Лекция 3.11. ***Ряды Фурье.***

Определение:

Функция $D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt$ называется ядром Дирихле.

Лемма:

$D_n(t)$ – непрерывная на R, чётная, 2π – периодичная функция, $D_n(0) = n + \frac{1}{2}$, при $t \neq 2\pi k, k \in Z$

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 1 \quad \forall n.$$

Принцип локализации Римана

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(t-x)\, dt$$

<u>*Утверждение:*</u>

Пусть $f(x) - 2\pi -$ периодическая функция

и $\exists \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$. Тогда $\forall a \in R$:

$$\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$\tau = t - x$:

<u>Теорема (принцип локализации Римана):</u>

$\forall x_0 \in [-\pi, \pi]$ существование $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0)$

(обозначение из предыдущего рассуждения) равносильно существованию для некоторого $\delta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta} \big(f(x_0+\tau) + f(x_0-\tau)\big) D_n(\tau)\, d\tau\,.$$

<u>Теорема (признак Дини):</u>

Пусть $f(x) - 2\pi -$ периодическая функция и

$$\exists \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \exists \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx, \exists \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx,$$ и пусть в

точке $x_0 \in [-\pi, \pi]$ $\exists \lim_{h \to 0+} f(x_0 + h) = f_+(x_0)$ и $\exists \lim_{h \to 0+} f(x_0 - h)$ $= f_-(x_0)$. Тогда если $\exists \delta > 0$, что

сходится $$\int_0^{\delta} \frac{\left| f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f_+(x_0) - f_-(x_0) \right|}{t} dt,$$

то $\exists \lim_{n \to \infty} S_n(x_0) = \dfrac{f_+(x_0) + f_-(x_0)}{2}$.

<u>Теорема (достаточное условие равномерной сходимости ряда Фурье на отрезке):</u>

$f(x) \in C[-\pi, \pi], \qquad f(-\pi) = f(\pi),$

$f(x)$ доопределена на R как непрерывная функция с периодом 2π, т. е. $f(x) \in C(R)$, $\qquad f'(x)$ существует на $[-\pi, \pi]$ везде, кроме конечного числа точек, и $f'(x)$ непре − рывна везде, где существует, а в точках, где $f'(x)$ не существует, существуют оба односторонних предела $f'(x)$. Тогда ряд Фурье $f(x)$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \rightrightarrows f(x) \text{ на } R.$$

<u>Теорема (принцип локализации Римана):</u>

$\forall x_0 \in [-\pi, \pi]$ существование $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0)$

(обозначение из предыдущего рассуждения) равносильно существованию для некоторого $\delta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta} \big(f(x_0+\tau) + f(x_0-\tau)\big) D_n(\tau)\, d\tau\,.$$

<u>Теорема (признак Дини):</u>

Пусть $f(x) - 2\pi -$ периодическая функция и

$$\exists \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \exists \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx, \exists \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx,$$ и пусть в

точке $x_0 \in [-\pi, \pi]$ $\exists \lim_{h \to 0+} f(x_0 + h) = f_+(x_0)$ и $\exists \lim_{h \to 0+} f(x_0 - h)$ $= f_-(x_0)$. Тогда если $\exists \delta > 0$, что

сходится $$\int_0^{\delta} \frac{\left| f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f_+(x_0) - f_-(x_0) \right|}{t} dt,$$

то $\exists \lim_{n \to \infty} S_n(x_0) = \dfrac{f_+(x_0) + f_-(x_0)}{2}$.

Примеры:

$$1)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2}, x \in (0, \pi] \\ \qquad s \\ 0, \qquad x = 0 \\ \qquad s \\ \dfrac{-\pi - x}{2}, x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

$$2)\ f(x) = |x| \ \text{ на } \ [-\pi, \pi]$$