Некоторые приемы решения целых уравнений

mathvideourok.moy.su

Теорема:

Если уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ в котором все коэффициенты – целые числа, причем свободный член отличен от нуля, имеет целый корень, то этот корень является делителем свободного члена.

$$1)\, x^3 - 8x^2 + 13x - 2 = 0$$

делители числа $-2: \pm 1; \pm 2$

Проверка показывает, что корнем уравнения является число 2.

Разделим левую часть уравнения на $x - 2$

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 8x^2 + 13x - 2 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^3 - 2x^2} \qquad\qquad & x^2 - 6x + 1 \\
-6x^2 + 13x \quad\;\; & \\
-\underline{-6x^2 + 12x} \quad\;\; & \\
x - 2 & \\
-\underline{x - 2} & \\
0 &
\end{array}$$

$$(x - 2)(x^2 - 6x + 1) = 0$$

$$(x-2)(x^2-6x+1)=0$$

$$x-2=0; \qquad x^2-6x+1=0$$

$$x=2$$

$$\frac{Д}{4}=к^2-ac=9-1=8>0(2к)$$

$$x_{1;2}=\frac{-к\pm\sqrt{\frac{Д}{4}}}{a}=\frac{3\pm\sqrt{8}}{1}$$

$$Ответ: 2; 3-\sqrt{8}; 3+\sqrt{8}$$

Решите уравнения :

а) $x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0$

б) $x^3 - x^2 - 9x - 6 = 0$

в) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

Возвратные уравнения

Возвратным уравнением называется уравнение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

В котором коэффициенты членов уравнения, одинаково отстоящих от начала и конца, равны.

Решите уравнение

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0 \,/ : x^2 \neq 0$$

$$x^2 - 5x + 6 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 5(x + \frac{1}{x}) + 6 = 0$$

$$\textit{Пусть } x + \frac{1}{x} = n, \textit{тогда}$$

$$(x + \frac{1}{x})^2 = n^2$$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = n^2$$

значит

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = n^2 - 2$$

$$n^2 - 2 - 5n + 6 = 0$$

$$n^2 - 5n + 4 = 0$$

$$Д = в^2 - 4ас = 25 - 16 = 9 > 0 (2к)$$

$$n_{1;2} = \frac{-в \pm \sqrt{Д}}{2a} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$n_1 = 4; n_2 = 1$$

1) $если \ n = 4, то$

$$x + \frac{1}{x} = 4 \quad / \cdot x \neq 0$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\frac{Д}{4} = к^2 - ас = 4 - 1 = 3 > 0 (2к)$$

$$x_{1;2} = \frac{-к \pm \sqrt{\frac{Д}{4}}}{a} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{1}$$

2) $если \ n = 1, то$

$$x + \frac{1}{x} = 1 \ / \cdot x \neq 0$$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$Д = в^2 - 4ас =$$

$$= 1 - 4 < 0 - корней \ нет$$

$$Ответ: 2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}$$

Решите уравнение

$$а)\,x^4+5x^3+2x^2+5x+1=0$$

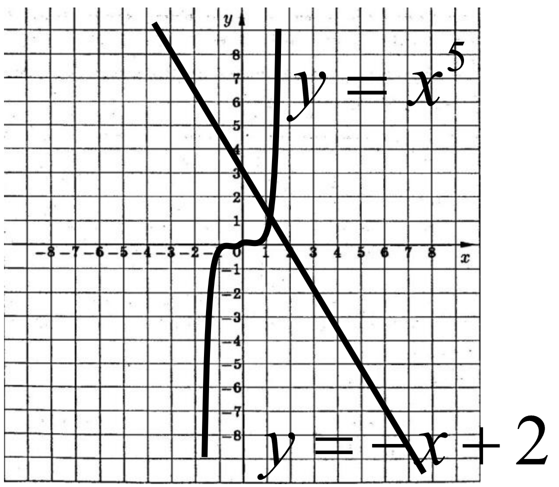
$$б)\,4x^4+3x^3-14x^2+3x+4=0$$

$$в)\,6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$$

Решение уравнений с использования свойств возрастания и убывания функции

$x^5 + x - 2 = 0$ $\quad$ *делители числа* $-2: \pm 1; \pm 2$

Проверкой убеждаемся, что корнем этого уравнения является число 1



Теперь докажем, что он единственный

$$x^5 + x - 2 = 0$$

$$x^5 = -x + 2$$

Рассмотрим функции

$y = x^5$ *– возрастающая* $\qquad y = -x + 2$ *– убывающая*

Значит по теореме о корне это уравнение имеет единственный корень

Ответ: 1