

# Классическая теория излучения

Лекция 1

# 1. Общая теория Максвелла – Лоренца

## 1. Уравнения поля

- Электромагнитное поле  $\rightarrow$   
напряженность электрического и магнитного полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  (функции  $r$  и  $t$ ).
- Электрическое состояние вещества  $\rightarrow$   
 $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  + две функции места и времени – плотность заряда  $\rho$  и плотность тока  $\mathbf{i}$ .
- Если скорость заряда в некоторой заданной точке в заданный момент времени есть  $\mathbf{v}$ , то плотность тока:

$$\mathbf{i} = \rho \mathbf{v}. \quad (1.1)$$

- Для заданного распределения зарядов и токов электромагнитное поле определяется уравнениями Максвелла–Лоренца:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{H}} = 0, \quad (1.2a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (1.2б)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{v}, \quad (1.2в)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho. \quad (1.2г)$$

- Заряд и ток удовлетворяют уравнению непрерывности (закон сохранения заряда):

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) + \dot{\rho} = 0. \quad (1.3)$$

# 1. Общая теория Максвелла – Лоренца

## 1. Уравнения поля

- Уравнение Лоренца

$$\mathbf{k} = \rho \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vH}] \right), \quad (1.4)$$

- $\mathbf{k}$  – плотность силы, действующей на плотность заряда  $\rho$ .
- Для точечного заряда  $e$  в уравнениях (1.2) и (1.4) надо перейти к случаю, когда  $\rho$  сконцентрирована в бесконечно малом объеме.
- Тогда уравнение Лоренца (1.4) можно проинтегрировать по этому объему и получить полную силу, действующую на частицу:

$$\mathbf{K} = e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vH}] \right). \quad (1.5)$$

- Поле, входящее в (1.4) или (1.5), представляет собой как внешнее поле, создаваемое другими зарядами, так и поле, создаваемое самим точечным зарядом.

# 1. Общая теория Максвелла – Лоренца

## 2. Потенциалы

- Уравнения поля (1.2) можно свести к более простым уравнениям, связывающим только одну векторную и одну скалярную функцию вместо двух векторных.

- Из уравнения (1.2б) следует, что:

$$\mathbf{H} = \text{rot}\mathbf{A}. \quad (1.7a)$$

- где  $\mathbf{A}$  называется **векторным потенциалом**

- Тогда (1.2а) примет вид

$$\begin{aligned} \text{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}\right) &= 0 \\ \mathbf{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}} &= -\text{grad}\varphi, \quad (1.7б) \end{aligned}$$

- где  $\varphi$  представляет собой скалярную функцию, которая называется **скалярным потенциалом**.

# 1. Общая теория Максвелла – Лоренца

## 2. Потенциалы

- Тогда два других уравнения (1.2в) и (1.2г), используя общее векторное соотношение

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \nabla^2,$$

- преобразуются в

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} - \nabla^2 \mathbf{A} + \operatorname{grad} \left( \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \dot{\varphi} \right) = \frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{v}, \quad (1.8a)$$

$$-\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c} \operatorname{div} \dot{\mathbf{A}} = 4\pi \rho. \quad (1.8b)$$

- Поскольку  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \chi = 0$  для любой скалярной функции  $\chi$ , то можно добавить к  $\mathbf{A}$  градиент произвольной функции  $\chi$ .
- Чтобы электрическое поле  $\mathbf{E}$  не изменилось при замене  $\mathbf{A}$  на  $\mathbf{A} - \operatorname{grad} \chi$ , согласно (1.7б), необходимо заменить  $\varphi$  на  $\varphi + (1/c)\dot{\chi}$ .
- Эта свобода выбора потенциалов используется для упрощения уравнения поля (1.8).

# 1. Общая теория Максвелла – Лоренца

## 2. Потенциалы

- Если  $\mathbf{A}_0$  и  $\varphi_0$  являются некоторыми возможными значениями потенциалов  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$ ,
- И если положить теперь

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 - \text{grad } \chi \quad \text{и} \quad \varphi = \varphi_0 + \frac{1}{c} \dot{\chi}$$

- то  $\chi$  определяется из уравнения:

$$-\nabla^2 \chi - \frac{1}{c^2} \ddot{\chi} = \text{div } \mathbf{A}_0 + \frac{1}{c} \dot{\varphi}_0. \quad (1.9)$$

- откуда получается

$$\text{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \dot{\varphi} = 0. \quad (1.10)$$

- Равенство (1.10) представляет собой соотношение между потенциалами и называется **условием Лоренца**.

# 1. Общая теория Максвелла – Лоренца

## 2. Потенциалы

- Уравнения поля (1.8) принимают теперь простую форму

$$-\square \mathbf{A} \equiv \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} - \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{v} \quad (1.11a)$$

$$-\square \varphi \equiv \frac{1}{c^2} \ddot{\varphi} - \nabla^2 \varphi = 4\pi \rho \quad (1.11b)$$

- Таким образом,  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  удовлетворяют неоднородным волновым уравнениям.
- Если заменить  $\mathbf{A}$  на  $\mathbf{A} - \text{grad} \chi$  и  $\varphi$  на  $\varphi + (1/c)\dot{\chi}$ , то напряженности полей, и условие Лоренца (1.10) останутся неизменными.
- Различные способы, которыми можно выбрать,  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$ , оставляя  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  неизменными, называют различными выборами калибровки, а инвариантность  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  относительно таких преобразований называется градиентной инвариантностью.
- Специальный класс калибровки, когда выполняется условие (1.10), называется **лоренцовой калибровкой**.

$$\text{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \dot{\varphi} = 0. \quad (1.10)$$

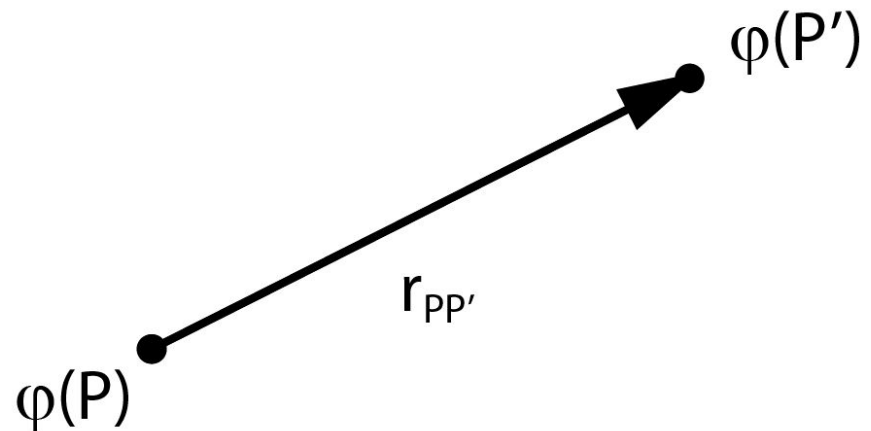
# 1. Общая теория Максвелла – Лоренца

## 3. Запаздывающие потенциалы

- Общее решение волновых уравнений (1.11) возможно сразу выписать.
- Частное решение уравнения Пуассона  $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$  представляется ньютоновским потенциалом

$$\varphi(P) = \int \frac{\rho(P')d\tau'}{r_{PP'}}$$

- где интегрирование предполагается выполненным по всему пространству;
- $r_{PP'}$  означает расстояние между точкой интегрирования  $P'$  и точкой  $P$ , в которой имеется потенциал  $\varphi$ .



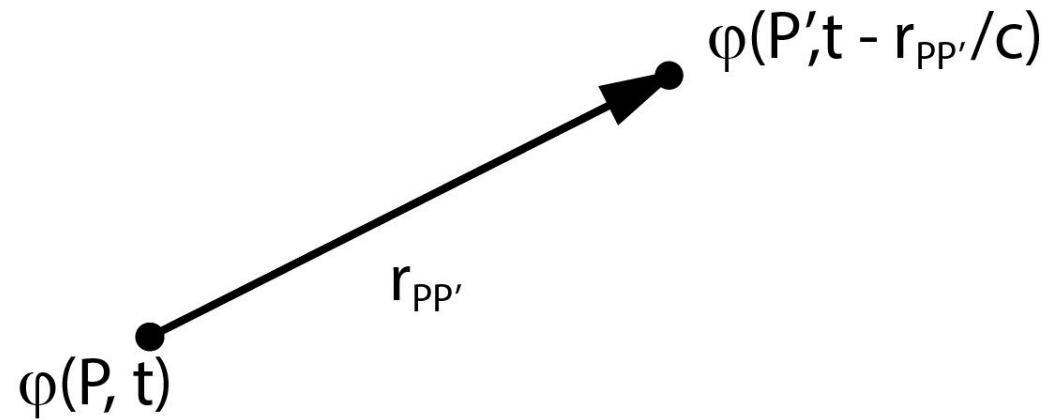


# 1. Общая теория Максвелла – Лоренца

## 3. Запаздывающие потенциалы

- С помощью общего решения найдем частное решение зависящего от времени уравнения Пуассона (1.11б):

$$\varphi(P, t) = \int \frac{\rho(P', t - \frac{r_{PP'}}{c})}{r_{PP'}} d\tau'. \quad (1.14a)$$



- Чтобы найти потенциал в точке  $P$  в момент времени  $t$  необходимо использовать при интегрировании в каждой точке  $P'$  такое значение плотности заряда, которое было в этой точке в прошлый момент времени  $t - \left(\frac{r_{PP'}}{c}\right)$ .
- Поэтому в каждой точке пространства необходимо брать при интегрировании значение плотности в различные моменты времени;
- $\left(\frac{r_{PP'}}{c}\right)$  является временем, которое требуется свету, чтобы дойти от точки  $P'$  до точки  $P$ , в которой рассматривается значение потенциала.
- (1.14a) принимает во внимание конечную скорость распространения электромагнитного поля.

# 1. Общая теория Максвелла – Лоренца

## 3. Запаздывающие потенциалы

- Таким же способом получается частное решение уравнения (1.11а):

$$A(P, t) = \frac{1}{c} \int \frac{(\rho \mathbf{v})(P', t - \frac{r_{PP'}}{c})}{r_{PP'}} d\tau'. \quad (1.14б)$$

- Потенциалы (1.14) называются **запаздывающими потенциалами**.
- Выражения (1.14) являются частным решением уравнений поля, они дают то поле, которое возникает только от рассматриваемых зарядов.
- Чтобы получить общее решение, надо прибавить к нему общее решение однородных волновых уравнений, представляющее поле в свободном пространстве:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} &= 0, \\ \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \ddot{\varphi} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \dot{\varphi} &= 0, \end{aligned} \quad (1.15)$$

# 1. Общая теория Максвелла – Лоренца

## 4. Баланс энергии и импульса

- В теории Максвелла принимается, что какой-либо объем, поле в котором отлично от нуля, вносит определенный вклад в энергию и импульс.
- Энергия заданного объема определяется интегралом:

$$U = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) d\tau = \int u d\tau. \quad (1.16)$$

- Плотность импульса принимается равной энергии, деленной на  $c^2$ , проходящей через единичную поверхность в единицу времени.
- Энергия задается вектором Пойнтинга  $\mathbf{S}$ .
- Далее вводят величину сХимпульс, обладающую размерностью энергии.
- Эту величину как для частиц, так и для излучения называют "импульсом".
- В соответствии с этим определением импульс поля, заключенного в некотором объеме, будет задаваться выражением:

$$G = \int \mathbf{g} d\tau = \frac{1}{c} \int \mathbf{S} d\tau = \frac{1}{4\pi} \int [\mathbf{E}\mathbf{H}] d\tau. \quad (1.16')$$

# 1. Общая теория Максвелла – Лоренца

## 4. Баланс энергии и импульса

- Формулы (1.4) и (1.5) дают для полной силы, действующей на заключенный в некотором объеме заряд, выражение

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{k} d\tau = \int \rho \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right) d\tau, \quad (1.4 - 1.5)$$

- Поскольку электромагнитная сила  $\mathbf{K}$  находится в равновесии с силой инерции, то она представляет изменение механического момента  $\mathbf{u}$  заряда за единицу времени:

$$\mathbf{K} = \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{u}}{dt}.$$

- Изменение кинетической энергии заряда  $T$  дается соотношением:

$$\frac{dT}{dt} = \int (\mathbf{k}\mathbf{v}) d\tau$$

- где  $\mathbf{k}$  - плотность силы (1.4). Подставляя  $\rho$  и  $\rho\mathbf{v}$  из уравнений Максвелла (1.2в), (1.2г), получаем

# 1. Общая теория Максвелла – Лоренца

## 4. Баланс энергии и импульса

$$\frac{1}{c} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int \left( \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} - [\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{H}] - \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{E}} \mathbf{H}] \right) d\tau, \quad (1.19a)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{c}{4\pi} \int \mathbf{E} \left( \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}} \right) d\tau. \quad (1.19б)$$

- С помощью (1.2a) последние члены в этих формулах можно записать также в виде

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c} [\dot{\mathbf{E}} \mathbf{H}] &= -[\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{E}] - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} [\mathbf{E} \mathbf{H}], \\ -(\mathbf{E} \dot{\mathbf{E}}) &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) - c(\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E}). \end{aligned}$$

# 1. Общая теория Максвелла – Лоренца

## 4. Баланс энергии и импульса

- В соответствии с определениями энергии (1.16) и импульса (1.16') уравнения (1.19):

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{d\mathbf{G}}{dt} + \frac{c}{4\pi} \int (\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} - [\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{H}] - [\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{E}]) d\tau, \quad (1.20a)$$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dU}{dt} + \frac{c}{4\pi} \int (\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E}) d\tau. \quad (1.20б)$$

- Объемные интегралы в правых частях можно преобразовать в поверхностные, применяя формулу Гаусса в (1.20б):

$$\frac{c}{4\pi} \int (\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E}) d\tau = - \int \operatorname{div} \mathbf{S} d\tau = - \oint S_n d\tau,$$

- где индекс  $n$  означает компоненту, нормальную к поверхности рассматриваемого объема.

# 1. Общая теория Максвелла – Лоренца

## 4. Баланс энергии и импульса

- Для преобразования уравнения (1.20а) используется тензор, составленный из членов, квадратичных по напряженностям поля (тензор Максвелла):

$$4\pi T_{xx} = \frac{1}{2} (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + H_x^2 - H_y^2 - H_z^2)$$

$$4\pi T_{xy} = 4\pi T_{yx} = E_x E_y + H_x H_y, \quad (1.21)$$

- $x$ -составляющая дивергенции этого тензора есть как раз

$$\text{Div}_x T \equiv \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} (E_x \text{div} \mathbf{E} + H_x \text{div} \mathbf{H} - [\mathbf{H} \text{rot} \mathbf{H}]_x - [\mathbf{E} \text{rot} \mathbf{E}]_x),$$

- где благодаря (1.2б) второй член обращается в нуль.
- Поэтому интеграл в правой части  $x$ -компоненты уравнения (1.20а) можно переписать (формула Гаусса справедлива и для дивергенции тензора):

$$\int \text{Div}_x T \, d\tau = \oint T_{xn} \, d\sigma$$

# 1. Общая теория Максвелла – Лоренца

## 4. Баланс энергии и импульса

- Тем самым уравнения для энергии и импульса (1.20) принимают вид

$$\frac{d(u_x + G_x)}{dt} = c \oint T_{xn} d\sigma, \quad (1.22a)$$

$$\frac{d(T + U)}{dt} = - \oint S_n d\sigma. \quad (1.22б)$$

- Левая часть (1.22) описывает изменение энергии и импульса заряженных частиц и поля, заключенных в некотором объеме.
- В правой части стоят интегралы от нормальных составляющих по поверхности рассматриваемого объема.
- Поэтому  $S_n$  и  $-T_{xn}$  интерпретируются следующим образом:
- $S_n$  является энергией поля, проходящей (в направлении из объема наружу) через единицу площади поверхности в единицу времени;
- $-T_{xn}$  представляет собой  $x$ -составляющую импульса поля, проходящую через единицу площади поверхности в единицу времени.



## 2. Поле точечного заряда и излучение света

### 1. Потенциалы Вихерта.

- В общем случае поле зарядов, распределенных с плотностью  $\rho$  дается следующими выражениями для запаздывающих потенциалов:

$$\varphi(P, t) = \int \frac{\rho(P', t')}{r_{PP'}} d\tau' \quad \left( t' = t - \frac{r_{PP'}}{c} \right), \quad (2.1a)$$

$$A(P, t) = \frac{1}{c} \int \frac{(\rho \mathbf{v})(P', t')}{r_{PP'}} d\tau'. \quad (2.1b)$$

- где  $t'$  – запаздывающее время для точки  $P'$ .
- Если заряды находятся в движении, то при выполнении перехода к точечному заряду нельзя написать, вместо интеграла (2.1a)

$$\frac{e}{r} \Big|_{t-\frac{r}{c}}$$

- необходимо подставлять в (2.1) для каждой точки  $P'$  свое запаздывающее время.
- Прежде чем выполнять переход к точечному заряду, необходимо преобразовать интеграл (2.1) в интеграл по элементам заряда  $de$ .

## 2. Поле точечного заряда и излучение света

### 1. Потенциалы Вихерта.

- Пусть элементы заряда жестко соединены и обладают одинаковой скоростью  $\mathbf{v}(t')$ .
- Рассмотрим сферический слой толщины  $dr$  на расстоянии  $r$  от  $P$ .
- Элемент объема этого слоя будет равен  $d\tau = d\sigma dr$ .
- Соответствующим вкладом в интеграл будет плотность заряда  $\rho$  (деленная на  $r$ ), которую встретит на своем пути сходящаяся сферическая световая волна, если она имеет скорость  $c$  и придет в  $P$  в момент  $t$ .
- Внешней поверхности рассматриваемого слоя эта волна достигнет в момент  $t'$ .
- За время  $dt = \frac{dr}{c}$ , в течение которого световая волна будет пересекать слой толщины  $dr$ , некоторая доля заряда сможет проникнуть через внутреннюю поверхность слоя.
- Эта доля заряда (на единицу площади) составит

$$-\rho \frac{(\mathbf{v}\mathbf{r})}{r} dt = -\rho \frac{(\mathbf{v}\mathbf{r})}{c} \frac{dr}{r}$$

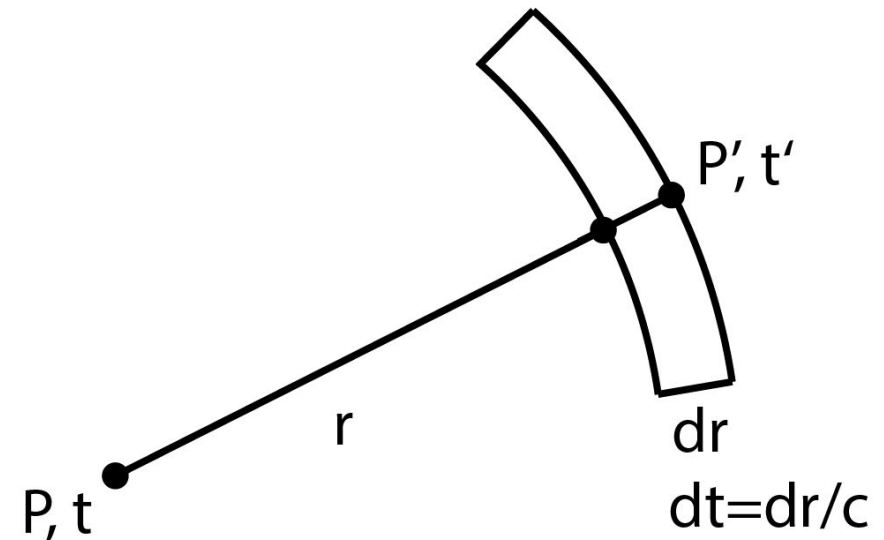
если направление вектора  $\mathbf{r}$  выбрано вдоль линии  $PP'$ .

Поэтому за время  $dt$  световая волна "соберет" элемент заряда  $de$ :

$$de = \rho \left( 1 + \frac{(\mathbf{v}\mathbf{r})}{rc} \right) d\tau$$

- Поэтому под интеграл (2.1) надо подставить выражение

$$\rho d\tau = \frac{de}{1 + \frac{(\mathbf{v}\mathbf{r})}{rc}}$$



## 2. Поле точечного заряда и излучение света

### 1. Потенциалы Вихерта.

- Подставляя это выражение под интеграл (2.1), можно выполнить переход к точечному заряду и получить

$$\varphi(P, t) = \frac{e}{r + \frac{(\mathbf{v}\mathbf{r})}{c}} \Bigg|_{t-\frac{r}{c}}, \quad (2.3a)$$

$$\mathbf{A}(P, t) = \frac{1}{c} \frac{e\mathbf{v}}{r + \frac{(\mathbf{v}\mathbf{r})}{c}} \Bigg|_{t-\frac{r}{c}}. \quad (2.3б)$$

- Все величины в (2.3) должны быть взяты для запаздывающего времени  $t - \frac{r}{c}$ .
- Выражение (2.3) было получено впервые Льенаром и Вихертом.

## 2. Поле точечного заряда и излучение света

### 2. Напряженности поля произвольным образом движущегося точечного заряда.

- Напряженности полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  можно получить из (2.3) дифференцированием:

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}},$$

$$\mathbf{H} = \text{rot}\mathbf{A}.$$

- Производные надо брать здесь по времени  $t$  и координатам точки  $P$ .
- Поскольку, движение частицы в момент  $t'$  определяется заданием

$$\mathbf{r}(t') \text{ и } \mathbf{v}(t') = \frac{\partial \mathbf{r}(t')}{\partial t'},$$

то  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$ , входящие в (2.3), являются функциями запаздывающего времени  $t'$ .

- Поэтому необходимо выразить производные по времени  $t$  через производные по времени  $t'$ .
- Запаздывающее время  $t'$  определяется расстоянием  $r$  в момент  $t'$ .

$$r(t') = c(t - t') \quad (2.4)$$

## 2. Поле точечного заряда и излучение света

### 2. Напряженности поля произвольным образом движущегося точечного заряда.

- Поэтому, дифференцируя  $r$  по  $t$ :

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{(\mathbf{rv})}{r} \frac{\partial t'}{\partial t} = c \left( 1 - \frac{\partial t'}{\partial t} \right)$$

- или

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 + \frac{(\mathbf{vr})}{rc}} = \frac{r}{s}, \quad (2.5)$$

- где сокращенное обозначение

$$s = r + \frac{(\mathbf{vr})}{c}. \quad (2.6)$$

- В силу уравнения (2.4)  $t'$  является функцией координат точки  $P$ .

- Поэтому ( $\mathbf{r}$  направлен от  $P$  к  $P'$ )

$$\text{grad } t' = -\frac{1}{c} \text{grad } r(t') = -\frac{1}{c} \left( \frac{\partial r}{\partial t'} \text{grad } t' - \frac{\mathbf{r}}{r} \right),$$

- или в соответствии с (2.6)

$$\text{grad } t' = \frac{\mathbf{r}}{cs} \quad (2.7)$$

## 2. Поле точечного заряда и излучение света

### 2. Напряженности поля произвольным образом движущегося точечного заряда.

- Для производных от  $s$  получим теперь, согласно (2.5) и (2.7),

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{r}{s} \left( \frac{(\mathbf{r}\mathbf{v})}{r} + \frac{v^2}{c} + \frac{(\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}})}{c} \right), \quad (2.8a)$$

$$\text{grad } s = -\frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{v}}{c} + \frac{r}{cs} \left( \frac{(\mathbf{r}\mathbf{v})}{r} + \frac{v^2}{c} + \frac{(\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}})}{c} \right). \quad (2.8б)$$

- В этих формулах  $\dot{\mathbf{v}}$  означает производную от  $\mathbf{v}$  по  $t'$ , причем  $\mathbf{v}$  зависит только от  $t'$ .  
Поэтому

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \dot{\mathbf{v}} \frac{r}{s}, \quad \text{rot } \mathbf{v} = -[\dot{\mathbf{v}} \text{ grad } t'] = \frac{[\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}]}{cs}. \quad (2.9)$$

## 2. Поле точечного заряда и излучение света

### 2. Напряженности поля произвольным образом движущегося точечного заряда.

- В силу (2.3) получаем для напряженностей полей

$$\frac{\mathbf{E}}{e} = -\text{grad} \frac{1}{s} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} \text{grad} s - \frac{1}{c^2 s} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c^2 s^2} \frac{\partial s}{\partial t},$$

$$\frac{\mathbf{H}}{c} = \frac{1}{c} \text{rot} \frac{\mathbf{v}}{s} = \frac{1}{sc} \text{rot} \mathbf{v} + \frac{1}{cs^2} [\mathbf{v} \text{ grad} s]$$

- Подставляя сюда формулы (2.8), (2.9) и (2.6), можно найти окончательно

$$\frac{\mathbf{E}}{e} = \frac{1 - \beta^2}{s^3} \left( \mathbf{r} + \frac{\mathbf{v}}{c} r \right) + \frac{1}{s^3 c^2} \left[ \mathbf{r} \left[ \mathbf{r} + \frac{\mathbf{v}}{c} r, \dot{\mathbf{v}} \right] \right], \quad (2.10a)$$

$$\frac{\mathbf{H}}{e} = \frac{[\mathbf{E} \mathbf{r}]}{r}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (2.10б)$$

## 2. Поле точечного заряда и излучение света

### 2. Напряженности поля произвольным образом движущегося точечного заряда.

$$\frac{\mathbf{E}}{e} = \frac{1 - \beta^2}{s^3} \left( \mathbf{r} + \frac{\mathbf{v}}{c} r \right) + \frac{1}{s^3 c^2} \left[ \mathbf{r} \left[ \mathbf{r} + \frac{\mathbf{v}}{c} r, \dot{\mathbf{v}} \right] \right], \quad (2.10a)$$

$$\frac{\mathbf{H}}{e} = \frac{[\mathbf{E}\mathbf{r}]}{r}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (2.10б)$$

- Формулы (2.10) справедливы для любого заданного движения точечного заряда с произвольной скоростью. Они неприменимы на расстояниях сравнимых с радиусом электрона.
- Поле (2.10a) складывается из двух частей:
- Первая часть зависит только, от скорости и убывает на больших расстояниях от частицы, как  $r^{-2}$ . Она представляет собой статическую (кулоновскую) часть поля.
- Вторая часть пропорциональна ускорению  $\dot{\mathbf{v}}$  и убывает на больших расстояниях от частицы как  $r^{-1}$ . Эта часть поля является поперечной; соответствующие напряженности поля перпендикулярны радиус-вектору  $\mathbf{r}$ . Ту область, где вторая часть преобладает называют волновой зоной.
- Различие между этими двумя частями поля имеет место, если расстояние, на которое смещается электрон за время  $r/c$ , мало по сравнению с самим  $r$  (квазипериодическое движение или движение с  $v/c \ll 1$ ).



## 2. Поле точечного заряда и излучение света

### 2. Вектор Герца системы зарядов

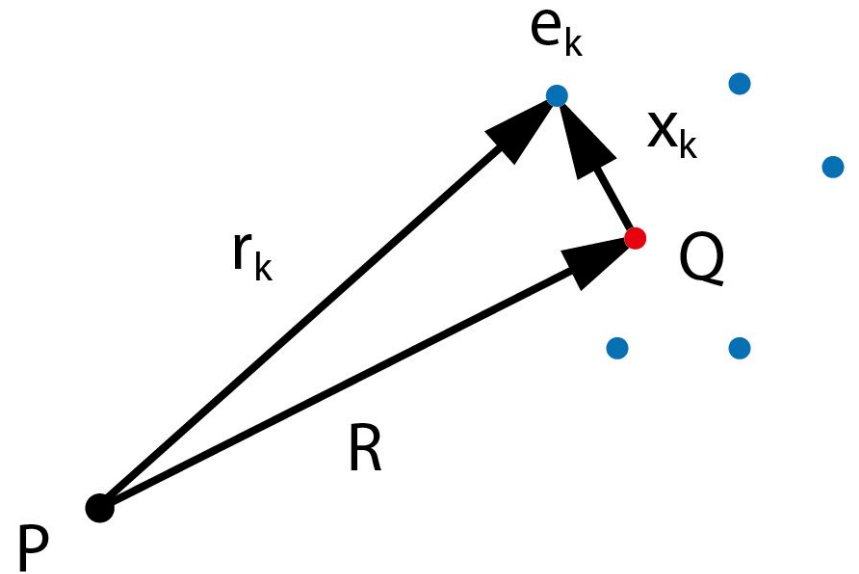
- Рассмотрим испускание света системой точечных зарядов.
- Частицы с зарядами  $e_k$  находятся вблизи от центра  $Q$ ,
- Расстояние (радиус-вектор) точки  $Q$  от точки  $P$ , в которой наблюдается поле, обозначим через  $R$  (направление от  $P$  к  $Q$ ), а радиус-вектор от  $P$  к  $e_k$  через  $\mathbf{r}_k$ .
- Тогда положение каждого заряда может быть определено вектором, изображающим смещение  $\mathbf{x}_k$  заряда  $e_k$  по отношению к центру  $Q$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{r}_k - \mathbf{R} \quad (2.11)$$

Пусть все смещения малы по сравнению с  $R$  и скорости всех частиц малы по сравнению со скоростью света

$$|x_k| \ll R, \quad v_k \ll c. \quad (2.12)$$

- Полное поле является суперпозицией полей, происходящих от всех отдельных зарядов.



## 2. Поле точечного заряда и излучение света

### 3. Вектор Герца системы зарядов.

- В выражении для напряженностей полей (2.10) нужно подставить для каждой частицы свое собственное запаздывающее время  $t'_k = t - \frac{r_k}{c}$ .

- Но поскольку все смещения малы, будет удобно ввести новое время  $T$ , запаздывающее время центра  $Q$ :

$$T = t - \frac{R}{c}, \quad (2.13)$$

- и выразить напряженности поля как функции этого времени  $T$ .
- Если  $\mathbf{x}_k$  мало, то будет малой и разность между общим временем  $T$  и индивидуальным временем  $k$ -й частицы  $t'_k$ .

- Используя соотношение

$$c(t'_k - T) = R - r_k(t'_k), \quad (2.14)$$

- выразим  $\mathbf{v}$  и  $\dot{\mathbf{v}}$  как производные не по времени  $t'$ , а по времени  $T$ .
- После этого найдем явное выражение напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  через  $T$  вместо  $t'_k$ .

## 2. Поле точечного заряда и излучение света

### 3. Вектор Герца системы зарядов.

- Будем интересоваться только той частью  $\mathbf{E}$ , которая существенна в волновой зоне;
- Все члены, убывающие как  $r^{-2}$  или еще быстрее, не дадут в излучение света никакого вклада.

- Дифференцируя (2.14) по  $t'$  получаем (для любого  $k$ )

$$\frac{\partial T}{\partial t'} = 1 + \frac{(\mathbf{r}\mathbf{v})}{rc} = \frac{s}{r}, \quad (2.15)$$

- где используется обозначение (2.6). Поэтому скорость равна

$$\mathbf{v} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t'} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t'} = \mathbf{r}' \frac{s}{r} = \mathbf{x}' \frac{s}{r}, \quad (2.16)$$

- где производные по  $T$  обозначены штрихами.
- Аналогично, опуская члены порядка  $1/r$ , несущественные в волновой зоне, получаем для  $\dot{\mathbf{v}}$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{x}'' \frac{s^2}{r^2} + \mathbf{x}' \frac{\partial s}{\partial t' r} = \mathbf{x}'' \frac{s^2}{r^2} + \mathbf{x}' \frac{(\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}})}{rc}. \quad (2.16')$$

## 2. Поле точечного заряда и излучение света

### 3. Вектор Герца системы зарядов.

- Умножая (2.16) на  $\mathbf{r}$  и сравнивая с (2.6), получаем

$$\frac{r}{s} = 1 - \frac{(\mathbf{r}\mathbf{x}')}{rc}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{x}'}{1 - \frac{(\mathbf{r}\mathbf{x}')}{rc}}. \quad (2.17)$$

- Аналогично, умножая (2.16') на  $\mathbf{r}$  и исключая  $(\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}})$  находим

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{s^3}{r^3} \left[ \mathbf{x}'' \left( 1 - \frac{(\mathbf{r}\mathbf{x}')}{rc} \right) + \frac{\mathbf{x}'(\mathbf{r}\mathbf{x}'')}{rc} \right] \quad (2.18)$$

- Подставляя теперь (2.17) и (2.18) в существенную для волновой зоны часть (второй член) выражения (2.10а), получается, что вклад каждой  $k$ -й частицы в  $\mathbf{E}$  сводится к

$$\mathbf{E}_k = \frac{e_k}{r_k^3 c^2} [\mathbf{r}_k [\mathbf{r}_k \mathbf{x}_k'']]. \quad (2.19)$$

- Если смещения  $\mathbf{x}_k$  малы по сравнению с  $R$ , то можно заменить  $\mathbf{r}_k$  в (2.19) на  $\mathbf{R}$ , что не приведет к существенным для волновой зоны изменениям.

## 2. Поле точечного заряда и излучение света

### 3. Вектор Герца системы зарядов.

- Определим теперь вектор, являющийся алгебраической суммой всех смещений, и будем называть его вектором Герца:

$$\mathbf{Z}(T) = \sum_k e_k \mathbf{x}_k(t'_k). \quad (2.20)$$

- При построении выражения (2.20) имеется в виду, что все  $\mathbf{x}_k$ , которые были первоначально функциями от времен  $t'_k$  выражены теперь как функции времени  $T$  с помощью (2.14)
- $c(t'_k - T) = R - r_k(t'_k)$ , (2.14)
- Тогда для напряженностей полей в волновой зоне

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{R^3 c^3} [\mathbf{R}[\mathbf{RZ}''']]_{T-R/c}, \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{R^2 c^2} [\mathbf{RZ}''']_{T-R/c}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

## 2. Поле точечного заряда и излучение света

### 3. Вектор Герца системы зарядов.

- Выразим теперь  $\mathbf{x}_k(t'_k)$  как явные функции времени  $T$ . Поскольку  $t'_k$  и  $T$  мало отличаются друг от друга, то, используя (2.14), (2.15) и (2.17), можно написать разложение

$$\mathbf{x}_k(t'_k) = \mathbf{x}_k(T) + \mathbf{x}'_k \frac{(\mathbf{x}_k \mathbf{R})}{Rc} + \dots \quad (2.22)$$

- Если условия  $|x_k| \ll R$ ,  $v_k \ll c$  выполнены, то этот ряд сходится. Тогда
$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \dots,$$

- где

$$\mathbf{Z}_1 = \sum_k e_k \mathbf{x}_k(T), \quad \mathbf{Z}_2 = \sum_k e_k \mathbf{x}'_k(T) \frac{(\mathbf{R} \mathbf{x}_k(T))}{Rc}. \quad (2.22')$$

- Первый член  $\mathbf{Z}_1$  является дипольным моментом системы зарядов.
- Второй член обусловлен эффектом запаздывания, поскольку  $\frac{(\mathbf{x}_k \mathbf{R})}{Rc}$  представляет собой разность запаздывающих времен  $k$ -й частицы и центра.
- $\mathbf{Z}_2$  включает электрический квадрупольный и магнитный дипольный моменты системы и может играть существенную роль, если только распределение зарядов симметрично и дипольный момент исчезает.

## 2. Поле точечного заряда и излучение света

### 4. Излучение света.

- Описываемое формулами (2.21) поле убывает с увеличением расстояния как первая степень  $R$ . Поэтому вектор Пойнтинга, будет убывать как  $R^{-2}$  и, следовательно, его интеграл по сфере радиуса  $R$  будет конечным и не зависящим от  $R$ .
- Вследствие этого поле, определяемое (2.21), приведет к возникновению конечного потока энергии через сферу любого радиуса, т. е. к излучению света.
- Поле излучения поперечно, обе напряженности поля перпендикулярны как к  $\mathbf{R}$ , так и друг к другу. Поток энергии в единицу времени через площадь  $R^2 d\Omega$  равен

$$\mathbf{S}R^2 d\Omega = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}]R^2 d\Omega = \frac{d\Omega}{4\pi c^3} \frac{\mathbf{R}}{R} \dot{Z}''^2 \sin^2 \theta, \quad (2.25)$$

- где  $\theta$  — угол между направлением вектора  $\mathbf{Z}''$  и направлением наблюдения.
- Поток энергии (2.25) направлен нормально к поверхности сферы и пропорционален квадрату второй производной от вектора Герца по времени.
- Наибольшее значение он принимает по направлению, перпендикулярному к  $\mathbf{Z}''$ , а в направлении  $\mathbf{Z}''$  обращается в нуль.

## 2. Поле точечного заряда и излучение света

### 4. Излучение света.

- Полная энергия  $S$ , испускаемая за единицу времени, получается интегрированием (2.25) по всем углам:

$$S = \frac{2}{3} \frac{Z''^2}{c^3}. \quad (2.26)$$

- Простейшей моделью источника света является гармонический осциллятор, т. е. один заряд, упруго связанный с центром и совершающий колебания с частотой  $\nu$  вдоль оси  $x$ :

$$\mathbf{Z} = e\mathbf{x} = e x_0 \cos \nu t, \quad \mathbf{Z}'' = -e\nu^2 \mathbf{x}.$$

- Излучение такого осциллятора будет монохроматическим с той же частотой  $\nu$ .
- Усреднение (2.26) по времени дает

$$S = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \nu^4 \overline{x^2} = \frac{1}{3} \frac{e^2}{c^3} \nu^4 x_0^2. \quad (2.27)$$

- Следовательно, излучаемая в единицу времени энергия пропорциональна  $\nu^4$ .



## 2. Поле точечного заряда и излучение света

### 5. Заключение

- Движущийся точечный заряд излучает. Излучаемая за единицу времени энергия определяется для медленно движущейся частицы уравнением:

$$S = \frac{2}{3} \frac{Z''^2}{c^3} .$$

- Согласно уравнению баланса энергии, эта энергия должна быть поставлена теми силами, которые поддерживают движение заряда.
- Поэтому кинетическая энергия частицы должна убывать со временем.
- Вследствие этого не совсем верно определять движение частицы, исходя лишь из действующих на нее внешних сил, поскольку излучение также должно влиять на движение.
- Чтобы подвести правильный баланс энергии с помощью закона сохранения, необходимо рассмотреть обратное действие испускаемого зарядом поля на его собственное движение (реакцию излучения).

# Литература

- 1. Ансельм, А.И. Основы статистической физики и термодинамики. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — СПб.: Лань, 2007. — 448 с. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/692> — Загл. с экрана.
- 2. Старовойтов А.А. Методические рекомендации по подготовке рефератов, мультимедийных презентаций и докладов. – СПб: Университет ИТМО, 2014. – 68 с.
- 3. Электронно-библиотечная система. Издательство «Лань» [Электронный ресурс] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.5. Часть 1. Статистическая физика. Изд. Физматлит, 2001. 616 с. Режим доступа: [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=2230](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2230), свободный.
- 4. Электронно-библиотечная система. Издательство «Лань» [Электронный ресурс] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.4. Квантовая электродинамика. Изд. Физматлит, 2006. 720 с. Режим доступа: [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=2237](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2237), свободный.
- 5. Куни Ф.М. Статистическая физика и термодинамика, М. Наука, 1981. 352 с.
- 6. Электронно-библиотечная система. Издательство «Лань» [Электронный ресурс] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика Т.3. Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Физматлит, 2001. 808 с., Режим доступа: [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=2380](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2380), свободный.
- 7. Гайтлер В. Квантовая теория излучения. М.: Изд. Иностранной литературы, 1956. 491 с.