20.01.21.

Тема:
Определение производной. Физический смысл производной. Приращение аргумента и приращение функции. Производная степенной функции.

Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:
https://iu.ru/video-lessons/7981a604-de36-40db-a5a3-ab78e640f119
https://youtu.be/6N6c-sKRLEw

Теоретическая часть:
Прочитать и понять.
Выделенное жирным шрифтом – выучить.

Производная

На станции метро расстояние от тормозной отметки до остановки первого вагона равно 80 м. С какой скоростью поезд должен подойти к тормозной отметке, если дальше он двигается равнозамедленно с ускорением 1,6 м/с^2?

Для решения задачи нужно найти скорость движения поезда в момент прохождения тормозной отметки, т. е. *мгновенную скорость* в этот момент времени. Тормозной путь вычисляется по формуле $s = \frac{at^2}{2}$, где a — ускорение, t — время торможения. В данном случае $s = 80$, $a = 1{,}6$, поэтому $80 = 0{,}8t^2$, откуда $t = 10$ с. По формуле $v = at$ находим мгновенную скорость $v = 1{,}6 \cdot 10 = 16$, т. е. $v = 16$ м/с. ◁

От мгновенной скорости зависит решение многих практических задач.

Например, от скорости вхождения в воду спортсмена, прыгающего с вышки, зависит глубина его погружения.

При нахождении мгновенной скорости используется средняя скорость движения за малый промежуток времени.

Рассмотрим, *как связаны между собой средняя и мгновенная скорости движения.*

Пусть материальная точка M движется вдоль оси Os, где O — положение материальной точки в момент времени $t = 0$. Если в момент времени t координата материальной точки равна s, где $s = s(t)$, то функцию $s(t)$ называют законом движения точки M.

При неравномерном движении материальная точка за равные по длительности промежутки времени может совершать перемещения, разные не только по величине, но и по направлению. Средняя скорость движения материальной точки за промежуток времени от t до $t + h$ определяется формулой $v_{\text{ср}} = \dfrac{s(t+h) - s(t)}{h}$.

Если рассматриваемое движение не является равномерным, то $v_{\text{ср}}$ при фиксированном t будет меняться при изменении h, и чем меньше h, тем лучше $v_{\text{ср}}$ будет характеризовать движение точки в момент t. *Скоростью точки в момент t (мгновенной скоростью)* называют предел, к которому стремится средняя скорость, когда $h \to 0$, т. е. скорость v в момент t определяется равенством $v = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{s(t+h) - s(t)}{h}$.

Таким образом, скорость движения в момент t — предел отношения приращения координаты $\Delta s = s(t + h) - s(t)$ за промежуток времени от t до $t + h$ к приращению времени h, когда $h \to 0$, если этот предел существует.

Отношение $\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$ называют *разностным отношением*, а его предел при $h \to 0$ называют *производной функции* $s(t)$ и обозначают $s'(t)$ (читается: «Эс штрих от тэ»).

Вообще, пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке, x — точка этого промежутка и число $h \neq 0$ такое, что $x+h$ также принадлежит данному промежутку. Тогда предел разностного отношения $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ при $h \to 0$ (если этот предел существует) называется *производной функции* $f(x)$ *в точке* x и обозначается $f'(x)$ (читается: «Эф штрих от икс»). Таким образом,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \qquad (1)$$

Задача Найти производную функции $f(x) = x^2$.

▶ Составим разностное отношение:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h.$$

Если $h \to 0$, то $2x + h \to 2x$, поэтому

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x+h) = 2x.$$

Следовательно, $(x^2)' = 2x$. ◁

Задача Найти производную функции $f(x) = C$, где C — заданное число.

▶ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{C-C}{h} = 0$. Так как разностное отношение равно нулю при любом $h \neq 0$, т. е. его значение не меняется при $h \to 0$, то предел этого отношения также равен нулю. Таким образом, производная постоянной равна нулю, т. е. $(C)' = 0$. ◁

Задача Найти производную линейной функции $f(x) = kx + b$.

▶ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{k(x+h)+b-(kx+b)}{h} = \frac{kh}{h} = k$.

Так как разностное отношение равно k при любом $h \neq 0$, то и предел этого отношения при $h \to 0$ также равен k. Следовательно, $(kx + b)' = k$. ◁

Применяя формулу

$$(kx + b)' = k,$$

например, получаем

$(3x + 7)' = 3$, $(-2x + 1)' = -2$, $(5x)' = 5$, $(x)' = 1$.

Производная степенной функции

Вообще, справедлива формула производной степенной функции для любого действительного показателя:

$$(x^p)' = px^{p-1}. \qquad (1)$$

Например, $(x^5)' = 5x^4$, $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, $\left(x^{\sqrt{2}}\right)' = \sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1}$.

Задача Вычислить $f'(9)$, если $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

▶ $f'(x) = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$, $f'(9) = -\frac{1}{2} \cdot 9^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{54}$. ◁

Пользуясь формулами $(x^p)' = px^{p-1}$ и $(kx+b)' = k$, можно найти производные степенной и линейной функций, например $(x^7)' = 7x^6$, $(3x-1)' = 3$. В более сложных случаях, например при нахождении производной функции $(3x-1)^7$, можно воспользоваться следующей формулой:

$$((kx+b)^p)' = pk(kx+b)^{p-1}. \qquad (2)$$

По формуле (2) при $k=3$, $b=-1$, $p=7$ имеем

$$((3x-1)^7)' = 21(3x-1)^6.$$

Задача Вычислить $f'(-3)$, если $f(x) = \sqrt{4-7x}$.

▶ Запишем данную функцию так: $f(x) = (-7x+4)^{\frac{1}{2}}$.

По формуле (2) находим $f'(x) = -\frac{7}{2}(-7x+4)^{-\frac{1}{2}}$.

При $x=-3$ получаем $f'(-3) = -\frac{7}{2} \cdot 25^{-\frac{1}{2}} = -0{,}7$. ◁

Практическая часть.

Найти производную функции (787—792).

787 1) x^6; 2) x^7; 3) x^{11}; 4) x^{13}.

788 1) x^{-2}; 2) x^{-3}; 3) x^{-4}; 4) x^{-7}.

789 1) $x^{\frac{1}{2}}$; 2) $x^{\frac{2}{3}}$; 3) $x^{-\frac{2}{7}}$; 4) $x^{\sqrt{3}}$.

790 1) $\frac{1}{x^5}$; 2) $\frac{1}{x^9}$; 3) $\sqrt[4]{x}$; 4) $\sqrt[3]{x^2}$; 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$.

791 1) $(4x-3)^2$; 2) $(5x+2)^{-3}$; 3) $(1-2x)^{-6}$;
4) $(2-5x)^4$; 5) $(2x)^3$; 6) $(-5x)^4$.

792 1) $\sqrt[3]{2x+7}$; 2) $\sqrt[4]{7-3x}$; 3) $\sqrt[4]{3x}$; 4) $\sqrt[3]{5x}$.