

Лекция 3.11. Ряды Фурье.

Определение:

Функция $D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt$ называется ядром Дирихле.

Лемма:

$D_n(t)$ – непрерывная на R , чётная, 2π

– периодичная функция, $D_n(0) = n + \frac{1}{2}$,

при $t \neq 2\pi k, k \in Z$

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1 \quad \forall n.$$

Принцип локализации Римана

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt$$

Утверждение:

Пусть $f(x)$ — 2π — периодическая функция

и $\exists \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$. Тогда $\forall a \in R$:

$$\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$\tau = t - x:$$

Теорема (принцип локализации Римана):

$\forall x_0 \in [-\pi, \pi]$ существование $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0)$

(обозначение из предыдущего рассуждения) равносильно существованию для некоторого $\delta > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} (f(x_0 + \tau) + f(x_0 - \tau)) D_n(\tau) d\tau.$$

Теорема (признак Дини):

Пусть $f(x)$ — 2π — периодическая функция и

$$\exists \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \exists \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx, \exists \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx, \text{ и пусть в}$$

точке $x_0 \in [-\pi, \pi]$ $\exists \lim_{h \rightarrow 0+} f(x_0 + h) = f_+(x_0)$ и $\exists \lim_{h \rightarrow 0+} f(x_0 - h) = f_-(x_0)$. Тогда если $\exists \delta > 0$, что

сходится $\int_0^{\delta} \frac{|f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f_+(x_0) - f_-(x_0)|}{t} dt,$

$$\text{то } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \frac{f_+(x_0) + f_-(x_0)}{2}.$$

Теорема (достаточное условие равномерной сходимости ряда

Фурье на отрезке):

$$f(x) \in C[-\pi, \pi], \quad f(-\pi) = f(\pi),$$

$f(x)$ доопределена на R как

непрерывная функция с периодом 2π ,

т. е. $f(x) \in C(R)$, $f'(x)$ существует на $[-\pi, \pi]$ везде,

кроме конечного числа точек, и $f'(x)$ непре-
рывна везде, где существует, а в точках, где $f'(x)$

не существует, существуют оба односторонних
предела $f'(x)$. Тогда ряд Фурье $f(x)$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \rightrightarrows f(x) \text{ на } R.$$

Теорема (принцип локализации Римана):

$\forall x_0 \in [-\pi, \pi]$ существование $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0)$

(обозначение из предыдущего рассуждения) равносильно существованию для некоторого $\delta > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} (f(x_0 + \tau) + f(x_0 - \tau)) D_n(\tau) d\tau.$$

Теорема (признак Дини):

Пусть $f(x)$ — 2π — периодическая функция и

$$\exists \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \exists \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx, \exists \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx, \text{ и пусть в}$$

точке $x_0 \in [-\pi, \pi]$ $\exists \lim_{h \rightarrow 0+} f(x_0 + h) = f_+(x_0)$ и $\exists \lim_{h \rightarrow 0+} f(x_0 - h) = f_-(x_0)$. Тогда если $\exists \delta > 0$, что

сходится $\int_0^{\delta} \frac{|f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f_+(x_0) - f_-(x_0)|}{t} dt,$

$$\text{то } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \frac{f_+(x_0) + f_-(x_0)}{2}.$$

Примеры:

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & x \in (0, \pi] \\ 0, & x = 0 \\ \frac{-\pi - x}{2}, & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

$$2) f(x) = |x| \text{ на } [-\pi, \pi]$$