# Элементы комбинаторики, теория множеств и математической логики

# Логические переменные и логические операции

Простые высказывания в алгебре логики обозначаются заглавными латинскими буквами: ***A, B, C, D,*** … и т. д.

Составные высказывания на естественном языке образуются с помощью **союзов**. В алгебре логики эти союзы заменяются **логическими операциями**. В соответствии с алгеброй логики любое составное высказывание можно рассматривать как логическую функцию ***F(A, B, C, …)*.**

*Например:  F(A,B)= A and B*

Логические функции и логические переменные (аргументы) принимают только два значения: «истина», которая обозначается логической единицей – 1 и «ложь», обозначаемая логическим нулем – 0. Логическую функцию называют также **предикатом**.

Действия, совершаемые над логическими переменными для получения определенных логических функций, называются **логическими операциями**.

1. Логическая операция **ИНВЕРСИЯ (отрицание)**. В естественных языках соответствует словам ***неверно, ложь*** или частице ***не,*** в языках программирования обозначается ***Not,*** в алгебре логи $\overline{A}$. обозначается

Результат отрицания всегда противоположен значению аргумента.

| $A$ | $\overline{A}$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

*Например:*

F=not(A)

F= ¬ A

F= $\overline{A}$

*2.* Логическая операция **КОНЪЮНКЦИЯ (логическое умножение)**. В *естественных языках* соответствует союзу «***И***» , в *языках программирования* обозначается «***And***» , в алгебре логики обозначается «**&**» или «**Λ**» , или « · » .

Конъюнкция каждым простым высказываниям ставит в соответствие составное высказывание, являющееся только тогда истинным, когда являются истинными простые высказывания, образующие составное высказывание.

Математическая запись данной операции для логических переменных ***A, B, C,*** … будет иметь вид: ***F = A & B & C & …***

| A | B | F=A&B | F=A · B |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

| A | B | F=A&B |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

***Пример:***

Дана функция F(A, B, C) = A ∧ B ∧ C.

Определить значение логической функции при условии, что значения переменных *A* и *B* истинны, а переменной *C* – ложно.

| A | B | F=A&B |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

***Пример:***

Дана функция F(A, B, C) = A ∧ B ∧ C.

Определить значение логической функции при условии, что значения переменных *A* и *B* истинны, а переменной *C* – ложно.

A=1

B=1

C=0

F(A, B, C) = A ∧ B ∧ C = 1 ∧ 1 ∧ 0 = 0

3. Логическая операция **ДИЗЪЮНКЦИЯ (логическое сложение)**. В естественных языках соответствует союзу ***«ИЛИ»***, в языках программирования обозначается ***«Or»***, в алгебре логики обозначается **«V»** или **«+»**.

Дизъюнкция каждым простым высказываниям ставит в соответствие составное высказывание, являющееся только тогда истинным, когда хотя бы одно из образующих его высказываний является истинным.

Математическая запись данной операции для логических переменных ***A, B, C,*** … будет иметь вид:

***F = A V B V C …***

| A | B | F=A V B | F=A + B |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

***Пример:***

Дана функция F(A, B, C) = A V B V C.

Определить значение логической функции при условии, что значение переменных *A* и *B* ложны, а переменной *C* – истинно.

| A | B | F=A V B |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

***Пример:***

Дана функция F(A, B, C) = A V B V C.

Определить значение логической функции при условии, что значение переменных *A* и *B* ложны, а переменной *C* – истинно.

| A | B | F=A V B |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

A=0

B=0

C=1

F(A, B, C) = A V B V C = 0 V 0 V 1 = 1

4. Логическая операция **ИМПЛИКАЦИЯ (логическое следование)**. В естественных языках соответствует обороту речи, «***если…, то …***» **,** в языках программирования обозначается «***IF***», в алгебре логики обозначается «→».

Импликация каждым простым высказываниям ставит в соответствие составное высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда первое высказывание истинно, а второе высказывание ложно.

Математическая запись данной операции для двух логических переменных ***A*** и ***B*** будет иметь вид:

***F = A→B.***

| A | B | F=A → B |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

***Пример:***

Дана функция F(A, B, C) = A ∨ B → C.

Определить значение логической функции при условии, что значение переменной *A* истинно, *B* – ложно, а переменной *C* – истинно.

A=1

B=0

C=1

F(A, B, C) = A ∨ B → C =

| A | B | F=A ∨ B |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

| A | B | F=A → B |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

***Пример:***

Дана функция F(A, B, C) = A V B → C.

Определить значение логической функции при условии, что значение переменной *A* истинно, *B* – ложно, а переменной *C* – истинно.

A=1

B=0

C=1

F(A, B, C) = A V B → C = 1 V 0 → 1 = 1

| A | B | F=A V B |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

| A | B | F=A → B |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

5. Логическая операция **ЭКВИВАЛЕНЦИЯ (логическая равнозначность).** В естественных языках соответствует обороту речи «***тогда и только тогда***», в алгебре логики обозначается «↔», или «≡» .

Эквиваленция каждым простым высказываниям ставит в соответствие составное высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда все простые высказывания, образующие составное высказывание, одновременно истинны или одновременно ложны.

Математическая запись данной операции для логических переменных ***A, B, C…*** будет иметь вид:

**F = A↔B ↔ C ↔ …**

| A | B | F=A ↔ B |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

***Пример:***

Дана функция F(A, B, C) = A & ¬ B ↔ C.

Определить значение логической функции при условии, что значение переменной *A* истинно, *B* – ложно, а переменной *C* – истинно.

A=1

B=0

C=1

F(A, B, C) = A & ¬ B ↔ C =

| $A$ | $\overline{A}$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

| A | B | F=A · B |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

| A | B | F=A ↔ B |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

***Пример:***

Дана функция F(A, B, C) = A & ¬ B ↔ C.

Определить значение логической функции при условии, что значение переменной *A* истинно, *B* – ложно, а переменной *C* – истинно.

A=1

B=0

C=1

F(A, B, C) = A & ¬ B ↔ C = 1 & ¬0 ↔ 1 =

= 1 & 1 ↔ 1 = 1

| $A$ | $\overline{A}$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

| A | B | F=A · B |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

| A | B | F=A ↔ B |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Для простоты записи приведем основные законы алгебры логики для двух логических переменных *A* и *B*. Эти законы распространяются и на другие логические переменные.

| Закон | для «И» | для «ИЛИ» |
|---|---|---|
| двойного отрицания | $\overline{\overline{A}} = A$ | |
| исключения третьего | $A \cdot \overline{A} = 0$ | $A + \overline{A} = 1$ |
| операции с константами | $A \cdot 1 = A,\ A \cdot 0 = 0$ | $A + 1 = 1,\quad A + 0 = A$ |
| повторения | $A \cdot A = A$ | $A + A = A$ |
| переместительный | $A \cdot B = B \cdot A$ | $A + B = B + A$ |
| сочетательный | $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ | $A + (B + C) = (A + B) + C$ |
| распределительный | $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$ | $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ |
| поглощения | $A + A \cdot B = A$ | $A \cdot (A + B) = A$ |
| законы де Моргана | $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ | $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ |

Выполним преобразование, например, логической

$$F = A + \overline{A \cdot B} + \overline{\overline{A} + B}$$

применив соответствующие законы алгебры логики.

| Закон | для «И» | для «ИЛИ» |
|---|---|---|
| двойного отрицания | $\overline{\overline{A}} = A$ | |
| исключения третьего | $A \cdot \overline{A} = 0$ | $A + \overline{A} = 1$ |
| операции с константами | $A \cdot 1 = A,\ A \cdot 0 = 0$ | $A + 1 = 1,\quad A + 0 = A$ |
| повторения | $A \cdot A = A$ | $A + A = A$ |
| переместительный | $A \cdot B = B \cdot A$ | $A + B = B + A$ |
| сочетательный | $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ | $A + (B + C) = (A + B) + C$ |
| распределительный | $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$ | $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ |
| поглощения | $A + A \cdot B = A$ | $A \cdot (A + B) = A$ |
| законы де Моргана | $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ | $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ |

Выполним преобразование, например, логической

$$F = A + \overline{A \cdot B} + \overline{\overline{A} + B}$$

применив соответствующие законы алгебры логики.

| Закон | для «И» | для «ИЛИ» |
|---|---|---|
| двойного отрицания | $\overline{\overline{A}} = A$ | |
| исключения третьего | $A \cdot \overline{A} = 0$ | $A + \overline{A} = 1$ |
| операции с константами | $A \cdot 1 = A,\ A \cdot 0 = 0$ | $A + 1 = 1,\ \ A + 0 = A$ |
| повторения | $A \cdot A = A$ | $A + A = A$ |
| переместительный | $A \cdot B = B \cdot A$ | $A + B = B + A$ |
| сочетательный | $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ | $A + (B + C) = (A + B) + C$ |
| распределительный | $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$ | $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ |
| поглощения | $A + A \cdot B = A$ | $A \cdot (A + B) = A$ |
| законы де Моргана | $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ | $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ |

С помощью законов алгебры логики можно производить равносильные преобразования логических выражений с целью их упрощения. В алгебре логики на основе принятого соглашения установлены следующие правила (приоритеты) для выполнения логических операций:
*первыми выполняются операции в скобках*, затем в следующем порядке:
*инверсия (отрицание),*
*конъюнкция ( & ),*
*дизъюнкция (v),*
*импликация (→),*
*эквиваленция (↔).*

Выполним преобразование, например, логической

$$F = A + \overline{A \cdot B} + \overline{\overline{A} + B}$$

применив соответствующие законы алгебры логики.

| Закон | для «И» | для «ИЛИ» |
|---|---|---|
| двойного отрицания | $\overline{\overline{A}} = A$ | |
| исключения третьего | $A \cdot \overline{A} = 0$ | $A + \overline{A} = 1$ |
| операции с константами | $A \cdot 1 = A,\ A \cdot 0 = 0$ | $A + 1 = 1,\ \ A + 0 = A$ |
| повторения | $A \cdot A = A$ | $A + A = A$ |
| переместительный | $A \cdot B = B \cdot A$ | $A + B = B + A$ |
| сочетательный | $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ | $A + (B + C) = (A + B) + C$ |
| распределительный | $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$ | $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ |
| поглощения | $A + A \cdot B = A$ | $A \cdot (A + B) = A$ |
| законы де Моргана | $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ | $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ |

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

Выполним преобразование, например, логической

$$F = A + \overline{A \cdot B} + \overline{\overline{A} + B}$$

применив соответствующие законы алгебры логики.

| Закон | для «И» | для «ИЛИ» |
|---|---|---|
| двойного отрицания | $\overline{\overline{A}} = A$ | |
| исключения третьего | $A \cdot \overline{A} = 0$ | $A + \overline{A} = 1$ |
| операции с константами | $A \cdot 1 = A,\ A \cdot 0 = 0$ | $A + 1 = 1,\quad A + 0 = A$ |
| повторения | $A \cdot A = A$ | $A + A = A$ |
| переместительный | $A \cdot B = B \cdot A$ | $A + B = B + A$ |
| сочетательный | $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ | $A + (B + C) = (A + B) + C$ |
| распределительный | $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$ | $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ |
| поглощения | $A + A \cdot B = A$ | $A \cdot (A + B) = A$ |
| законы де Моргана | $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ | $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ |

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$\overline{\overline{A} + B} = \overline{\overline{A}} \cdot \overline{B} = A \cdot \overline{B}$$

Выполним преобразование, например, логической

$$F = A + \overline{A \cdot B} + \overline{\overline{A} + B}$$

применив соответствующие законы алгебры логики.

| Закон | для «И» | для «ИЛИ» |
|---|---|---|
| двойного отрицания | $\overline{\overline{A}} = A$ | |
| исключения третьего | $A \cdot \overline{A} = 0$ | $A + \overline{A} = 1$ |
| операции с константами | $A \cdot 1 = A,\ A \cdot 0 = 0$ | $A + 1 = 1,\quad A + 0 = A$ |
| повторения | $A \cdot A = A$ | $A + A = A$ |
| переместительный | $A \cdot B = B \cdot A$ | $A + B = B + A$ |
| сочетательный | $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ | $A + (B + C) = (A + B) + C$ |
| распределительный | $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$ | $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ |
| поглощения | $A + A \cdot B = A$ | $A \cdot (A + B) = A$ |
| законы де Моргана | $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ | $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ |

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$\overline{\overline{A} + B} = \overline{\overline{A}} \cdot \overline{B} = A \cdot \overline{B} \rightarrow F = A + \overline{A} + \overline{B} + A \cdot \overline{B}$$

Выполним преобразование, например, логической

$$F = A + \overline{A \cdot B} + \overline{\overline{A} + B}$$

применив соответствующие законы алгебры логики.

| Закон | для «И» | для «ИЛИ» |
|---|---|---|
| двойного отрицания | $\overline{\overline{A}} = A$ | |
| исключения третьего | $A \cdot \overline{A} = 0$ | $A + \overline{A} = 1$ |
| операции с константами | $A \cdot 1 = A,\ A \cdot 0 = 0$ | $A + 1 = 1,\ \ A + 0 = A$ |
| повторения | $A \cdot A = A$ | $A + A = A$ |
| переместительный | $A \cdot B = B \cdot A$ | $A + B = B + A$ |
| сочетательный | $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ | $A + (B + C) = (A + B) + C$ |
| распределительный | $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$ | $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ |
| поглощения | $A + A \cdot B = A$ | $A \cdot (A + B) = A$ |
| законы де Моргана | $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ | $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ |

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$\overline{\overline{A} + B} = \overline{\overline{A}} \cdot \overline{B} = A \cdot \overline{B} \rightarrow F = A + \overline{A} + \overline{B} + A \cdot \overline{B}$$

$$A + \overline{A} = 1$$

Выполним преобразование, например, логической

$$F = A + \overline{A \cdot B} + \overline{\overline{A} + B}$$

применив соответствующие законы алгебры логики.

| Закон | для «И» | для «ИЛИ» |
|---|---|---|
| двойного отрицания | $\overline{\overline{A}} = A$ | |
| исключения третьего | $A \cdot \overline{A} = 0$ | $A + \overline{A} = 1$ |
| операции с константами | $A \cdot 1 = A$, $A \cdot 0 = 0$ | $A + 1 = 1$, $A + 0 = A$ |
| повторения | $A \cdot A = A$ | $A + A = A$ |
| переместительный | $A \cdot B = B \cdot A$ | $A + B = B + A$ |
| сочетательный | $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ | $A + (B + C) = (A + B) + C$ |
| распределительный | $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$ | $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ |
| поглощения | $A + A \cdot B = A$ | $A \cdot (A + B) = A$ |
| законы де Моргана | $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ | $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ |

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$\overline{\overline{A} + B} = \overline{\overline{A}} \cdot \overline{B} = A \cdot \overline{B} \rightarrow F = A + \overline{A} + \overline{B} + A \cdot \overline{B}$$

$$A + \overline{A} = 1$$

1

$$\overline{B} + A \cdot \overline{B} = \overline{B}(1 + A) = \overline{B}$$

Выполним преобразование, например, логической

$$F = A + \overline{A \cdot B} + \overline{\overline{A} + B}$$

применив соответствующие законы алгебры логики.

| Закон | для «И» | для «ИЛИ» |
|---|---|---|
| двойного отрицания | $\overline{\overline{A}} = A$ | |
| исключения третьего | $A \cdot \overline{A} = 0$ | $A + \overline{A} = 1$ |
| операции с константами | $A \cdot 1 = A$ , $A \cdot 0 = 0$ | $A + 1 = 1$, $A + 0 = A$ |
| повторения | $A \cdot A = A$ | $A + A = A$ |
| переместительный | $A \cdot B = B \cdot A$ | $A + B = B + A$ |
| сочетательный | $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ | $A + (B + C) = (A + B) + C$ |
| распределительный | $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$ | $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ |
| поглощения | $A + A \cdot B = A$ | $A \cdot (A + B) = A$ |
| законы де Моргана | $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ | $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ |

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$\overline{\overline{A} + B} = \overline{\overline{A}} \cdot \overline{B} = A \cdot \overline{B} \rightarrow F = A + \overline{A} + \overline{B} + A \cdot \overline{B}$$

$$A + \overline{A} = 1$$

$$\overline{B} + A \cdot \overline{B} = \overline{B}(1 + A) = \overline{B} \rightarrow F = 1 + \overline{B} = 1$$

$$F = A \vee \overline{A\&B} \vee \overline{\overline{A} \vee B}$$

$$F = A \vee \overline{A \,\&\, B} \vee \overline{\overline{A} \vee B} = A \vee \overline{A} \vee \overline{B} \vee A \,\&\, \overline{B} =$$

$$= (A \vee \overline{A}) \vee \overline{B}(1 \vee A) = 1 \vee \overline{B} = 1.$$

# Логические функции и таблицы истинности

**Таблица истинности** состоит из двух частей. ***Первая (левая) часть*** относится к логическим переменным и содержит полный перечень возможных комбинаций логических переменных *A, B, C…* и т. д. ***Вторая (правая) часть*** этой таблицы определяет выходные состояния как логическую функцию от комбинаций входных величин.

| *A* | *B* | *C* | $F = A \vee B \vee C$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Видеоролик :
https://www.youtube.com/watch?v=R5iuMQFPmI8

Таблицу истинности можно составить для любой логической функции

| $A$ | $B$ | $C$ | $F = A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Видеоролик :
https://www.youtube.com/watch?v=R5iuMQFPmI8

| A | B | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | $F_5$ | $F_6$ | $F_7$ | $F_8$ | $F_9$ | $F_{10}$ | $F_{11}$ | $F_{12}$ | $F_{13}$ | $F_{14}$ | $F_{15}$ | $F_{16}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Функция $F_1 = 0$ и называется функцией константы нуля, или генератора нуля.

Функция $F_2 = A \,\&\, B$ называется функцией конъюнкции.

Функция $F_3 = A \,\&\, \overline{B}$ называется функцией запрета по логической переменной *A*.

Функция $F_4 = A$ называется функцией повторения по логической переменной *A*.

Функция $F_5 = \overline{A} \,\&\, B$ называется функцией запрета по логической переменной *B*.

Функция $F_6 = B$ называется функцией повторения по логической переменной *B*.

Функция $F_7 = \overline{A} \,\&\, B \vee A \,\&\, \overline{B}$ называется функцией исключающее «ИЛИ».

Функция $F_8 = A \vee B$ называется функцией дизъюнкции.

Функция $F_9 = \overline{A \vee B}$ называется функцией Пирса.

Функция $F_{10} = A \,\&\, B \;\; \overline{A} \,\&\, \overline{B}$ называется функцией эквиваленции.

Функция $F_{11} = \overline{B}$ называется функцией отрицания (инверсии) по логической переменной *B*.

Функция $F_{12} = B \rightarrow A$ называется функцией импликации .

Функция $F_{13} = \overline{A}$ называется функцией отрицания (инверсии) по логической переменной *A*.

Функция $F_{14} = A \rightarrow B$ называется функцией импликации.

Функция $F_{15} = \overline{A \,\&\, B}$ называется функцией Шеффера.

Функция $F_{16} = 1$ называется функцией генератора 1.

Операцию замены одной логической функции другой в алгебре логики называют операцией **суперпозиции** или **методом суперпозиции**.

Например, функцию Шеффера можно выразить при помощи логических функций дизъюнкции и отрицания, используя закон де Моргана:

$$F_{15} = \overline{A \,\&\, B} = \bar{A} \vee \bar{B}.$$

Логические функции, с помощью которых можно выразить другие логические функции методом суперпозиции, называются **базовыми логическими функциями.**

На практике наиболее широко в качестве такого набора используют три логических функции: ***конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание***.

В компьютерах все вычисления выполняются с помощью ***логических элементов*** – электронных схем, выполняющих логические операции.

1. ***Логический элемент НЕ***, который называется также инвертором, выполняет логическую операцию отрицания (инверсии).

*Графическое обозначение*

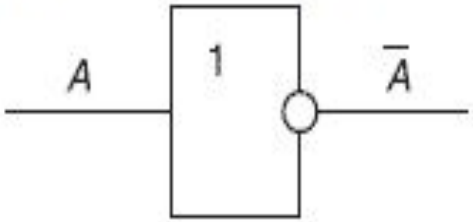



*Таблица истинности*

| $A$ | $F=\bar{A}$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

2. ***Логический элемент И***, называемый также конъюнктором, выполняет операцию логического умножения (конъюнкции), теоретически может иметь бесконечное число входов, на практике ограничиваются числом входов от двух до восьми.

*Графическое обозначение двухвходового элемента И*

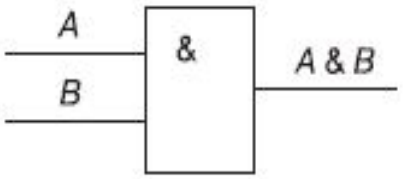



*Таблица истинности*

| *A* | *B* | *F = A & B* |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

3. ***Логический элемент ИЛИ***, называемый также дизъюнктором, выполняет операцию логического сложения (дизъюнкции), теоретически может иметь бесконечное число входов, на практике ограничиваются числом входов от двух до восьми.

*Графическое обозначение двухвходового элемента ИЛИ*

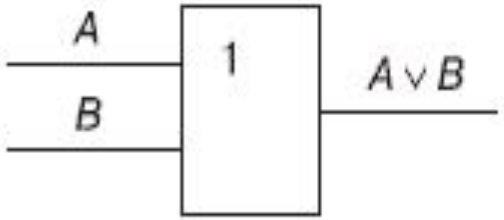


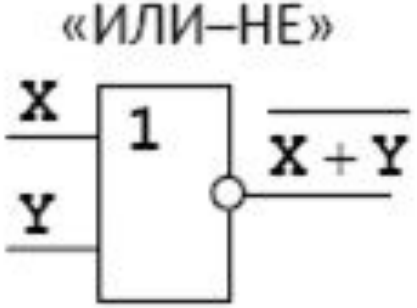

*Таблица истинности*

| A | B | F = A ∨ B |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

В вычислительной технике также часто используется операция ***исключающее ИЛИ*** (XOR), которая отличается от обыкновенного ИЛИ только при X=1 и Y=l.

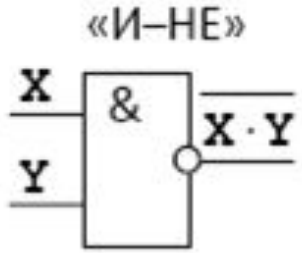
$$F = \overline{X + Y}$$

| X | Y | X XOR Y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |




$$F = \overline{X \cdot Y}$$

| X | Y | NOT(X AND Y) |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |



# Памятка

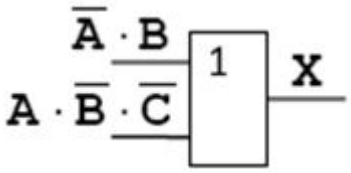
<table>
<tr><th>Линия сравнения</th><th>Инверсия</th><th>Конъюнкция</th><th>Дизъюнкция</th><th>Импликация</th><th>Эквивалентность</th></tr>
<tr><td>Название</td><td>отрицание</td><td>логическое умножение</td><td>логическое сложение</td><td>логическое следование</td><td>логическое равенство</td></tr>
<tr><td>Обозначение</td><td>$\overline{A}$ или $\neg A$</td><td>$A \wedge B$ или $A \cdot B$</td><td>$A \vee B$ или $A + B$</td><td>$A \to B$</td><td>$A \leftrightarrow B$</td></tr>
<tr><td>Союз</td><td>не</td><td>и</td><td>или</td><td>если А, то В; когда А, тогда В</td><td>А тогда и только тогда, когда В</td></tr>
<tr><td>Истинность результата операции</td><td>когда исходное высказывание ложно</td><td>когда истины одновременно высказывания А и В</td><td>когда истинно А, либо В, либо А и В</td><td>всегда, кроме случая, когда А истинно, а В ложно</td><td>когда А и В одновременно истинно или одновременно ложны</td></tr>
<tr><td>Таблицы истинности</td><td>
<table>
<tr><th>A</th><th>¬A</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td></tr>
</table>
</td><td>
<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>$A \wedge B$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>
</td><td>
<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>$A \vee B$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>
</td><td>
<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>$A \to B$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>
</td><td>
<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>$A \leftrightarrow B$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Составим схему, соответствующую выражению

$$X = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$

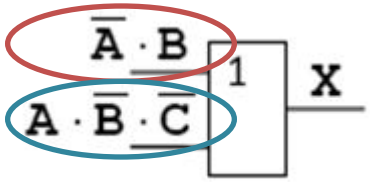
Составим схему, соответствующую выражению

$$X = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$

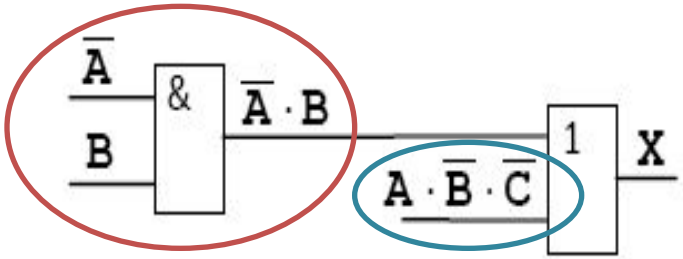


Составим схему, соответствующую выражению

$$X = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$

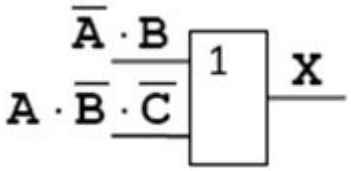



Добавляем элемент

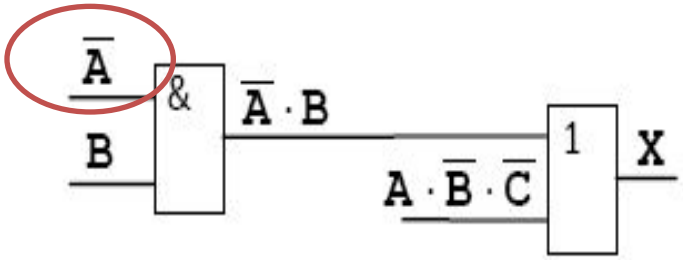


Составим схему, соответствующую выражению

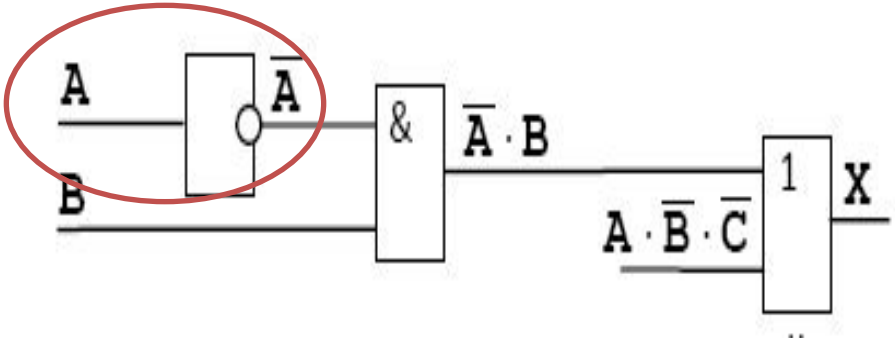
$$X = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$

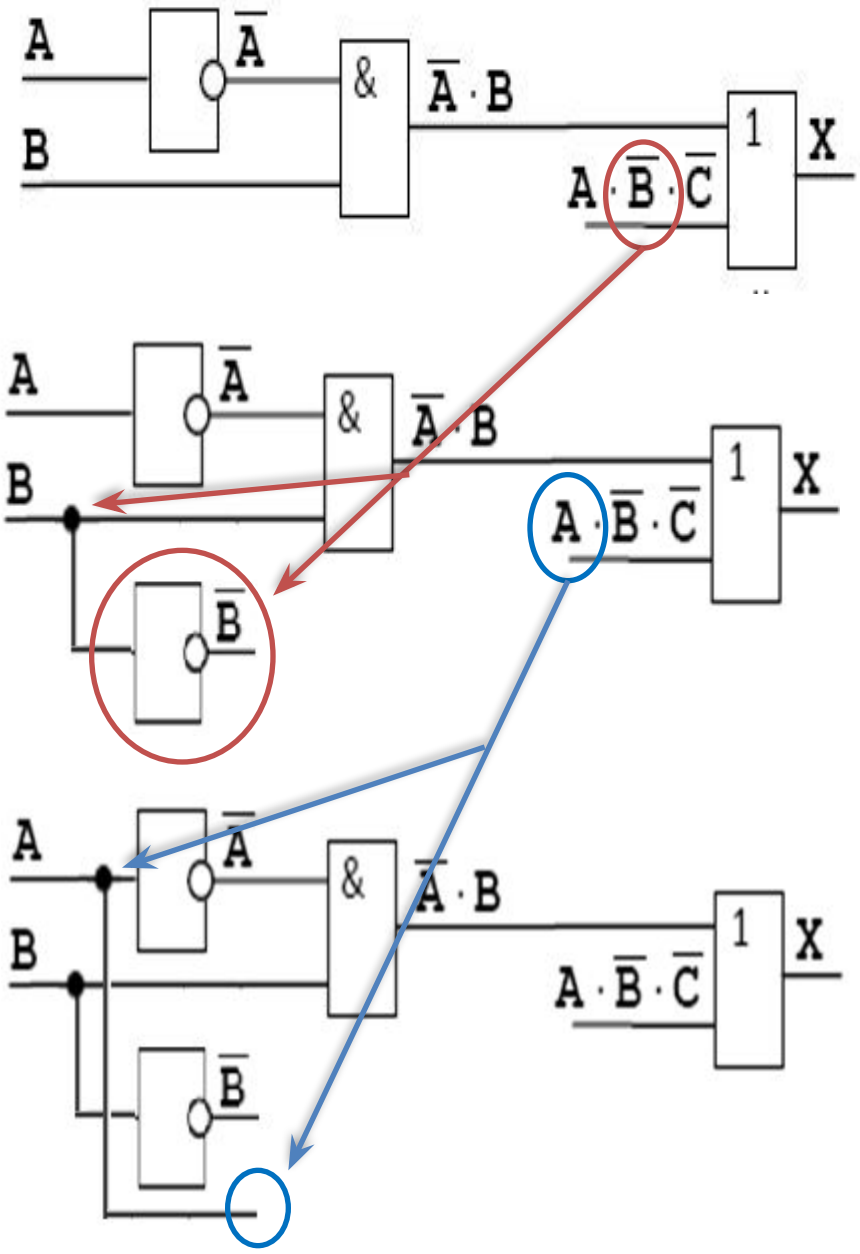


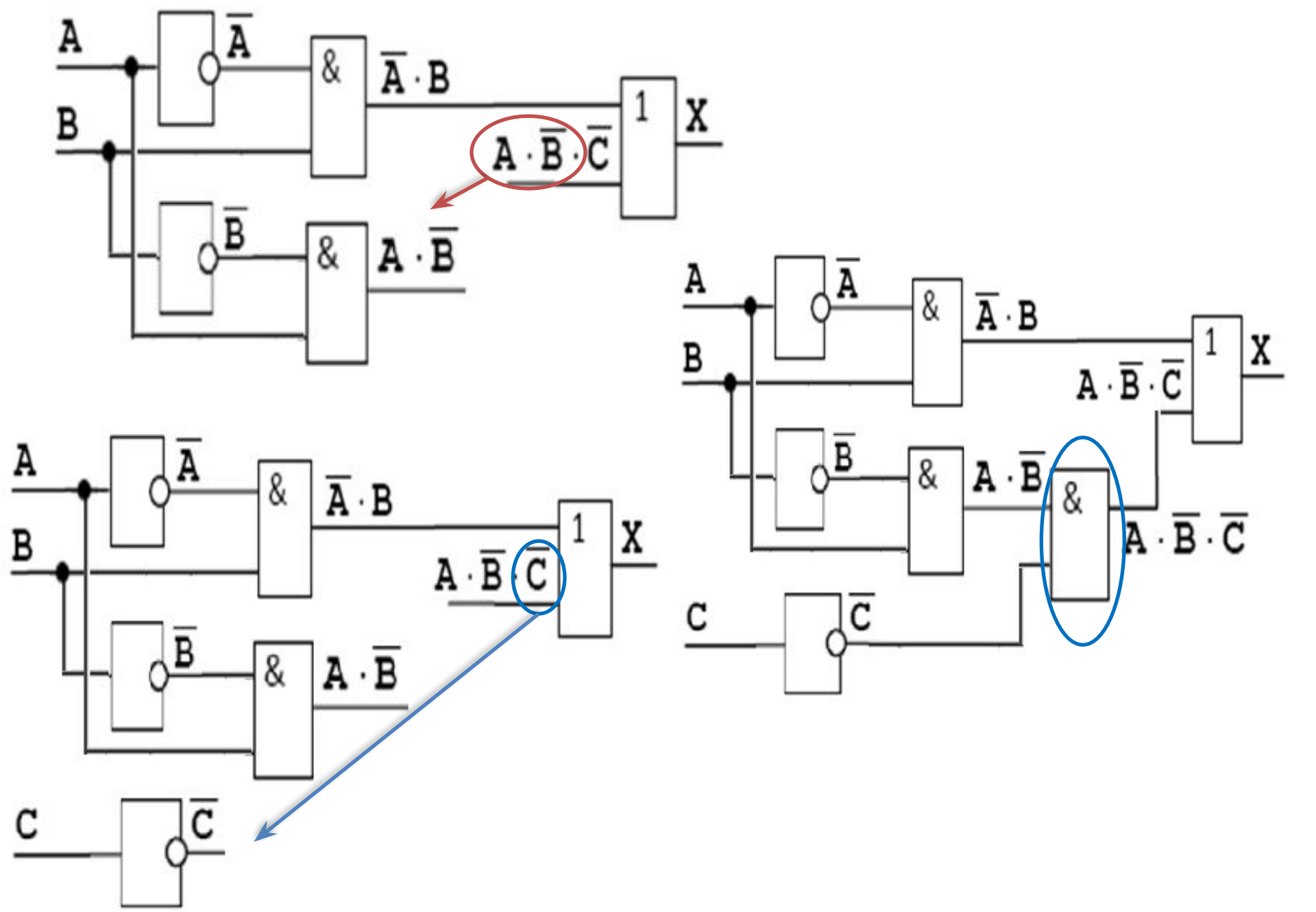

Добавляем элемент



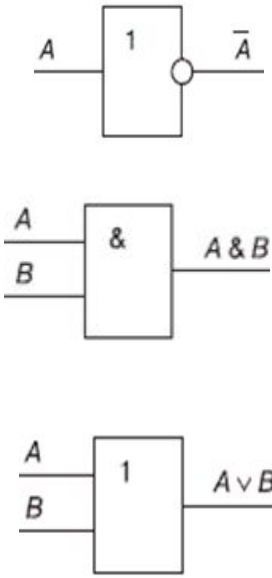

Ставим элемент

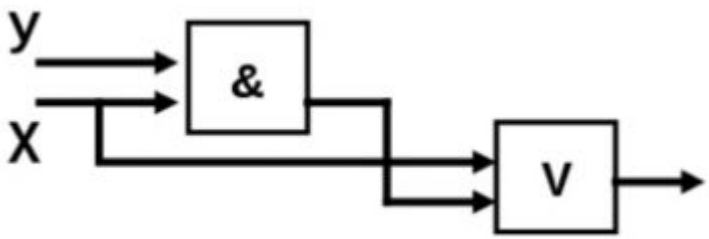



A
B
$\overline{A}$
&
$\overline{A} \cdot B$
1
X
$A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$
$\overline{B}$


A
B
C
$\overline{A}$
$\overline{B}$
$\overline{C}$
&
1
X
$\overline{A} \cdot B$
$A \cdot \overline{B}$
$A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$

Составить логическую схему для следующего логического выражения: **F= x V y & x**
(пусть x – истина, y – ложь)






**Ответ: 1 V 0 & 1 = 1**

# Домашнее задание.

Используя законы алгебры логики упростить выражения:

$$F = (A + B) \cdot (A + C)$$

$$F = (A \wedge B \wedge \overline{C}) \vee \overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}$$

$$F = \left(\overline{\overline{A} \vee \overline{B}}\right) \vee \left(A \wedge (\overline{B} \wedge 1)\right)$$

Постройте логическую схему, соответствующую логическому выражению

F = X & Y V ¬(Y V X).

Вычислить значение выражения для X=1, Y=0.