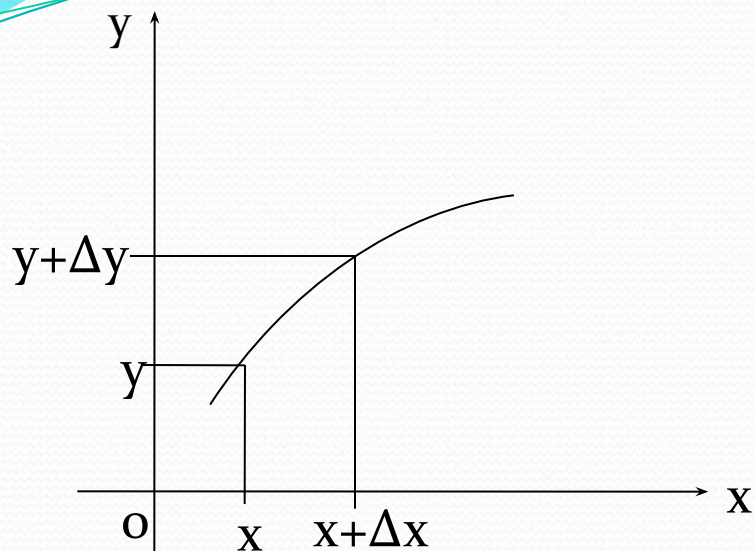


*Дифференциальные исчисления
функции одной независимой
переменной*

Рассмотрим функцию $y=f(x)$



Δx – приращение аргумента;

Δy – приращение функции

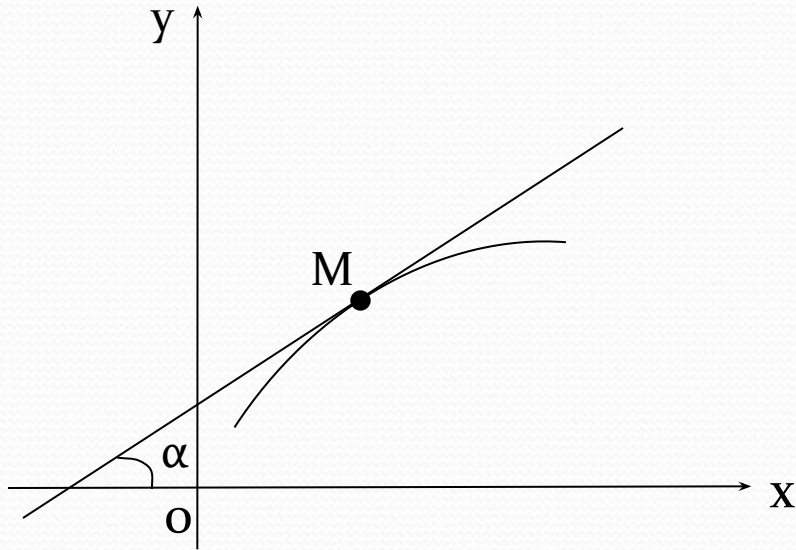
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Производной называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, при стремлении последнего к нулю.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Геометрический смысл производной



$$y = f(x)$$

$$y'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

Производная, найденная в точке x_0 равна углу наклона касательной с положительным направлением оси Ox .

Уравнение касательной

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$

x_0, y_0 – координаты точки касания

ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

1. Производная константы

$$c' = 0 \quad c - \text{константа}$$

2. Производная суммы равна сумме производных

$$(u + v)' = u' + v'$$

3. Производная разности равна разности производных

$$(u - v)' = u' - v'$$

4. Производная произведения

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

5. Производная частного

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v + u \cdot v'}{v^2}$$

6. Производная сложной функции

$$f(u(x))' = f(u)' \cdot u(x)'$$

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

$$1. (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$2. (x)' = 1$$

$$3. (e^x)' = e^x$$

$$4. (a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$5. (\sin x)' = \cos x$$

$$6. (\cos x)' = -\sin x$$

$$7. (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$8. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$9. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$10. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$11. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$12. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$13. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Производная сложной функции

$$u=f[g(x)]$$

$$1. (u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$

$$2. (e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$3. (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$$

$$4. (\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$5. (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

$$6. (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$7. (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$$

$$8. (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$$

$$9. (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$10. (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$11. (\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

$$12. (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

Производная высших порядков

Производной второго порядка называется производная от первой производной.

$$y'' = (y')'$$

Производной третьего порядка называется производная от второй производной.

$$y''' = (y'')'$$

$$y'''' = (y''')'$$

$$y^{(n)} = (y^{n-1})'$$

ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Теорема. Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует в указанном смысле.

Итак, если имеется неопределенность $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, то

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$