Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача

Общая постановка краевой задачи

- Дано обыкновенное дифференциальное уравнение порядка 2 или выше.
- Известны ограничения на искомую функцию, данные в граничных точках компактной области решения.
- Требуется найти все частные решения ОДУ (а желательно вообще единственное), которые удовлетворяют указанным ограничениям.

- В рамках численных методов будем рассматривать отрезок $[x_0, x_n]$, а постоянный шаг $h = \frac{x_n - x_0}{n}$

Приложения краевой задачи в одномерном исполнении

- Исследование тормозящих/разгоняющих характеристик поля сил
- Теплопроводность в стержне
- Распределение давления
  - сплошной среды в магистральной трубе
  - в нагруженном стержне меняющейся толщины
- Собственный прогиб опоры/подвеса под действием силы тяжести
- И многое другое.

Краевые условия для ОДУ $H\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(L)}(x)\right) = 0$

- Первого рода – на значение искомой функции
  - $y(x_0) = y_0$ – слева; $y(x_n) = y_n$ – справа
- Второго рода – на значение **некоторой производной** искомой функции
  - $y'(x_0) = y'_0$ – слева; $y'(x_n) = y'_n$ – справа
- Третьего рода – дифференциальное уравнение меньшего порядка
  - $f\left(x_0, y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(L-1)}(x_0)\right) = 0$ – слева
  - $g\left(x_n, y(x_n), y'(x_n), \dots, y^{(L-1)}(x_n)\right) = 0$ – справа
  - ! Каждое совместимое условие третьего рода снижает степень свободы решения ОДУ на 1!

Случай линейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка

- Само уравнение

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x), \qquad V \le x \le W$$

- Возможные краевые условия первого рода

$$y(V) = \upsilon, \qquad y(W) = \omega$$

- Возможные краевые условия второго рода

$$y'(V) = \upsilon', \qquad y'(W) = \omega'$$

- Возможные краевые условия третьего рода (линейные)

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x), x = V;$$
$$y'(x) + s(x)y(x) = z(x), x = W$$

- В большинстве случаев два краевых условия любого рода, заданные на разных концах отрезка, дают однозначное частное решение ОДУ.

Напоминание о разностных производных

- Первая разностная производная (первого порядка точности при $h \to 0$)
  - Левая:
$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + o(1)$$
  - Правая:
$$y'(x) = \frac{y(x) - y(x-h)}{h} + o(1)$$

Напоминание о разностных производных

- Первая разностная производная (второго порядка точности при $h \to 0$)
  - Левая:
$$y'(t) = \frac{y(x-2h) - 4y(x-h) + 3y(x)}{2h} + o(h)$$
  - Правая:
$$y'(t) = \frac{-3y(x) + 4y(x+h) - y(x+2h)}{2h} + o(h)$$
  - Центральная:
$$y'(t) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + o(h)$$

Вывод порядка точности разностных производных

- Воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, $h \to 0$:
  - $y(x+h) = y(x) + h \cdot y'(x) + h^2 \cdot \frac{y''(x)}{2} + h^3 \cdot \frac{y'''(x)}{6} + h^4 \cdot \frac{y^{IV}(x)}{24} + o(h^4)$
  - $y(x-h) = y(x) - h \cdot y'(x) + h^2 \cdot \frac{y''(x)}{2} - h^3 \cdot \frac{y'''(x)}{6} + h^4 \cdot \frac{y^{IV}(x)}{24} + o(h^4)$
  - $y(x+2h) = y(x) + 2h \cdot y'(x) + 4h^2 \cdot \frac{y''(x)}{2} + 8h^3 \cdot \frac{y'''(x)}{6} + 16h^4 \cdot \frac{y^{IV}(x)}{24} + o(h^4)$
  - $y(x-2h) = y(x) - 2h \cdot y'(x) + 4h^2 \cdot \frac{y''(x)}{2} - 8h^3 \cdot \frac{y'''(x)}{6} + 16h^4 \cdot \frac{y^{IV}(x)}{24} + o(h^4)$
- Тогда разностные производные первого порядка обоснованы так:
  - $\frac{y(x+h)-y(x)}{h} = y'(x) + \frac{y''(x)}{2}h + o(h) = y'(x) + O(h)$
  - $\frac{y(x)-y(x-h)}{h} = y'(x) - \frac{y''(x)}{2}h + o(h) = y'(x) + O(h)$

Вывод второго порядка точности центральной разностной производной

-
  - $y(x+h) = y(x) + h \cdot y'(x) + h^2 \cdot \frac{y''(x)}{2} + h^3 \cdot \frac{y'''(x)}{6} + h^4 \cdot \frac{y^{IV}(x)}{24} + o(h^4)$
  - $y(x-h) = y(x) - h \cdot y'(x) + h^2 \cdot \frac{y''(x)}{2} - h^3 \cdot \frac{y'''(x)}{6} + h^4 \cdot \frac{y^{IV}(x)}{24} + o(h^4)$
- Вычтем и разделим на 2h:
  - $\frac{y(x+h)-y(x-h)}{2h} = y'(x) + h^2 \cdot \frac{y'''(x)}{6} + o(h^3) = y'(x) + O(h^2)$

Вывод второго порядка точности правой разностной производной

-
  - $y(x+h) = y(x) + h \cdot y'(x) + h^2 \cdot \frac{y''(x)}{2} + h^3 \cdot \frac{y'''(x)}{6} + h^4 \cdot \frac{y^{IV}(x)}{24} + o(h^4)$
  - $y(x+2h) = y(x) + 2h \cdot y'(x) + 4h^2 \cdot \frac{y''(x)}{2} + 8h^3 \cdot \frac{y'''(x)}{6} + 16h^4 \cdot \frac{y^{IV}(x)}{24} + o(h^4)$
- Умножаем на нужные множители:
  - $+4y(x+h) = +4y(x) + 4h \cdot y'(x) + 2h^2 \cdot y''(x) + \frac{2}{3}h^3 \cdot y'''(x) + \frac{1}{6}h^4 \cdot y^{IV}(x) + o(h^4)$
  - $-y(x+2h) = -y(x) - 2h \cdot y'(x) - 2h^2 \cdot y''(x) - \frac{4}{3}h^3 \cdot y'''(x) - \frac{2}{3}h^4 \cdot y^{IV}(x) + o(h^4)$
- Подставляем в разностную формулу:
  - $\frac{-3y(x)+4y(x+h)-y(x+2h)}{2h} = y'(x) - h^2 \cdot \frac{1}{3}y'''(x) + o(h^2) = y'(x) - O(h^2)$

Вывод второго порядка точности левой разностной производной

-
  - $y(x-h) = y(x) - h\cdot y'(x) + h^2\cdot\frac{y''(x)}{2} - h^3\cdot\frac{y'''(x)}{6} + h^4\cdot\frac{y^{IV}(x)}{24} + o(h^4)$
  - $y(x-2h) = y(x) - 2h\cdot y'(x) + 4h^2\cdot\frac{y''(x)}{2} - 8h^3\cdot\frac{y'''(x)}{6} + 16h^4\cdot\frac{y^{IV}(x)}{24} + o(h^4)$
- Умножаем на нужные множители:
  - $-4y(x-h) = -4y(x) + 4h\cdot y'(x) - 2h^2\cdot y''(x) + \frac{2}{3}h^3\cdot y'''(x) - \frac{1}{6}h^4\cdot y^{IV}(x) + o(h^4)$
  - $y(x-2h) = y(x) - 2h\cdot y'(x) + 2h^2\cdot y''(x) - \frac{4}{3}h^3\cdot y'''(x) + \frac{2}{3}h^4\cdot y^{IV}(x) + o(h^4)$
- Подставляем в разностную формулу:
  - $\frac{+y(x-2h)-4y(x-h)+3y(x)}{2h} = y'(x) - h^2\cdot\frac{1}{3}y'''(x) + o(h^2) = y'(x) + O(h^2)$

Вторая разностная производная

- $y''(x) = \frac{y(x+h)-2y(x)+y(x-h)}{h^2} + O(h^2)$ в центре:
  - $y(x+h) = y(x) + h \cdot y'(x) + h^2 \cdot \frac{y''(x)}{2} + h^3 \cdot \frac{y'''(x)}{6} + h^4 \cdot \frac{y^{IV}(x)}{24} + o(h^4)$
  - $y(x-h) = y(x) - h \cdot y'(x) + h^2 \cdot \frac{y''(x)}{2} - h^3 \cdot \frac{y'''(x)}{6} + h^4 \cdot \frac{y^{IV}(x)}{24} + o(h^4)$
  - $\frac{y(x+h)-2y(x)+y(x-h)}{h^2} = y''(x) + h^2 \cdot \frac{y^{IV}(x)}{12} + o(h^2) = y''(x) + O(h^2)$
- Второго порядка точности!
- На крайних узлах разностной схемы вторая производная оценивается такими же разностями, но с первым порядком точности, что сильно хуже.

Формирование системы линейных уравнений для разностных производных

- В промежуточных узлах $x_k, k = \overline{1, n-1}$
  - Вторую производную заменяем на разностный аналог:
    $$y''(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}$$
  - Первую производную заменяем на центральный разностный аналог:
    $$y'(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}$$
  - В качестве значения функции подставим $y(x_k) \approx y_k$
  - Функции, не зависящие от y, рассчитываем явно (подставляя x_k)
- В крайних узлах подставляем так же только следующее:
  - В качестве значения функции $y(x_0) \approx y_0, y(x_n) \approx y_n$
  - Функции, не зависящие от y, рассчитываем явно (подставляя x_k)
- Краевые условия надо также отобразить в конечных разностях!

Добавление в СЛАУ первой и последней строк, отвечающих краевым условиям

- Краевое условие первого рода:
  - $y(V) = v \ \rightarrow y_0 = V;\ y(W) = \omega \ \rightarrow y_n = W$
- В краевых условиях второго либо третьего рода используется разностная производная соответствующей стороны:
  - В точке V – правая производная первого либо второго порядка;
  - В точке W – левая производная первого либо второго порядка.

сторона	**1-й порядок точности производной**	**2-й порядок точности производной**
Точка V		
Точка W		

Формируем СЛАУ. Ядро:

- Дифференциальное уравнение $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$
- Имеет ядро:

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + a(x_k) \cdot \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + b(x_k) \cdot y_k = f(x_k), k = \overline{1, n-1}$$

- Оно составляет после приведения слагаемых трёхдиагональную матрицу:

$$y_{k-1} \cdot \left(\frac{1}{h^2} - \frac{a(x_k)}{2h}\right) + y_k \cdot \left(b(x_k) - \frac{2}{h^2}\right) + y_{k+1} \cdot \left(\frac{1}{h^2} + \frac{a(x_k)}{2h}\right) = f(x_k)$$

- При малых h и не слишком малых $b(x_k)$ отлично работает **метод прогонки.** Мы его уже реализовали в лабораторной 1.3.
- Первое и последнее уравнения системы получаем из краевых условий.

Формируем СЛАУ. Краевые условия

- Для каждого краевого условия проделаем действия:
  - Подставляем разностные производные и опорные значения функций;
  - Избавим от y_{n-2} и y_2 либо выбором схемы первого порядка, либо ходом, подобным методу Гаусса;
  - Вставим в СЛАУ и получим настоящую трёхдиагональную СЛАУ.
- Решим СЛАУ методом прогонки Томаса.

Как выглядит алгоритм решения краевой задачи?

- На входе имеем:
  - Крайние точки V, W
  - Количество интервалов n
  - Параметры ДУ: a(x), b(x), f(x)
  - Набор из двух краевых условий, заданных параметрами/функциями
- На выходе имеем:
  - Массив аргументов X
  - Массив разностного приближённого решения Y
- Внутри алгоритма:
  - Строим трёхдиагональную СЛАУ
  - Решаем эту СЛАУ методом, реализованным в лаб. 1.3.
  - Формируем выходные массивы
- *В вызывающей программе:*
  - *Строим линейный или кубический сплайн по найденным точкам, как в 4.2, увеличивая плотность посева.*
  - *Выводим сплайн на график.*