Лекция 3.11. **Ряды Фурье.**

Определение:

Функция $D_n(t)=\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kt$ называется ядром Дирихле.

Лемма:

$D_n(t)$ – непрерывная на R, чётная, 2π – периодичная функция, $D_n(0)=n+\frac{1}{2}$,

при $t\neq 2\pi k, k\in Z$

$$D_n(t)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t)dt=1 \quad \forall n.$$

Принцип локализации Римана

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(t-x)\, dt$$

<u>Утверждение:</u>

Пусть $f(x) - 2\pi -$ периодическая функция

и $\exists \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$. Тогда $\forall a \in R$:

$$\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$\tau = t - x:$$

<u>Теорема (принцип локализации Римана):</u>

$\forall x_0 \in [-\pi, \pi]$ существование $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0)$ (обозначение из предыдущего рассуждения) равносильно существованию для некоторого $\delta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta} \big(f(x_0+\tau) + f(x_0-\tau)\big) D_n(\tau)\, d\tau\,.$$

<u>Теорема (признак Дини):</u>

Пусть $f(x) - 2\pi -$ периодическая функция и

$$\exists \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \exists \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx, \exists \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx,$$ и пусть в

точке $x_0 \in [-\pi, \pi]$ $\exists \lim\limits_{h \to 0+} f(x_0 + h) = f_+(x_0)$ и $\exists \lim\limits_{h \to 0+} f(x_0 - h) = f_-(x_0)$. Тогда если $\exists \delta > 0,$ что

сходится $$\int\limits_0^{\delta} \frac{\left| f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f_+(x_0) - f_-(x_0) \right|}{t} dt,$$

то $$\exists \lim_{n \to \infty} S_n(x_0) = \frac{f_+(x_0) + f_-(x_0)}{2}.$$

<u>Теорема (достаточное условие равномерной сходимости ряда Фурье на отрезке):</u>

$f(x) \in C[-\pi, \pi], \qquad f(-\pi) = f(\pi),$

$f(x)$ доопределена на R как непрерывная функция с периодом 2π,

т. е. $f(x) \in C(R)$, $\qquad f'(x)$ существует на $[-\pi, \pi]$ везде, кроме конечного числа точек, и $f'(x)$ непре – рывна везде, где существует, а в точках, где $f'(x)$ не существует, существуют оба односторонних предела $f'(x)$. Тогда ряд Фурье $f(x)$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \rightrightarrows f(x) \text{ на } R.$$

<u>Теорема (принцип локализации Римана):</u>

$\forall x_0 \in [-\pi, \pi]$ существование $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0)$ (обозначение из предыдущего рассуждения) равносильно существованию для некоторого $\delta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta} \big(f(x_0+\tau) + f(x_0-\tau)\big) D_n(\tau) d\tau\,.$$

__Теорема (признак Дини):__

Пусть $f(x) - 2\pi -$ периодическая функция и

$\exists \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \exists \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx, \exists \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$, и пусть в

точке $x_0 \in [-\pi, \pi]$ $\exists \lim\limits_{h\to 0+} f(x_0 + h) = f_+(x_0)$ и $\exists \lim\limits_{h\to 0+} f(x_0 - h) = f\_(x_0)$. Тогда если $\exists \delta > 0$, что

сходится $\displaystyle\int\limits_0^{\delta} \frac{\left|f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f_+(x_0) - f\_(x_0)\right|}{t} dt$,

то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0) = \dfrac{f_+(x_0) + f\_(x_0)}{2}$.

Примеры:

$$1)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2}, x \in (0, \pi] \\ \qquad\qquad s \\ \quad 0, \qquad x = 0 \\ \qquad\qquad s \\ \dfrac{-\pi - x}{2}, x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

$$2)\ f(x) = |x| \text{ на } [-\pi, \pi]$$