

Некоторые приемы решения целых уравнений



Теорема :

Если уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ в котором все коэффициенты – целые числа, причем свободный член отличен от нуля, имеет целый корень, то этот корень является делителем свободного члена.



$$1) x^3 - 8x^2 + 13x - 2 = 0$$

делители числа $-2 : \pm 1; \pm 2$

Проверка показывает, что корнем уравнения является число 2.

Разделим левую часть уравнения на $x - 2$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 8x^2 + 13x - 2 & x - 2 \\ \hline x^3 - 2x^2 & \\ \hline -6x^2 + 13x & \\ -6x^2 + 12x & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x - 2 \\ \hline x - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(x - 2)(x^2 - 6x + 1) = 0$$

$$(x-2)(x^2-6x+1)=0$$

$$x-2=0;$$

$$x=2$$

$$x^2-6x+1=0$$

$$\frac{D}{4} = \kappa^2 - ac = 9 - 1 = 8 > 0 (2\kappa)$$

$$x_{1;2} = \frac{-\kappa \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a} = \frac{3 \pm \sqrt{8}}{1}$$

Ответ : $2; 3 - \sqrt{8}; 3 + \sqrt{8}$

Решите уравнения :

$$a) x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$б) x^3 - x^2 - 9x - 6 = 0$$

$$в) x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$



Возвратные уравнения

Возвратным уравнением называется уравнение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

В котором коэффициенты членов уравнения, одинаково отстоящих от начала и конца, равны.

Решите уравнение

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0 / : x^2 \neq 0$$

$$x^2 - 5x + 6 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$$

Пусть $x + \frac{1}{x} = n$, тогда

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = n^2$$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = n^2$$

значит

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = n^2 - 2$$

$$n^2 - 2 - 5n + 6 = 0$$

$$n^2 - 5n + 4 = 0$$

$$D = v^2 - 4ac = 25 - 16 = 9 > 0 (2\kappa)$$

$$n_{1;2} = \frac{-v \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$n_1 = 4; n_2 = 1$$

1) если $n = 4$, то

$$x + \frac{1}{x} = 4 \quad / \cdot x \neq 0$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\frac{D}{4} = \kappa^2 - ac = 4 - 1 = 3 > 0 (2\kappa)$$

$$x_{1;2} = \frac{-\kappa \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{1}$$

2) если $n = 1$, то

$$x + \frac{1}{x} = 1 \quad / \cdot x \neq 0$$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$D = v^2 - 4ac =$$

$$= 1 - 4 < 0 - \text{корней нет}$$

Ответ : $2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}$

Решите уравнение

а) $x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 1 = 0$

б) $4x^4 + 3x^3 - 14x^2 + 3x + 4 = 0$

в) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$



Решение уравнений с использования свойств возрастания и убывания функции

$$x^5 + x - 2 = 0 \quad \text{делители числа } -2 : \pm 1; \pm 2$$

Проверкой убеждаемся, что корнем

этого уравнения является число 1

Теперь докажем, что он единственный

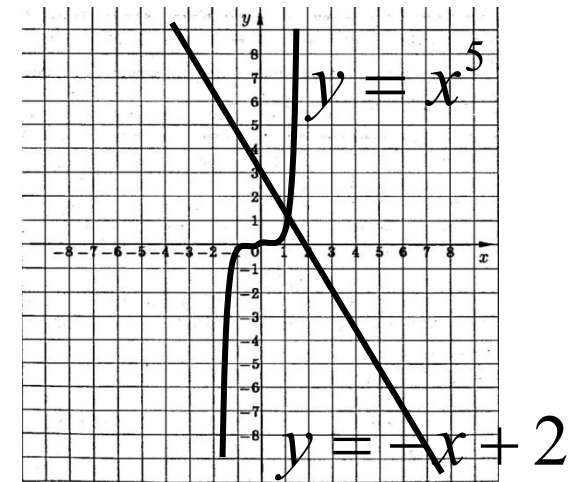
$$x^5 + x - 2 = 0$$

$$x^5 = -x + 2 \quad \text{Рассмотрим функции}$$

$y = x^5$ – возрастающая $y = -x + 2$ – убывающая

Значит по теореме о корне это

уравнение имеет единственный корень



Ответ : 1