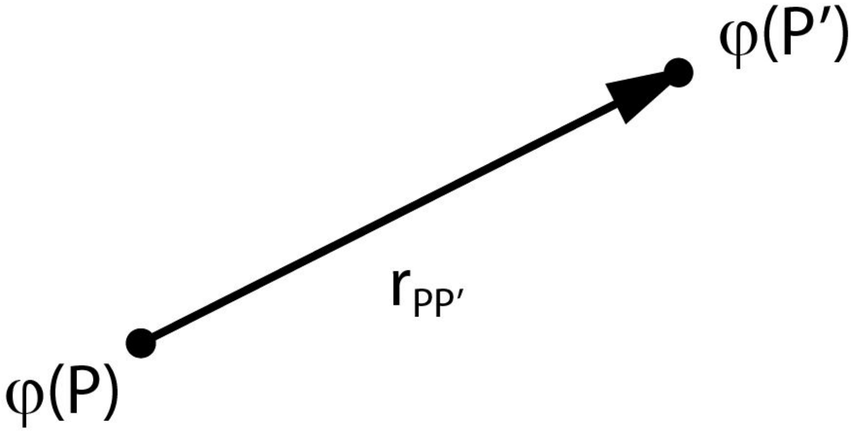
1. Общая теория Максвелла — Лоренца

3. Запаздывающие потенциалы

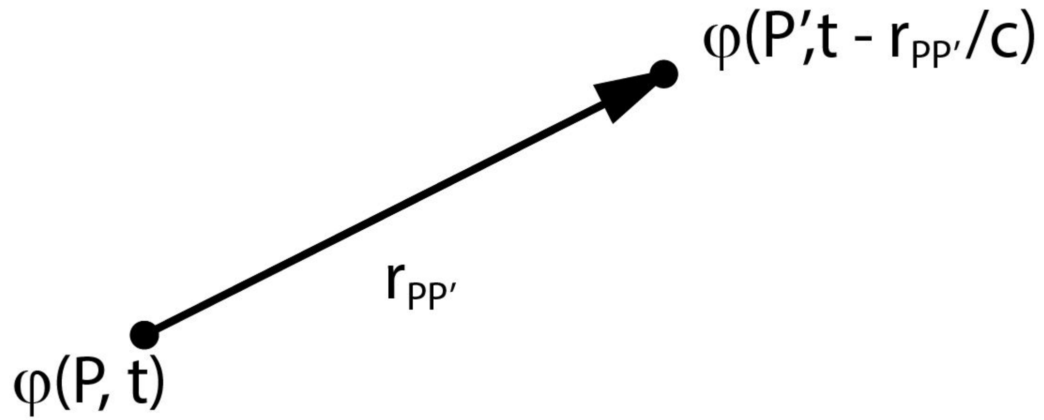
- Общее решение волновых уравнений (1.11) возможно сразу выписать.
- Частное решение уравнения Пуассона $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$ представляется ньютоновским потенциалом

$$\varphi(P) = \int \frac{\rho(P')d\tau'}{r_{PP'}}$$

- где интегрирование предполагается выполненным по всему пространству;
- $r_{PP'}$ означает расстояние между точкой интегрирования P' и точкой P, в которой имеется потенциал φ.



1. Общая теория Максвелла — Лоренца



3. Запаздывающие потенциалы

- С помощью общего решения найдем частное решение зависящего от времени уравнения Пуассона (1.11б):

$$\varphi(P,t) = \int \frac{\rho(P',t - \frac{r_{PP'}}{c})}{r_{PP'}} d\tau'. \quad (1.14а)$$

- Чтобы найти потенциал в точке P в момент времени t необходимо использовать при интегрировании в каждой точке P' такое значение плотности заряда, которое было в этой точке в прошлый момент времени $t - \left(\frac{r_{PP'}}{c}\right)$.
- Поэтому в каждой точке пространства необходимо брать при интегрировании значение плотности в различные моменты времени;
- $\left(\frac{r_{PP'}}{c}\right)$ является временем, которое требуется свету, чтобы дойти от точки P' до точки P, в которой рассматривается значение потенциала.
- (1.14а) принимает во внимание конечную скорость распространения электромагнитного поля.

3. Запаздывающие потенциалы

- Таким же способом получается частное решение уравнения (1.11а):

$$\mathrm{A}(P,t)=\frac{1}{c}\int\frac{(\rho\mathbf{v})(P',t-\frac{r_{PP'}}{c})}{r_{PP'}}d\tau'. \qquad (1.14б)$$

- Потенциалы (1.14) называются **запаздывающими потенциалами**.
- Выражения (1.14) являются частным решением уравнений поля, они дают то поле, которое возникает только от рассматриваемых зарядов.
- Чтобы получить общее решение, надо прибавить к нему общее решение однородных волновых уравнений, представляющее поле в свободном пространстве:

$$\begin{aligned}&\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{A}}=0,\\ &\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\ddot{\varphi}=0, \qquad (1.15)\\ &\mathrm{div}\mathbf{A}+\frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\varphi}=0,\end{aligned}$$

1. Общая теория Максвелла — Лоренца

4. Баланс энергии и импульса

- В теории Максвелла принимается, что какой-либо объем, поле в котором отлично от нуля, вносит определенный вклад в энергию и импульс.
- Энергия заданного объема определяется интегралом:

$$U = \frac{1}{8\pi}\int(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)d\tau = \int u d\tau. \qquad (1.16)$$

- Плотность импульса принимается равной энергии, деленной на c^2, проходящей через единичную поверхность в единицу времени.
- Энергия задается вектором Пойнтинга **S**.
- Далее вводят величину c×импульс, обладающую размерностью энергии.
- Эту величину как для частиц, так и для излучения называют "импульсом".
- В соответствии с этим определением импульс поля, заключенного в некотором объеме, будет задаваться выражением:

$$\mathrm{G} = \int \mathbf{g} d\tau = \frac{1}{c}\int \mathbf{S} d\tau = \frac{1}{4\pi}\int [\mathbf{EH}] d\tau. \qquad (1.16')$$

4. Баланс энергии и импульса

- Формулы (1.4) и (1.5) дают для полной силы, действующей на заключенный в некотором объеме заряд, выражение

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{k}\, d\tau = \int \rho\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,[\mathbf{vH}]\right) d\tau, \qquad (1.4-1.5)$$

- Поскольку электромагнитная сила **K** находится в равновесии с силой инерции, то она представляет изменение механического момента **u** заряда за единицу времени:

$$\mathbf{K} = \frac{1}{c}\frac{d\mathbf{u}}{dt}.$$

- Изменение кинетической энергии заряда *T* дается соотношением:

$$\frac{dT}{dt} = \int (\mathbf{kv}) d\tau$$

- где **k** - плотность силы (1.4). Подставляя ρ и ρ**v** из уравнений Максвелла (1.2в), (1.2г), получаем

1. Общая теория Максвелла — Лоренца

4. Баланс энергии и импульса

$$\frac{1}{c}\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{1}{4\pi}\int\left(\mathbf{E}\operatorname{div}\mathbf{E} - [\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{H}] - \frac{1}{c}[\dot{\mathbf{E}}\mathbf{H}]\right)d\tau, \qquad (1.19\text{а})$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{c}{4\pi}\int \mathbf{E}\left(\operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{E}}\right)d\tau. \qquad (1.19\text{б})$$

- С помощью (1.2а) последние члены в этих формулах можно записать также в виде

$$-\frac{1}{\mathrm{c}}\left[\dot{\mathbf{E}}\mathbf{H}\right] = -[\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{E}] - \frac{1}{c}\frac{d}{dt}[\mathbf{E}\mathbf{H}],$$

$$-\left(\mathbf{E}\dot{\mathbf{E}}\right) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2\right) - c(\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E}).$$

1. Общая теория Максвелла — Лоренца

4. Баланс энергии и импульса

- В соответствии с определениями энергии (1.16) и импульса (1.16') уравнения (1.19):

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{d\mathbf{G}}{dt} + \frac{c}{4\pi}\int(\mathbf{E}\ \mathrm{div}\ \mathbf{E} - [\mathbf{H}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{H}] - [\mathbf{E}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{E}])d\tau, \qquad (1.20\text{а})$$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dU}{dt} + \frac{c}{4\pi}\int(\mathbf{E}\ \mathrm{rot}\mathbf{H} - \mathbf{H}\ \mathrm{rot}\mathbf{E})\ d\tau. \ (1.20\text{б})$$

- Объемные интегралы в правых частях можно преобразовать в поверхностные, применяя формулу Гаусса в (1.20б):

$$\frac{\mathrm{c}}{4\pi}\int(\mathbf{E}\ \mathrm{rot}\mathbf{H} - \mathbf{H}\ \mathrm{rot}\mathbf{E})d\tau = -\int \mathrm{div}\ \mathbf{S}\ d\tau = -\oint S_n d\tau,$$

- где индекс *n* означает компоненту, нормальную к поверхности рассматриваемого объема.

1. Общая теория Максвелла — Лоренца

4. Баланс энергии и импульса

- Для преобразования уравнения (1.20а) используется тензор, составленный из членов, квадратичных по напряженностям поля (тензор Максвелла):

$$4\pi T_{xx} = \frac{1}{2}\left(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + H_x^2 - H_y^2 - H_z^2\right)$$

$$4\pi T_{xy} = 4\pi T_{yx} = E_x E_y + H_x H_y, \qquad (1.21)$$

- x-составляющая дивергенции этого тензора есть как раз

$$\mathrm{Div}_x T \equiv \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} = \frac{1}{4\pi}\left(E_x \mathrm{div}\mathbf{E} + H_x \mathrm{div}\mathbf{H} - [\mathbf{H}\ \mathrm{rot}\mathbf{H}]_x - [\mathbf{E}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{E}]_x\right),$$

- где благодаря (1.2б) второй член обращается в нуль.
- Поэтому интеграл в правой части x-компоненты уравнения (1.20а) можно переписать (формула Гаусса справедлива и для дивергенции тензора):

$$\int \mathrm{Div}_x T\, d\tau = \oint T_{xn} d\sigma$$

1. Общая теория Максвелла — Лоренца

4. Баланс энергии и импульса

- Тем самым уравнения для энергии и импульса (1.20) принимают вид

$$\frac{d(u_x + G_x)}{dt} = c\oint T_{xn} d\sigma\,, \qquad (1.22\text{а})$$

$$\frac{d(T + U)}{dt} = -\oint S_n d\sigma\,. \quad (1.22\text{б})$$

- Левая часть (1.22) описывает изменение энергии и импульса заряженных частиц и поля, заключенных в некотором объеме.
- В правой части стоят интегралы от нормальных составляющих по поверхности рассматриваемого объема.
- Поэтому S_n и $-T_{xn}$ интерпретируются следующим образом:
- S_n является энергией поля, проходящей (в направлении из объема наружу) через единицу площади поверхности в единицу времени;
- $-T_{xn}$ представляет собой x-составляющую импульса поля, проходящую через единицу площади поверхности в единицу времени.

2. Поле точечного заряда и излучение света

1. Потенциалы Вихерта.

- В общем случае поле зарядов, распределенных с плотностью ρ дается следующими выражениями для запаздывающих потенциалов:

$$\varphi(P,t) = \int \frac{\rho(P',t')}{r_{PP'}} d\tau' \quad \left(t' = t - \frac{r_{PP'}}{c}\right), \qquad (2.1а)$$

$$\mathrm{A}(P,t) = \frac{1}{c}\int \frac{(\rho\mathbf{v})(P',t')}{r_{PP'}} d\tau'. \quad (2.1б)$$

- где t' – запаздывающее время для точки P'.
- Если заряды находятся в движении, то при выполнении перехода к точечному заряду нельзя написать, вместо интеграла (2.1а)

$$\left.\frac{e}{r}\right|_{t-\frac{r}{c}}$$

- необходимо подставлять в (2.1) для каждой точки P' свое запаздывающее время.
- Прежде чем выполнять переход к точечному заряду, необходимо преобразовать интеграл (2.1) в интеграл по элементам заряда de.

2. Поле точечного заряда и излучение света

1. Потенциалы Вихерта.

- Пусть элементы заряда жестко соединены и обладают одинаковой скоростью $\mathbf{v}(t')$.
- Рассмотрим сферический слой толщины *dr* на расстоянии *r* от *P*.
- Элемент объема этого слоя будет равен $d\tau = d\sigma dr$.
- Соответствующим вкладом в интеграл будет плотность заряда ρ (деленная на *r*), которую встретит на своем пути сходящаяся сферическая световая волна, если она имеет скорость *c* и придет в *P* в момент *t*.
- Внешней поверхности рассматриваемого слоя эта волна достигнет в момент t'.
- За время $dt = \frac{dr}{c}$, в течение которого световая волна будет пересекать слой толщины *dr*, некоторая доля заряда сможет проникнуть через внутреннюю поверхность слоя.
- Эта доля заряда (на единицу площади) составит

$$-\rho\frac{(\mathbf{vr})}{r}dt = -\rho\frac{(\mathbf{vr})}{c}\frac{dr}{r}$$

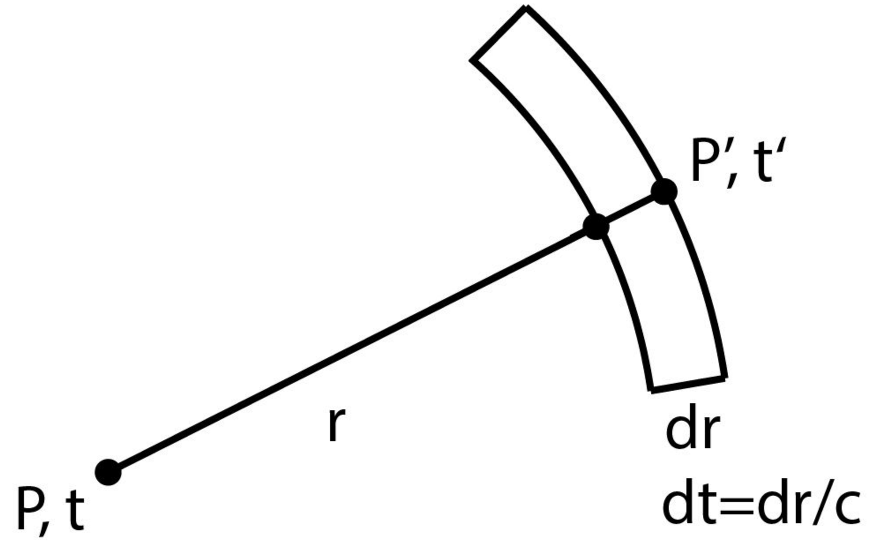
если направление вектора $\mathbf{r}$ выбрано вдоль линии PP'.

Поэтому за время *dt* световая волна “соберет" элемент заряда *de:*

$$de = \rho\left(1 + \frac{(\mathbf{vr})}{rc}\right)d\tau$$

- Поэтому под интеграл (2.1) надо подставить выражение

$$\rho d\tau = \frac{de}{1 + \frac{(\mathbf{vr})}{rc}}$$



2. Поле точечного заряда и излучение света

1. Потенциалы Вихерта.

- Подставляя это выражение под интеграл (2.1), можно выполнить переход к точечному заряду и получить

$$\varphi(P,t) = \left.\frac{e}{r + \frac{(\mathbf{vr})}{c}}\right|_{t-\frac{r}{c}}, \qquad (2.3а)$$

$$\mathbf{A}(P,t) = \frac{1}{c}\left.\frac{e\mathbf{v}}{r + \frac{(\mathbf{vr})}{c}}\right|_{t-\frac{r}{c}}. \quad (2.3б)$$

- Все величины в (2.3) должны быть взяты для запаздывающего времени $t - \frac{r}{c}$.
- Выражение (2.3) было получено впервые Льенаром и Вихертом.

2. Поле точечного заряда и излучение света

2. Напряженности поля произвольным образом движущегося точечного заряда.

- Напряженности полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ можно получить из (2.3) дифференцированием:

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\varphi - \frac{1}{\mathrm{c}}\dot{\mathbf{A}},$$

$$\mathbf{H} = \mathrm{rot}\mathbf{A}.$$

- Производные надо брать здесь по времени t и координатам точки P.
- Поскольку, движение частицы в момент t' определяется заданием

$$\mathbf{r}(t') \text{ и } \mathbf{v}(t') = \frac{\partial \mathbf{r}(t')}{\partial t'},$$

то **r** и **v**, входящие в (2.3), являются функциями запаздывающего времени t'.

- Поэтому необходимо выразить производные по времени t через производные по времени t'.
- Запаздывающее время t' определяется расстоянием r в момент t'.

$$r(t') = c(t - t') \quad (2.4)$$

2. Поле точечного заряда и излучение света

2. Напряженности поля произвольным образом движущегося точечного заряда.

- Поэтому, дифференцируя r по t:

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{(\mathbf{rv})}{r}\frac{\partial t'}{\partial t} = c\left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right)$$

- или

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 + \frac{(\mathbf{vr})}{rc}} = \frac{r}{s}, \qquad (2.5)$$

- где сокращенное обозначение

$$s = r + \frac{(\mathbf{vr})}{c}. \qquad (2.6)$$

- В силу уравнения (2.4) t' является функцией координат точки P.
- Поэтому ($\mathbf{r}$ направлен от P к P')

$$\operatorname{grad} t' = -\frac{1}{c}\operatorname{grad} r(t') = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial r}{\partial t'}\operatorname{grad} t' - \frac{\mathbf{r}}{r}\right),$$

- или в соответствии с (2.6)

$$\operatorname{grad} t' = \frac{\mathbf{r}}{cs} \qquad (2.7)$$

2. Поле точечного заряда и излучение света

2. Напряженности поля произвольным образом движущегося точечного заряда.

- Для производных от s получим теперь, согласно (2.5) и (2.7),

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{r}{s}\left(\frac{(\mathbf{rv})}{r} + \frac{v^2}{c} + \frac{(\mathbf{r\dot{v}})}{c}\right), \qquad (2.8а)$$

$$\operatorname{grad} s = -\frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{v}}{c} + \frac{r}{cs}\left(\frac{(\mathbf{rv})}{r} + \frac{v^2}{c} + \frac{(\mathbf{r\dot{v}})}{c}\right). \qquad (2.8б)$$

- В этих формулах $\dot{\mathbf{v}}$ означает производную от **v** по t', причем **v** зависит только от t'. Поэтому

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \dot{\mathbf{v}}\frac{r}{s}, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{v} = -[\dot{\mathbf{v}} \operatorname{grad} t'] = \frac{[\mathbf{r\dot{v}}]}{cs}. \qquad (2.9)$$

2. Поле точечного заряда и излучение света

2. Напряженности поля произвольным образом движущегося точечного заряда.

- В силу (2.3) получаем для напряженностей полей

$$\frac{\mathbf{E}}{e} = -\mathrm{grad}\frac{1}{s} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathbf{v}}{s} = \frac{1}{s^2}\ \mathrm{grad}\, s - \frac{1}{c^2 s}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c^2 s^2}\frac{\partial s}{\partial t},$$

$$\frac{\mathbf{H}}{c} = \frac{1}{c}\ \mathrm{rot}\frac{\mathbf{v}}{s} = \frac{1}{sc}\ \mathrm{rot}\,\mathbf{v} + \frac{1}{cs^2}\ [\mathbf{v}\,\mathrm{grad}\, s]$$

- Подставляя сюда формулы (2.8), (2.9) и (2.6), можно найти окончательно

$$\frac{\mathbf{E}}{e} = \frac{1-\beta^2}{s^3}\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{v}}{c}\ r\right) + \frac{1}{s^3 c^2}\left[\mathbf{r}\left[\mathbf{r} + \frac{\mathbf{v}}{c}\ r, \dot{\mathbf{v}}\right]\right], \qquad (2.10а)$$

$$\frac{\mathbf{H}}{e} = \frac{[\mathbf{Er}]}{r}, \qquad \beta = \frac{v}{c}\ . \qquad (2.10б)$$

2. Поле точечного заряда и излучение света

2. Напряженности поля произвольным образом движущегося точечного заряда.

$$\frac{\mathbf{E}}{e} = \frac{1-\beta^2}{s^3}\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{v}}{c}\,r\right) + \frac{1}{s^3c^2}\left[\mathbf{r}\left[\mathbf{r} + \frac{\mathbf{v}}{c}\,r, \dot{\mathbf{v}}\right]\right], \qquad (2.10а)$$

$$\frac{\mathbf{H}}{e} = \frac{[\mathbf{Er}]}{r}, \qquad \beta = \frac{v}{c}\,. \qquad (2.10б)$$

- Формулы (2.10) справедливы для любого заданного движения точечного заряда с произвольной скоростью. Они неприменимы на расстояниях сравнимых с радиусом электрона.
- Поле (2.10а) складывается из двух частей:
- Первая часть зависит только, от скорости и убывает на больших расстояниях от частицы, как r^{-2}. Она представляет собой статическую (кулоновскую) часть поля.
- Вторая часть пропорциональна ускорению $\dot{\mathbf{v}}$ и убывает на больших расстояниях от частицы как r^{-1}. Эта часть поля является поперечной; соответствующие напряженности поля перпендикулярны радиус-вектору $\mathbf{r}$. Ту область, где вторая часть преобладает называют волновой зоной.
- Различие между этими двумя частями поля имеет место, если расстояние, на которое смещается электрон за время r/c, мало по сравнению с самим r (квазипериодическое движение или движение с $v/c \ll 1$).

2. Поле точечного заряда и излучение света

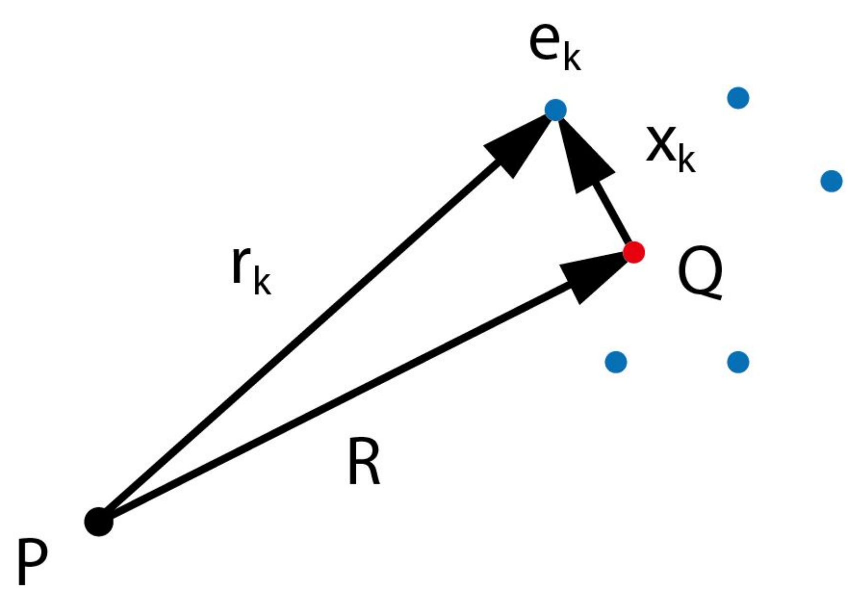
2. Вектор Герца системы зарядов

- Рассмотрим испускание света системой точечных зарядов.
- Частицы с зарядами e_k находятся вблизи от центра Q,
- Расстояние (радиус-вектор) точки Q от точки P, в которой наблюдается поле, обозначим через R (направление от P к Q), а радиус-вектор от P к e_k через $\mathbf{r}_k$.
- Тогда положение каждого заряда может быть определено вектором, изображающим смещение $\mathbf{x}_k$ заряда e_k по отношению к центру Q

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{r}_k - \mathbf{R} \qquad (2.11)$$

Пусть все смещения малы по сравнению с R и скорости всех частиц малы по сравнению со скоростью света

$$|x_k| \ll R, \qquad v_k \ll c. \qquad (2.12)$$



- Полное поле является суперпозицией полей, происходящих от всех отдельных зарядов.

3. Вектор Герца системы зарядов.

- В выражении для напряженностей полей (2.10) нужно подставить для каждой частицы свое собственное запаздывающее время $t'_k = t - \frac{r_k}{c}$.
- Но поскольку все смещения малы, будет удобно ввести новое время T, запаздывающее время центра Q:

$$T \ = \ t - \frac{R}{c}, \qquad (2.13)$$

- и выразить напряженности поля как функции этого времени T.
- Если $\mathbf{x}_k$ мало, то будет малой и разность между общим временем T и индивидуальным временем k-й частицы t'_k.
- Используя соотношение

$$c(t'_k - T) = R - r_k(t'_k), \qquad (2.14)$$

- выразим $\mathbf{v}$ и $\dot{\mathbf{v}}$ как производные не по времени t', а по времени T.
- После этого найдем явное выражение напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ через T вместо t'_k.

3. Вектор Герца системы зарядов.

- Будем интересоваться только той частью $\mathbf{E}$, которая существенна в волновой зоне;
- Все члены, убывающие как r^{-2} или еще быстрее, не дадут в излучение света никакого вклада.
- Дифференцируя (2.14) по t' получаем (для любого k)

$$\frac{\partial T}{\partial t'} = 1 + \frac{(\mathbf{rv})}{rc} = \frac{s}{r}, \qquad (2.15)$$

- где используется обозначение (2.6). Поэтому скорость равна

$$\mathbf{v} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t'} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t'} = \mathbf{r}'\frac{s}{r} = \mathbf{x}'\frac{s}{r}, \qquad (2.16)$$

- где производные по T обозначены штрихами.
- Аналогично, опуская члены порядка $1/r$, несущественные в волновой зоне, получаем для $\dot{\mathbf{v}}$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{x}''\frac{s^2}{r^2} + \mathbf{x}'\ \frac{\partial}{\partial t'}\frac{s}{r} = \mathbf{x}''\frac{s^2}{r^2} + \mathbf{x}'\frac{(\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}})}{rc}\ . \qquad (2.16')$$

3. Вектор Герца системы зарядов.

- Умножая (2.16) на $\mathbf{r}$ и сравнивая с (2.6), получаем

$$\frac{r}{s} = 1 - \frac{(\mathbf{r}\mathbf{x}')}{rc}, \qquad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{x}'}{1 - \dfrac{(\mathbf{r}\mathbf{x}')}{rc}}. \quad (2.17)$$

- Аналогично, умножая (2.16′) на $\mathbf{r}$ и исключая $(\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}})$ находим

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{s^3}{r^3}\left[\mathbf{x}''\left(1 - \frac{(\mathbf{r}\mathbf{x}')}{rc}\right) + \frac{\mathbf{x}'(\mathbf{r}\mathbf{x}'')}{rc}\right] \qquad (2.18)$$

- Подставляя теперь (2.17) и (2.18) в существенную для волновой зоны часть (второй член) выражения (2.10а), получается, что вклад каждой k-й частицы в $\mathbf{E}$ сводится к

$$\mathbf{E}_k = \frac{e_k}{r_k^3 c^2}\left[\mathbf{r}_k[\mathbf{r}_k \mathbf{x}_k'']\right]. \qquad (2.19)$$

- Если смещения $\mathbf{x}_k$ малы по сравнению с R, то можно заменить $\mathbf{r}_k$ в (2.19) на **R**, что не приведет к существенным для волновой зоны изменениям.

2. Поле точечного заряда и излучение света

3. Вектор Герца системы зарядов.

- Определим теперь вектор, являющийся алгебраической суммой всех смещений, и будем называть его вектором Герца:

$$\mathbf{Z}(T) = \sum_k e_k \mathbf{x}_k(t_k'). \quad (2.20)$$

- При построении выражения (2.20) имеется в виду, что все $\mathbf{x}_k$, которые были первоначально функциями от времен t_k' выражены теперь как функции времени T с помощью (2.14)
- $c(t_k' - T) = R - r_k(t_k'),$ (2.14)
- Тогда для напряженностей полей в волновой зоне

$$\mathbf{E} = \frac{1}{R^3 c^3}\left[\mathbf{R}[\mathbf{R}\mathbf{Z}'']\right]_{T-R/c}, \qquad (2.21)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{R^2 c^2}[\mathbf{R}\mathbf{Z}'']_{T-R/c}.$$

2. Поле точечного заряда и излучение света

3. Вектор Герца системы зарядов.

- Выразим теперь $\mathbf{x}_k(t'_k)$ как явные функции времени T. Поскольку t'_k и T мало отличаются друг от друга, то, используя (2.14), (2.15) и (2.17), можно написать разложение

$$\mathbf{x}_k(t'_k) = \mathbf{x}_k(T) + \mathbf{x}'_k \frac{(\mathbf{x}_k \mathbf{R})}{Rc} + \cdots \qquad (2.22)$$

- Если условия $|x_k| \ll R,\ \ v_k \ll c$ выполнены, то этот ряд сходится. Тогда

$$\mathbf{Z} = \boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_2 + \cdots,$$

- где

$$\mathbf{Z}_1 = \sum_k e_k \mathbf{x}_k(T), \qquad \mathbf{Z}_2 = \sum_k e_k \mathbf{x}'_k(T) \frac{(\mathbf{R}\,\mathbf{x}_k(T))}{Rc}. \quad (2.22')$$

- Первый член $\mathbf{Z}_1$ является дипольным моментом системы зарядов.
- Второй член обусловлен эффектом запаздывания, поскольку $\frac{(\mathbf{x}_k \mathbf{R})}{Rc}$ представляет собой разность запаздывающих времен k-й частицы и центра.
- $\mathbf{Z}_2$ включает электрический квадрупольный и магнитный дипольный моменты системы и может играть существенную роль, если только распределение зарядов симметрично и дипольный момент исчезает.

2. Поле точечного заряда и излучение света

4. Излучение света.

- Описываемое формулами (2.21) поле убывает с увеличением расстояния как первая степень R. Поэтому вектор Пойнтинга, будет убывать как R^{-2} и, следовательно, его интеграл по сфере радиуса R будет конечным и не зависящим от R.
- Вследствие этого поле, определяемое (2.21), приведет к возникновению конечного потока энергии через сферу любого радиуса, т. е. к излучению света.
- Поле излучения поперечно, обе напряженности поля перпендикулярны как к $\mathbf{R}$, так и друг к другу. Поток энергии в единицу времени через площадь $R^2 d\Omega$ равен

$$\mathbf{S}R^2 d\Omega = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]R^2 d\Omega = \frac{d\Omega}{4\pi c^3}\frac{\mathbf{R}}{R}\, Z''^2 \sin^2\theta\,, \qquad (2.25)$$

- где θ — угол между направлением вектора $\mathbf{Z}''$ и направлением наблюдения.
- Поток энергии (2.25) направлен нормально к поверхности сферы и пропорционален квадрату второй производной от вектора Герца по времени.
- Наибольшее значение он принимает по направлению, перпендикулярному к $\mathbf{Z}''$, а в направлении $\mathbf{Z}''$ обращается в нуль.

4. Излучение света.

- Полная энергия S, испускаемая за единицу времени, получается интегрированием (2.25) по всем углам:

$$S = \frac{2}{3}\frac{Z''^{2}}{c^3}\,. \qquad (2.26)$$

- Простейшей моделью источника света является гармонический осциллятор, т. е. один заряд, упруго связанный с центром и совершающий колебания с частотой ν вдоль оси x:

$$\mathbf{Z} = e\mathbf{x} = e\mathbf{x}_0 \cos \nu t, \qquad \mathbf{Z}'' = -e\nu^2\,\mathbf{x}.$$

- Излучение такого осциллятора будет монохроматическим с той же частотой ν.
- Усреднение (2.26) по времени дает

$$S = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\,\nu^4\overline{x^2} = \frac{1}{3}\frac{e^2}{c^3}\,\nu^4 x_0^2. \qquad (2.27)$$

- Следовательно, излучаемая в единицу времени энергия пропорциональна ν^4.

2. Поле точечного заряда и излучение света

5. Заключение

- Движущийся точечный заряд излучает. Излучаемая за единицу времени энергия определяется для медленно движущейся частицы уравнением:

$$S = \frac{2}{3}\frac{Z''^{\mathbf{2}}}{c^3}\ .$$

- Согласно уравнению баланса энергии, эта энергия должна быть поставлена теми силами, которые поддерживают движение заряда.
- Поэтому кинетическая энергия частицы должна убывать со временем.
- Вследствие этого не совсем верно определять движение частицы, исходя лишь из действующих на нее внешних сил, поскольку излучение также должно влиять на движение.
- Чтобы подвести правильный баланс энергии с помощью закона сохранения, необходимо рассмотреть обратное действие испускаемого зарядом поля на его собственное движение (реакцию излучения).

Литература

- 1. Ансельм, А.И. Основы статистической физики и термодинамики. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — СПб.: Лань, 2007. — 448 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/692 — Загл. с экрана.
- 2. Старовойтов А.А. Методические рекомендации по подготовке рефератов, мультимедийных презентаций и докладов. – СПб: Университет ИТМО, 2014. – 68 с.
- 3. Электронно-библиотечная система. Издательство «Лань» [Электронный ресурс] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.5. Часть 1. Статистическая физика. Изд. Физматлит, 2001. 616 с. Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2230, свободный.
- 4. Электронно-библиотечная система. Издательство «Лань» [Электронный ресурс] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.4. Квантовая электродинамика. Изд. Физматлит, 2006. 720 с. Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2237, свободный.
- 5. Куни Ф.М. Статистическая физика и термодинамика, М. Наука, 1981. 352 с.
- 6. Электронно-библиотечная система. Издательство «Лань» [Электронный ресурс] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика Т.3. Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Физматлит, 2001. 808 с., Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2380, свободный.
- 7. Гайтлер В. Квантовая теория излучения. М.: Изд. Иностранной литературы, 1956. 491 с.