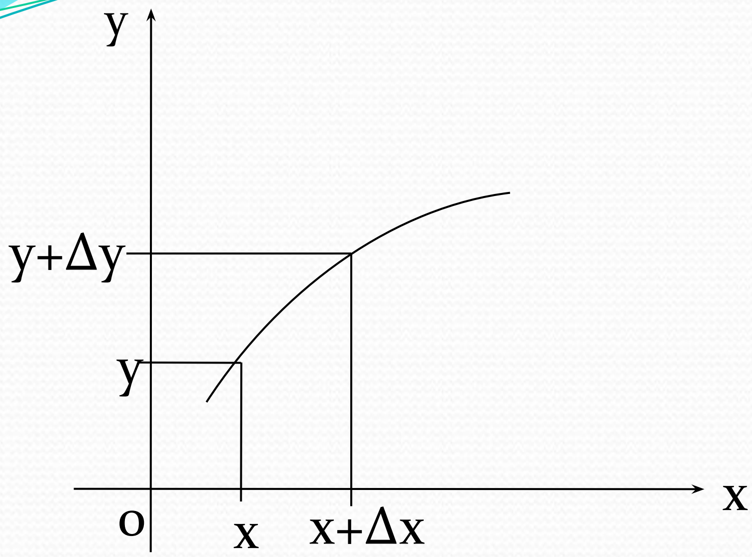
Дифференциальные исчисления функции одной независимой переменной

Рассмотрим функцию y=f(x)



Δx – приращение аргумента;

Δy – приращение функции

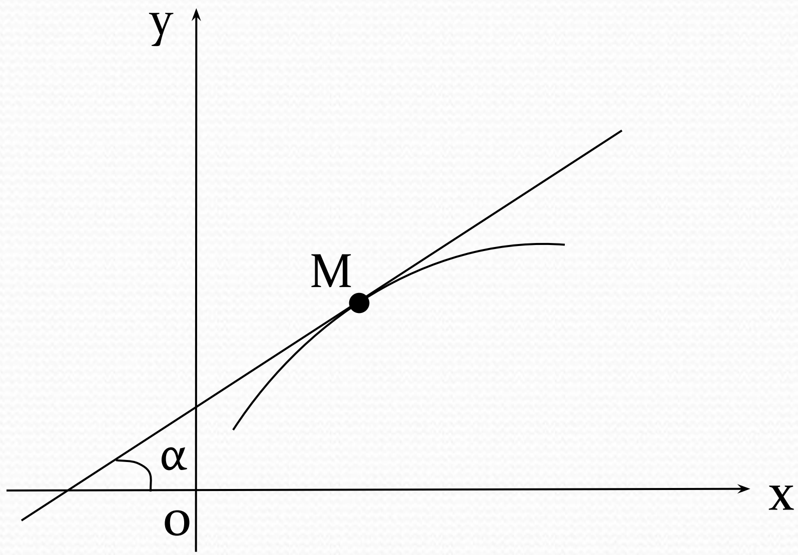
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

<u>Производной</u> называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, при стремлении последнего к нулю.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)}{\Delta x} - f(x)$$

Геометрический смысл производной



$$y = f(x)$$

$$y'(x_0) = tg\alpha$$

Производная, найденная в точке x_o равна углу наклона касательной с положительным направлением оси Ox.

Уравнение касательной

$$y - y_{0=}y'(x_0)(x - x_0)$$

x_o, y_o – координаты точки касания

ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

1. ***Производная константы***

$$c' = 0$$ С - константа

2. ***Производная суммы равна сумме производных***

$$(u + v)' = u' + v'$$

3. ***Производная разности равна разности производных***

$$(u - v)' = u' - v'$$

4. ***Производная произведения***

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

5. ***Производная частного***

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v + u \cdot v'}{v^2}$$

6. ***Производная сложной функции***

$$f(u(x)) = f(u)' \cdot u(x)'$$

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$
2. $(x)' = 1$
3. $(e^x)' = e^x$
4. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
5. $(\sin x)' = \cos x$
6. $(\cos x)' = -\sin x$
7. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
8. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

10. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

11. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

12. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$

13. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

Производная сложной функции

u=f[g(x)]

1. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
2. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
4. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
5. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
6. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$

7. $$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$$

8. $$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$$

9. $$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

10. $$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

11. $$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

12. $$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

Производная высших порядков

Производной второго порядка называется производная от первой производной.

$$y'' = (y')'$$

Производной третьего порядка называется производная от второй производной.

$$y''' = (y'')'$$

$$y'''' = (y''')'$$

$$y^{(n)} = (y^{n-1})'$$

ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Теорема. Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует в указанном смысле.

Итак, если имеется неопределенность $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, то

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$