РАНХиГС
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Потоки платежей. Конверсия платежей.

Князева М.А.,
доцент, канд. техн. наук

Принцип финансовой эквивалентности

Принцип **финансовой эквивалентности** гарантирует равенство финансовых обязательств участников операции.

Он позволяет без нарушения принятых обязательств варьировать условия проведения операций, в частности изменять процентные ставки и распределение платежей во времени.

Эквивалетные платежи и серии платежей

Эквивалентными платежами считаются такие платежи, которые обеспечивают равенство финансовых обязательств участников операции.

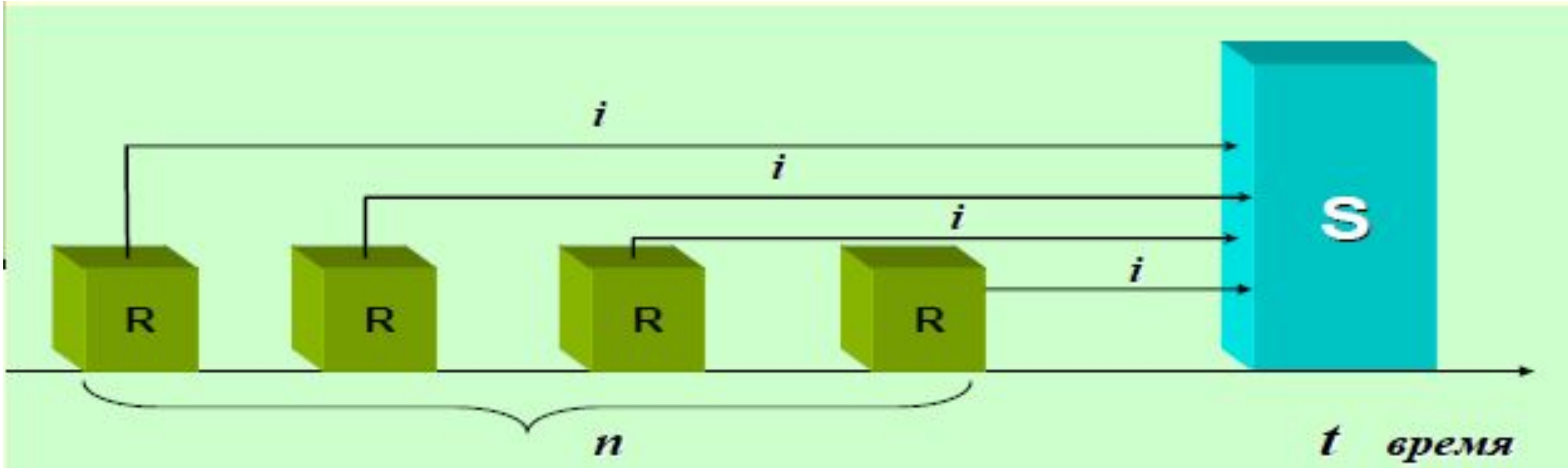
Переход от одного платежа к эквивалентному ему другому платежу с использованием модели начисления процентов называют ***приведением платежа к другой дате***.

Приведение платежей используется для сравнения результатов финансовых операций, относящихся к разным моментам времени.

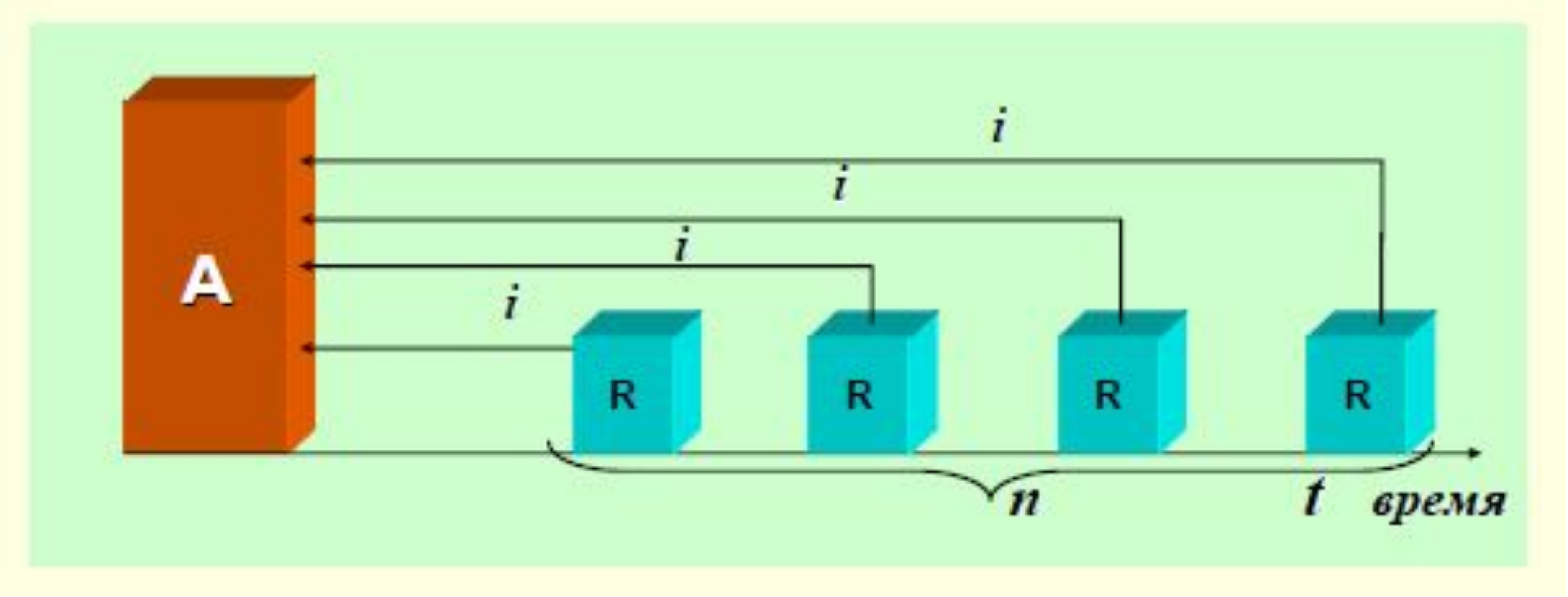
Сравнение потоков платежей

Потоки платежей сравниваются на основе их консолидированных (суммарных) платежей. Для того, чтобы определить ***консолидированный платеж*** потока платежей на определенную дату, для каждого платежа находят эквивалентный ему платеж на эту дату, а затем все полученные платежи складывают

Формирование наращенной суммы



Дисконтирование платежей



Пример 1

Определим, эквивалентны ли по ставке 10% доходы от двух проектов, гарантирующих выплату дивидендов соответственно 100 тыс. руб. через три года и 120 тыс. руб. через пять лет.

Дано: $S_1 = 100$; $S_2 = 120$; $j_1 = i = 0{,}1$; $n_1 = 3$; $n_2 = 5$.

Найти: P_1, P_2.

Решение

$$P_1 = \frac{S_1}{(1+i)^{n_1}} = \frac{100}{(1+0{,}1)^3} = 75{,}131;\; P_2 = \frac{120}{(1+0{,}1)^5} = 74{,}511.$$

Уравнение эквивалентности

Уравнением эквивалентности называют равенство, устанавливающее эквивалентность платежей или потоков платежей на определенную дату.

Дата, используемая при составлении уравнения эквивалентности, называется ***датой сравнения***.

РАНХиГС
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации

Пример 2

Установим, являются ли эквивалентными по ставке 10% два платежа по 30 тыс. и 50 тыс. руб., выплачиваемые соответственно через три года и пять лет, двум другим платежам по 20 тыс. и 60 тыс. руб., выплачиваемым соответственно через два года и шесть лет.

Дано: $S_1^{(1)} = 30$; $S_2^{(1)} = 50$; $S_1^{(2)} = 20$; $S_2^{(2)} = 60$; $j_1 = i = 0{,}1$; $n_1^{(1)} = 3$; $n_2^{(1)} = 5$; $n_1^{(2)} = 2$; $n_2^{(2)} = 6$.

Найти: P_1, P_2.

Решение

Определим текущие стоимости для каждого платежа:

$$P_1^{(1)} = \frac{30}{(1+0{,}1)^3} = 22{,}539;\quad P_2^{(1)} = \frac{50}{(1+0{,}1)^5} = 31{,}046;$$

$$P_1^{(2)} = \frac{20}{(1+0{,}1)^2} = 16{,}529;\quad P_2^{(2)} = \frac{60}{(1+0{,}1)^6} = 33{,}868.$$

Найдем консолидированные платежи для каждой серии:

$$P_1 = 22{,}539 + 31{,}046 = 53{,}585;\ P_2 = 16{,}529 + 33{,}868 = 50{,}397.$$

Поскольку консолидированные платежи серий не равны, то эти серии не являются эквивалентными при данной ставке.

Датой сравнения здесь является момент начала операции.

Конверсия платежей

Конверсия платежей – это замена одного потока платежей эквивалентным ему по данной ставке другим потоком платежей.

При конверсии платежей возможны варианты замены:

- одного платежа другим платежом;
- потока платежей одним платежом (консолидация потока платежей);
- одного потока платежей другим потоком платежей;
- одного платежа потоком платежей (рассрочка платежа).

Замена одного платежа другим платежом

▷▷ *Постановка задачи*

Дано:

F — размер платежа;

date — момент платежа;

$date^{(-)}$ — более ранний по сравнению с *date* момент времени;

$date^{(+)}$— более поздний по сравнению с *date* момент времени;

i — процентная ставка за период начисления процентов.

Требуется определить платеж $F^{(-)}$ и (или) $F^{(+)}$, определенный соответственно на $date^{(-)}$ и (или) $date^{(+)}$ и эквивалентный платежу F с учетом начисления процентов по ставке i.

Замена одного платежа другим платежом (продолжение)

▶▶ *Решение задачи*

Строится временна́я диаграмма:

$date^{(-)}$	$date$	$date^{(+)}$
	F	
$F^{(-)}$		
		$F^{(+)}$

Определяется число периодов начисления процентов n в промежутке между исходным и искомым платежами: $n = date^{(+)} - date$ или $n = date - date^{(+)}$.

Вычисляются искомые платежи: $F^{(+)} = F(1+i)^n$ или $F^{(-)} = F(1+i)^{-n}$. ◀◀

Пример 3

Найдем платежи, эквивалентные 100 тыс. руб., полагающимся через три года, при ставке 8%: а) в настоящее время; б) через семь лет.

Дано: $F = 100$; $j_1 = 0{,}08$; $t = 3$; $t^{(-)} = 0$; $t^{(+)} = 7$.

Найти: $F^{(-)}$, $F^{(+)}$.

Решение

Поскольку проценты начисляются ежегодно ($m = 1$), то время на временно́й диаграмме измеряется в годах: $date = 3$, а) $date^{(-)} = 0$, б) $date^{(+)} = 7$.

Временна́я диаграмма имеет следующий вид:

0	3	7
	100	
$F^{(-)}$		
		$F^{(+)}$

Определяем число периодов начисления n и искомые суммы:

а) $n = 3$, $F^{(-)} = 100(1 + 0{,}08)^{-3} = 79{,}383$ (тыс. руб.);

б) $n = 4$, $F^{(+)} = 100(1 + 0{,}08)^{4} = 136{,}049$ (тыс. руб.).

Пример 4

Долг 600 тыс. руб. следует выплатить через четыре года. Найдем эквивалентный долг при ставке 12% через: а) 2 года, б) 5 лет, если начисление процентов происходит ежемесячно.

Дано: $F = 600$; $j_{12} = 0{,}12$; $t = 4$; а) $t^{(-)} = 2$; б) $t^{(+)} = 5$.

Найти: $F^{(-)}$, $F^{(+)}$.

Решение

Поскольку проценты начисляются ежемесячно ($m = 12$), то время на временно́й диаграмме измеряется в месяцах: $date = 48$, а) $date^{(-)} = 24$, б) $date^{(+)} = 60$.

Временна́я диаграмма имеет следующий вид:

0	24	48	60
		600	
	$F^{(-)}$		
			$F^{(+)}$

Определяем число периодов начисления n и искомые суммы:

а) $n = 24$, $F^{(-)} = 600(1 + 0{,}01)^{-24} = 472{,}539$ (тыс. руб.);

б) $n = 12$, $F^{(+)} = 600(1 + 0{,}01)^{12} = 676{,}095$ (тыс. руб.).

РАНХиГС
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Пример 5

Вексель на 500 тыс. руб. со сложным процентом, начисляемым ежеквартально по годовой номинальной ставке 6%, должен быть погашен через три года. Какая сумма, полагающаяся через восемь лет, эквивалентна этой сумме при ставке 7% с начислением процентов по полугодиям?

Дано: $P = 500$; $j_4^{(1)} = 0{,}06$; $t = 3$; $t^{(+)} = 8$; $j_2^{(1)} = 0{,}07$.

Найти: $F^{(+)}$.

Решение

Сначала определим исходную сумму F, равную сумме S к погашению векселя:

$$F = S = 500\left(1+\frac{0{,}06}{4}\right)^{12} = 597{,}809 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Теперь найдем эквивалентный платеж $F^{(+)}$.

Поскольку проценты начисляются по полугодиям ($m = 2$), то время на временнóй диаграмме измеряется в полугодиях: *date* = 6, $date^{(+)} = 16$.

Временнáя диаграмма имеет вид

0	6	16
	597,809	
		$F^{(+)}$

Определяем число периодов начисления — $n = 10$ и искомые суммы:

$$F^{(+)} = 597{,}809\left(1+\frac{0{,}07}{2}\right)^{10} = 843{,}269 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Пример 6

Определим величину нового срока, если платеж в 200 тыс. руб. через пять лет заменяется платежом в 300 тыс. руб. и используется сложная процентная ставка 15%.

Дано: $F = 200$; $t = 5$; $F^{(+)} = 300$; $j_1 = 0{,}15$.

Найти: $date^{(+)}$.

Решение

Поскольку проценты начисляются ежегодно ($m = 1$), то время на временнóй диаграмме измеряется в годах: $date = 5$.

Временнáя диаграмма имеет вид

0	5	$date^{(+)}$
	200	
		300

Определяем число периодов начисления n: $n = date^{(+)} - 5$.

Используем соотношение эквивалентности платежей:

$$200(1+0{,}15)^{date^{(+)}-5} = 300.$$

Решая это уравнение, находим искомую дату $date^{(+)}$:

$$date^{(+)} - 5 = \log_{1,15}1{,}5 = 2{,}901;\ date^{(+)} = 5 + 2{,}901 = 7{,}901 \text{ (года).}$$

РАНХиГС
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Консолидация потока платежей

Консолидация потока платежей – это замена данного потока платежей консолидированным платежом этого потока.

Дата выплаты консолидированного платежа называется *средней (эквивалентной) датой*.

Консолидация потока платежей (продолжение)

▷▷ *Постановка задачи*

Дано:

$F_1, F_2, ..., F_k$ — размеры платежей;

$date_1, date_2, ..., date_k$ — моменты платежей;

i — процентная ставка за период начисления процентов;

$date$ — момент консолидированного платежа.

Требуется определить консолидированный платеж F данного потока платежей в момент времени $date$.

РАНХиГС
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации

Консолидация потока платежей (окончание)

▶▶ *Решение задачи*

Строится временна́я диаграмма:

$date_1$	$date_2$	$date$	$date_k$
n_1	n_2		n_k
F_1	F_2		F_k
		F	

В этой диаграмме удобно ввести вспомогательную строку, которая содержит n_i, $i = 1, \ldots, k$, — число периодов начисления между моментами $date_i$ и $date$.

Для каждого платежа находится эквивалентный ему платеж на момент $date$:

$$F_1(1+i)^{n_1},\ F_2(1+i)^{n_2}, \ldots, F_k(1+i)^{-n_k}.$$

Искомый консолидированный платеж равен сумме этих платежей:

$$F = F_1(1+i)^{n_1} + F_2(1+i)^{n_2} + \ldots + F_k(1+i)^{-n_k}. \blacktriangleleft\blacktriangleleft$$

Пример 7

Три платежа в 300 тыс., 100 тыс. и 150 тыс. руб. со сроками выплат соответственно через год, два с половиной года и четыре года заменяются одним платежом, выплачиваемым через три года, при этом используется сложная процентная ставка 14% годовых. Найдем величину консолидированного платежа, если проценты начисляются: а) ежегодно; б) ежеквартально.

Дано: $F_1 = 300$; $F_2 = 100$; $F_3 = 150$; $t_1 = 1$; $t_2 = 2{,}5$; $t_3 = 4$; $t = 3$; $j_m = 0{,}14$; а) $m = 1$; б) $m = 4$.

Найти: F.

Пример 7 (решение а)

а) $m = 1$. Временна́я диаграмма имеет вид

1	2,5	3	4
2	0,5		1
300	100		150
		F	

Последовательность платежей, приведенных на искомую дату:

$$300(1+0{,}14)^2,\ 100(1+0{,}14)^{0{,}5},\ 150(1+0{,}14)^{-1}.$$

Уравнение эквивалентности платежей на эту дату:

$$F = 300(1+0{,}14)^2 + 100(1+0{,}14)^{0{,}5} + 150(1+0{,}14)^{-1}.$$

Искомый платеж: $F = 628{,}235$.

РАНХиГС
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации

Пример 7 (решение б)

б) $m = 4$. Временна́я диаграмма имеет вид

4	10	12	16
8	2		4
300	100		150
		F	

Последовательность платежей, приведенных на искомую дату:

$$300\left(1+\frac{0,14}{4}\right)^{8},\ 100\left(1+\frac{0,14}{4}\right)^{2},\ 150\left(1+\frac{0,14}{4}\right)^{-4}.$$

Уравнение эквивалентности платежей на эту дату:

$$F=300\left(1+\frac{0,14}{4}\right)^{8}+100\left(1+\frac{0,14}{4}\right)^{2}+150\left(1+\frac{0,14}{4}\right)^{-4}.$$

Искомый платеж: $F = 632{,}973$.

Замена данного потока платежей другим потоком платежей

▷▷ *Постановка задачи*

Дано:

$F_1^{(1)}, F_2^{(1)}, \dots, F_{k_1}^{(1)}$ – размеры платежей данного потока платежей;

$date_1^{(1)}, date_2^{(1)}, \dots, date_{k_1}^{(1)}$ – моменты платежей данного потока платежей;

i – процентная ставка за период начисления процентов;

$date_1^{(2)}, date_2^{(2)}, \dots, date_{k_2}^{(2)}$ – моменты платежей $F_1^{(2)}, F_2^{(2)}, \dots, F_{k_2}^{(2)}$ потока, эквивалентного данному потоку платежей.

Требуется определить размеры платежей $F_1^{(2)}, F_2^{(2)}, \dots, F_{k_2}^{(2)}$.

Замена данного потока платежей другим потоком платежей (продолжение)

▶▶ *Решение задачи*

Для однозначного решения этой задачи обычно задаются дополнительные условия, в частности соотношения между размерами платежей, например их равенство между собой. Иногда известна часть платежей, а другую часть надо найти.

Искомый поток платежей определяется на основе уравнения эквивалентности рассматриваемых платежей в следующей последовательности.

1. Строится совмещенная временна́я диаграмма, включающая все платежи обоих потоков.

РАНХиГС
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Замена данного потока платежей другим потоком платежей (продолжение)

Ниже приводится возможный вариант такой диаграммы.

$date_1$	$date_2$	$date_3$	$date_4$	...	$date_{k-1}$	$date_k$
n_1	n_2	n_3	n_4		n_{k-1}	n_k
$F_1^{(1)}$		$F_2^{(1)}$		...		$F_{k_1}^{(1)}$
	$F_1^{(2)}$		$F_2^{(2)}$	...	$F_{k_2}^{(2)}$	

На диаграмме отражены $date_1$, $date_2$, ..., $date_k$ — даты всех платежей обоих потоков; n_1, n_2, ..., n_k — число периодов начисления процентов до даты $date_k$.

Замена данного потока платежей другим потоком платежей (окончание)

2. Устанавливается дата сравнения потоков платежей.

Чаще всего выбирают общую начальную $date_1$ или конечную дату $date_k$.

3. Для каждого потока определяется консолидированный платеж на установленную дату сравнения.

4. Составляется уравнение эквивалентности в виде равенства консолидированных платежей.

В частности, для приведенной временно́й диаграммы уравнение эквивалентности с датой сравнения на момент последнего платежа имеет вид

$$F_1^{(1)}(1+i)^{n_1} + F_2^{(1)}(1+i)^{n_3} + \ldots + F_{k_1}^{(1)}(1+i) =$$

$$= F_1^{(2)}(1+i)^{n_2} + F_2^{(2)}(1+i)^{n_4} + \ldots + F_{k_2}^{(2)}(1+i).$$

5. Искомые платежи определяются путем решения уравнения эквивалентности с учетом заданных дополнительных условий. ◄◄

РАНХиГС
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Пример 8

Поток платежей из трех выплат 100 тыс. руб. через два года, 200 тыс. руб. через 3,5 года и 300 тыс. руб. через пять лет заменяется двумя одинаковыми платежами в начале и конце срока. Найдем эти платежи, если годовая процентная ставка равна 8%.

Дано: $F_1^{(1)} = 100; t_1^{(1)} = 2;$ $F_2^{(1)} = 200;$ $t_2^{(1)} = 3,5;$ $F_3^{(1)} = 300;$ $t_3^{(1)} = 5;$ $t_1^{(2)} = 0;$ $t_2^{(2)} = 5;$ $j_1 = 0,08;$ $F_1^{(2)} = F_2^{(2)} = F^{(2)}$.

Найти: $F^{(2)}$.

Решение

Здесь первая серия платежей состоит из трех платежей, вторая — из двух платежей. Дополнительным условием является условие равенства платежей искомого потока платежей.

Временна́я диаграмма имеет вид

0	2	3,5	5
	100	200	300
$F^{(2)}$			$F^{(2)}$

В качестве даты сравнения используем начальную дату. Уравнение эквивалентности потоков платежей имеет вид

$$F^{(2)} + F^{(2)}(1+0,08)^{-5} = 100(1+0,08)^{-2} + 200(1+0,08)^{-3,5} + 300(1+0,08)^{-5},$$

откуда $F^{(2)} = 263,410$ тыс. руб.

Рассрочка платежа

Рассрочка платежа – это замена одного платежа эквивалентным ему потоком платежей.

Этот вариант конверсии платежей можно рассматривать как частный случай предыдущего варианта при условии, что первый поток состоит из одного платежа.

Рассрочка платежа (окончание)

▷▷ *Постановка задачи*

Дано:

F — размер платежа;

$date$ — момент платежа;

i — процентная ставка за период начисления процентов;

$date_1$, $date_2$, ..., $date_k$ — моменты платежей F_1, F_2, ..., F_k потока, эквивалентного исходному платежу.

Требуется определить размеры платежей F_1, F_2, ..., F_k.

▶▶ *Решение задачи*

1. Строится временна́я диаграмма:

$date_1$	$date_2$	$date$	$date_k$
n_1	n_2		n_k
		F	
F_1	F_2		F_k

2. Составляется уравнение эквивалентности на дату исходного платежа:

$$F = F_1(1+i)^{n_1} + F_2(1+i)^{n_2} + \ldots + F_k(1+i)^{-n_k}.$$

3. Искомые платежи потока определяются из этого уравнения с учетом дополнительных условий. ◀◀

Пример 9

Строительная фирма получила в банке долгосрочный кредит в размере 5 млн руб. под 16% годовых, срок погашения через пять лет. Впоследствии стороны пересмотрели условия займа и выработали новые: через три года производится выплата 3 млн руб., а остальная сумма выплачивается через четыре года после первой выплаты. Определим сумму окончательного платежа.

Дано: $F^{(1)} = 5$; $t^{(1)} = 0$; $F_1^{(2)} = 3$; $t_1^{(2)} = 3$; $t_2^{(2)} = 7$; $j_1 = 0{,}16$.
Найти: $F_2^{(2)}$.

Решение

Дополнительное условие состоит в том, что известен один из двух платежей искомого потока платежей.

Временна́я диаграмма имеет вид

0	3	7
5		
	3	$F_2^{(2)}$

В качестве даты сравнения используем начальную дату. Имеем

$$5 = 3(1+0{,}16)^{-3} + F_2^{(2)}(1+0{,}16)^{-7},$$

откуда $F_2^{(2)} = 8{,}699$ млн руб.