



**РАНХиГС**  
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА  
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ  
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

# Аннуитеты.

Князева М.А.,  
доцент, канд. техн.  
наук

## Основные параметры аннуитета

**Аннуитет** – регулярный поток платежей.

Параметры:

- размер платежа;
- число платежей;
- число платежей в год;
- интервал платежа — период времени между двумя последовательными платежами;
  - срок аннуитета — период времени от начала первого до конца последнего интервала платежа;
  - процентная ставка;
  - число периодов начисления процентов в год;
  - настоящая (приведенная) стоимость — консолидированный платеж аннуитета на начало его срока;
  - итоговая сумма — консолидированный платеж аннуитета на конец его срока.

# Классификация аннуитетов

- **По определенности срока аннуитета:**
  - Определенный (верная рента)
  - Случайный (условная рента)
- **По определению времени:**
  - Дискретный
  - Непрерывный
- **По выбору моментов платежей**
  - Обыкновенный (рента постнумерандо)
  - Полагающийся (рента пренумерандо)
- **По соотношению интервала платежа и периода начисления процентов:**
  - простой
  - общий

## Классификация аннуитетов (продолжение)

- **По величине платежей:**
  - Постоянный
  - Переменный
- **По числу платежей:**
  - Срочный (ограниченная рента)
  - Бессрочный (вечная рента)
- **По соотношению начала срока аннуитета и даты заключения сделки:**
  - Немедленный
  - Отсроченный

# Простейший аннуитет

## Простейший аннуитет:

- ✓ определенный,
  - ✓ дискретный,
  - ✓ срочный,
  - ✓ постоянный,
  - ✓ немедленный,
  - ✓ простой,
  - ✓ обыкновенный,
- аннуитет.

# Оценка параметров простейшего аннуитета

▷▷ *Постановка задачи*

Дано:

$R$  — размер платежа;

$n$  — число платежей;

$i$  — сложная процентная ставка при начислении процентов за интервал платежа.

Требуется найти итоговую сумму  $S$  и настоящую стоимость  $A$  простейшего аннуитета.

# Оценка параметров простейшего аннуитета (продолжение)

## ►► Решение задачи

Временная диаграмма платежей простейшего аннуитета имеет вид

0	1	2	...	$n - 2$	$n - 1$	$n$
	$R$	$R$	...	$R$	$R$	$R$
						$S$
$A$						

$$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

или  $S = Rs(n, i)$ , где

$$s(n, i) = \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Функция  $s(n, i)$  табулирована для целых значений  $n$  и  $i > 5$  (см. приложение). Она называется *функцией наращенения*.

# Оценка параметров простейшего аннуитета (окончание)

Величины  $A$  и  $S$  эквивалентны по ставке  $i$ . Они связаны соотношением

$$A = S(1 + i)^{-n}.$$

С использованием выражения для  $S$  получаем искомое выражение для  $A$ :

$$A = R \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i},$$

или  $A = Ra(n, i)$ , где

$$a(n, i) = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}.$$

Функция  $a(n, i)$  табулирована для целых значений  $n$  и  $i > 5$  (см. приложение). Она называется **функцией дисконтирования**. ◀◀



## Пример 1

Для обеспечения будущих расходов создается фонд. Средства в фонд поступают в виде постоянного обыкновенного аннуитета в течение пяти лет. Размер разового платежа 4 млн руб. На взносы ежегодно начисляются проценты по ставке 18,5%. Определим итоговую стоимость фонда. Какую сумму следовало бы поместить на депозит в момент начала срока аннуитета под 18,5% годовых, чтобы через пять лет накопилось сумма, равная итоговой стоимости фонда?

Дано:  $t = 5$ ;  $R = 4$ ;  $j_1 = 0,185$ .

Найти:  $S$ ,  $A$ .

*Решение*

Имеем  $n = 5$ ,  $i = 0,185$ . Тогда

$$S = 4 \frac{(1 + 0,185)^5 - 1}{0,185} = 28,936 \text{ (млн руб.)};$$

$$A = 28,936(1 + 0,185)^{-5} = 12,368 \text{ (млн руб.)}.$$

## Пример 2

Владелец малого предприятия предусматривает создание в течение трех лет фонда развития. Для этого ассигнуется ежегодно 41,2 тыс. руб., которые помещаются в банк под 20% годовых. Какая сумма потребовалась бы фирме для создания фонда, если бы она была помещена в банк на три года под 20% годовых?

Дано:  $t = 3$ ;  $j_1 = 0,2$ ;  $R = 41,2$ .

Найти:  $A$ .

*Решение*

Имеем  $n = 3$ ,  $i = 0,2$ . Тогда

$$A = 41,2 \frac{1 - (1 + 0,2)^{-3}}{0,2} = 86,79 \text{ (тыс. руб.)}.$$

## Пример 3

Товар стоит 500 тыс. руб. Он может быть приобретен в рассрочку путем начального платежа в сумме 200 тыс. руб. и одинаковых ежемесячных взносов в течение двух лет. Найдем величину ежемесячного платежа, чтобы обеспечить эквивалентность выплат с учетом ставки 12% при начислении процентов ежемесячно.

Дано:  $F = 500$ ;  $t = 2$ ;  $R_0 = 200$ ;  $j_{12} = 0,12$ .

Найти:  $R$ .

### *Решение*

Требуется определить платежи простейшего аннуитета, настоящая стоимость которого равна стоимости товара, подлежащей выплате в рассрочку. Из формулы  $A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$  выражаем  $R = \frac{Ai}{1 - (1+i)^{-n}}$ . Имеем  $A = F - R_0 = 500 - 200 = 300$ ,  $n = 24$ ,  $i = 0,01$ . Тогда

$$R = \frac{300 \cdot 0,01}{1 - (1 + 0,01)^{-24}} = 14,122 \text{ (тыс. руб.)}$$

# Полагающийся аннуитет

**Полагающийся аннуитет – аннуитет, платежи которого относятся к начальным моментам интервалов платежа.**

# Оценка параметров полагающегося аннуитета

▷▷ *Постановка задачи*

Дано:

$R$  — размер платежа;

$n$  — число платежей;

$i$  — сложная процентная ставка при начислении процентов за интервал платежа.

Требуется найти итоговую сумму  $S$  и настоящую стоимость  $A$  полагающегося аннуитета.

# Оценка параметров полагающегося аннуитета (продолжение)

## ►► Решение задачи

Временная диаграмма платежей полагающегося аннуитета имеет вид

0	1	2	...	$n - 2$	$n - 1$	$n$
$R$	$R$	$R$	...	$R$	$R$	
						$S$
$A$						

Для определения итоговой суммы  $S$  данный аннуитет можно представить в виде обыкновенного аннуитета с итоговой суммой  $S_{(-1)}$ , который начинается на один период времени раньше исходного полагающегося аннуитета:

-1	0	1	2	...	$n - 2$	$n - 1$	$n$
	$R$	$R$	$R$	...	$R$	$R$	
						$S_{(-1)}$	
							$S$

# Оценка параметров полагающегося аннуитета (окончание)

Составим уравнение эквивалентности с датой сравнения на конец срока аннуитета с учетом вспомогательной суммы  $S_{(-1)}$ :

$$S = S_{(-1)}(1 + i), S_{(-1)} = Rs(n, i).$$

Искомая сумма находится из этих соотношений:

$$S = Rs(n, i)(1 + i).$$

Для определения настоящей стоимости  $A$  данный аннуитет можно представить как совокупность первого платежа и обыкновенного аннуитета из остальных платежей с настоящей стоимостью  $A^{(n-1)}$ :

Искомая сумма находится из этих соотношений:

$$A = R + Ra(n - 1, i). \blacktriangleleft\blacktriangleleft$$

## Пример 4

Товар куплен в рассрочку ежемесячными платежами по 200 тыс. руб. в течение полутора лет. Первый платеж был сделан в момент покупки. Найдём эквивалентную стоимость товара в момент покупки с учетом годовой номинальной ставки 6% при начислении процентов ежемесячно.

*Решение*

Имеем  $n = 18$ ,  $i = 0,005$ . Тогда  $A = 200 + 200a(18 - 1; 0,005) = 3451,726$  (тыс. руб.).



# Общий аннуитет

*Общий аннуитет* — это аннуитет, число интервалов платежа которого может не совпадать с числом периодов начисления процентов.

Параметры общего аннуитета находят путем перехода от заданного общего аннуитета к эквивалентному ему простому аннуитету по определенной процентной ставке.

# Оценка параметров общего аннуитета

## ▷▷ Постановка задачи

Дано:

$R_p$  — размер платежа общего аннуитета;

$p$  — число интервалов платежа в год;

$i_m$  — процентная ставка за период начисления;

$m$  — число периодов начисления процентов в год.

Требуется найти размер платежа  $R_m$  простого аннуитета, эквивалентного исходному общему аннуитету по ставке  $i_m$ , если этот общий аннуитет является: 1) обыкновенным; 2) полагающимся.

# Оценка параметров общего аннуитета (продолжение)

*Случай 1.* Общий аннуитет — обыкновенный.

Совмещенная временная диаграмма за год имеет вид

0	1	2	...	$p - 1$	$p$
	$R_p$	$R_p$	...	$R_p$	$R_p$
					$S_p$
<hr/>					
0	1	2	...	$m - 1$	$m$
	$R_m$	$R_m$	...	$R_m$	$R_m$
					$S_m$

$$R_m = R_p \frac{i_m}{(1+i_m)^{\frac{m}{p}} - 1},$$

или с учетом функции наращенения  $s(n, i)$

$$R_m = \frac{R_p}{s\left(\frac{m}{p}, i_m\right)},$$

где  $s\left(\frac{m}{p}, i_m\right) = \frac{(1+i_m)^{\frac{m}{p}} - 1}{i_m}$ .

# Оценка параметров общего аннуитета (окончание)

*Случай 2.* Общий аннуитет — полагающийся.

Совмещенная временная диаграмма за год имеет вид

0	1	2	...	$p - 1$	$p$
$R_p$	$R_p$	$R_p$	...	$R_p$	
					$S_p$
0	1	2	...	$m - 1$	$m$
	$R_m$	$R_m$	...	$R_m$	$R_m$
					$S_m$

$$R_m = R_p \frac{i_m}{1 - (1 + i_m)^{-\frac{m}{p}}},$$

или с учетом функции дисконтирования  $a(n, i)$

$$R_m = \frac{R_p}{a\left(\frac{m}{p}, i_m\right)},$$

где  $a\left(\frac{m}{p}, i_m\right) = \frac{1 - (1 + i_m)^{-\frac{m}{p}}}{i_m}$ . ◀◀

## Пример 6

Работник получает премию 50 тыс. руб. в конце каждого года. Какие ежемесячные выплаты эквивалентны этой сумме при ежемесячном начислении процентов по ставке 6%?

Дано:  $R_1 = 50$ ;  $p = 1$ ;  $j_{12} = 0,06$ ;  $m = 12$ .

Найти:  $R_{12}$ .

*Решение* --

Имеем  $i_{12} = \frac{0,06}{12} = 0,005$ . Тогда

$$R_{12} = R_1 \frac{i_{12}}{(1+i_{12})^{\frac{1}{12}} - 1} = 50 \frac{0,005}{(1+0,005)^{\frac{1}{12}} - 1} = 4,05 \text{ (тыс. руб.)}$$

Годовой платеж в данном случае играет роль итоговой стоимости простейшего ежемесячного аннуитета, осуществляемого в течение года.

## Пример 7

Определим, как заменить ежеквартальные платежи по 500 тыс. руб. на полугодовые платежи, если применяется процентная ставка 5% при начислении процентов два раза в год и выплаты осуществляются: а) в конце кварталов, б) в начале кварталов.

Дано:  $R_4 = 500$ ;  $p = 4$ ;  $j_2 = 0,05$ ;  $m = 2$ .

Найти:  $R_2$ .

*Решение*

Имеем  $i_2 = \frac{0,05}{2} = 0,025$ . Тогда:

$$\text{а) } R_2 = R_4 \frac{i_2}{(1+i_2)^{\frac{2}{4}} - 1} = 500 \frac{0,025}{(1+0,025)^{\frac{2}{4}} - 1} = 1006,20 \text{ (тыс. руб.)};$$

$$\text{б) } R_2 = R_4 \frac{i_2}{1 - (1+i_2)^{-\frac{2}{4}}} = 500 \frac{0,025}{1 - (1+0,025)^{-\frac{2}{4}}} = 1018,711 \text{ (тыс. руб.)}.$$

## Пример 8

Инвестиции в производство пять лет назад составили 800 тыс. руб. Оценим эффективность вложения этих средств с учетом начисления процентов, если средний размер ежемесячных дивидендов по этим инвестициям составил 15 тыс. руб., а эффективная ставка равна 8%.

Дано:  $F = 800$ ;  $R_{12} = 15$ ;  $p = 12$ ;  $t = 5$ ;  $j_1 = 0,08$ ;  $m = 1$ .

Найти:  $A$ .

*Решение*

Требуется определить настоящую стоимость  $A$  общего ежемесячного аннуитета и сравнить ее с вложенной суммой  $F$ . Имеем  $n = 5$ ,  $i = i_1 = 0,08$ .

Годовой платеж:

$$R_1 = 15 \cdot \frac{0,08}{(1 + 0,08)^{\frac{1}{12}} - 1} = 184,656 \text{ (тыс. руб.)}$$

Настоящая стоимость:

$$A = R_1 \frac{1 - (1 + i_1)^{-n}}{i_1} = 184,656 \frac{1 - (1 + 0,08)^{-5}}{0,08} = 737,277 \text{ (тыс. руб.)}$$

Поскольку  $A < F$ , то инвестиции использовались неэффективно — выгоднее было деньги положить в банк на депозит под 8% годовых.

## Пример 9

Определим, сколько ежемесячных платежей по 5 тыс. руб. нужно перечислить на счет в банке, чтобы погасить задолженность в сумме 100 тыс. руб., включающую проценты при полугодовом начислении, если первая выплата делается через месяц после займа и годовая номинальная ставка равна 18%.

Дано:  $R_{12} = 5$ ;  $j_2 = 0,18$ ;  $A = 100$ .

Найти:  $n$ .

*Решение*

Сначала перейдем от данного общего к простому аннуитету с полугодовыми выплатами, затем найдем, сколько понадобится полугодий для выплаты долга, и пересчитаем их в месяцы:

$$R_2 = R_{12} \frac{i_2}{(1+i_2)^{\frac{2}{12}} - 1} = 5 \frac{0,09}{(1+0,09)^{\frac{1}{6}} - 1} = 31,106 \text{ (тыс. руб.)};$$

$$A = R_2 \frac{1 - (1+i_2)^{-n}}{i_2}; \quad n = -\log_{1+i_2} \left( 1 - \frac{Ai_2}{R_2} \right);$$

$$n = -\log_{1,09} \left( 1 - \frac{100 \cdot 0,09}{31,106} \right) = -\log_{1,09} 0,711 = -\frac{\ln 0,711}{\ln 1,09} = 3,958 \text{ полугодий, или } 23,747 \text{ мес.}$$



# Отсроченный аннуитет

*Отсроченный аннуитет* — аннуитет, который начинается позднее по отношению к началу включающей его финансовой операции.

Число интервалов платежа от начала финансовой операции до начала аннуитета называется *периодом отсрочки*.

*Приведенная стоимость отсроченного аннуитета* — это платеж, отнесенный на начало финансовой операции и эквивалентный данному отсроченному аннуитету по определенной ставке.

Основной задачей при анализе отсроченного аннуитета является определение его приведенной стоимости.

# Оценка параметров отсроченного аннуитета

▷▷ *Постановка задачи*

Дано:

$R$  — размер платежа;

$n$  — число платежей;

$k$  — число интервалов платежа в периоде отсрочки;

$i$  — сложная процентная ставка при начислении процентов за интервал платежа.

Требуется определить приведенную стоимость отсроченного аннуитета  $A$ .

# Оценка параметров отсроченного аннуитета (окончание)

## ►► Решение задачи

Временная диаграмма платежей отсроченного аннуитета имеет вид

0	1	2	...	$k$	$k+1$	$k+2$	...	$k+n-1$	$k+n$
					1	2	...	$n-1$	$n$
					$R$	$R$	...	$R$	$R$

$A_0$

$A$

$$A = Ra(n, i)(1+i)^{-k}$$

# Пример 10

Компания получила ссуду, которую она будет возмещать, выплачивая по 500 тыс. руб. в год. Первая выплата будет сделана через три года, последняя — через 10 лет от даты заключения сделки. Определим сумму ссуды, если применяется годовая номинальная ставка 16%.

Дано:  $R = 500$ ;  $t_1 = 3$ ;  $t_n = 10$ ;  $j_1 = 16\%$ .

Найти:  $A$ .

*Решение*

Временная диаграмма имеет вид

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
			1	2	3	4	5	6	7	8
			500	500	500	500	500	500	500	500
$A$										

Имеем  $i = 0,16$ ;  $n = 8$ ;  $k = 2$ . Тогда

$$a(8, 0,16) = \frac{1 - (1 + 0,16)^{-8}}{0,16} = 4,344;$$

$$A = 500a(8, 0,16)(1 + 0,16)^{-2} = 1613,999 \text{ (тыс. руб.)}.$$

# Пример 11

Ссуду 200 тыс. руб. с начисляемыми на нее процентами в конце каждого полугодия по ставке 14% годовых требуется погасить десятью полугодовыми взносами. Первая выплата будет сделана через три года после получения ссуды. Какими должны быть эти взносы?

Дано:  $A = 200$ ;  $n = 10$ ;  $t_1 = 3$ ;  $j_1 = 0,14$ .

Найти:  $R$ .

*Решение*

Временная диаграмма по полугодиям имеет вид

0	1	2	3	4	5	6	7	...	14	15
						1	2	...	9	10
						$R$	$R$	...	$R$	$R$
200										

Имеем  $k = 5$ ,  $i = 0,07$ . Тогда

$$200(1 + 0,07)^5 = Ra(10, 0,07), \quad a(10, 0,07) = \frac{1 - (1 + 0,07)^{-10}}{0,07} = 7,024;$$

$$R = \frac{200(1 + 0,07)^5}{a(10, 0,07)} = 39,938 \text{ (тыс. руб.)}.$$

# Бессрочный аннуитет

*Бессрочный аннуитет* – аннуитет, срок которого неограничен.

Итоговая сумма вечной ренты не имеет смысла, так как платежи продолжают неограниченно долго.

# Оценка параметров бессрочного аннуитета

▷▷ *Постановка задачи*

Дано:

$R$  — размер платежа;

$i$  — сложная процентная ставка при начислении процентов за интервал платежа.

Требуется определить настоящую стоимость бессрочного аннуитета  $A$ .

## Пример 12

Компания гарантирует выплату дивидендов в размере 60 тыс. руб. на акцию в конце каждого года в течение неопределенно долгого времени. Имеет ли смысл покупать акции этой компании по цене 700 тыс. руб., если можно поместить деньги в банк на депозит под 8% годовых?

Дано:  $F = 350$ ;  $R = 60$ ;  $j_1 = 0,08$ .

Найти:  $A$ .

### *Решение*

Требуется определить настоящую стоимость данных платежей  $A$  и сравнить ее с их заданной начальной стоимостью  $F$ . Имеем  $i = 0,08$ ,

$$A = \frac{R}{i} = \frac{60}{0,08} = 750 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Поскольку  $A > F$ , то акции покупать стоит.



## Пример 13

Для обслуживания переезда требуется 10 тыс. руб. в конце каждого месяца. Какую сумму следует инвестировать компании, чтобы на получаемые проценты поддерживать обслуживание переезда? Эффективная ставка равна 6%.

Дано:  $R_{12} = 10$ ;  $r = 0,06$ .

Найти:  $A$ .

*Решение*

Здесь имеет место общий аннуитет. Сначала найдем эквивалентный данному месячному годовому платеж по формуле  $R_m = R_p \frac{i_m}{(1+i_m)^{\frac{p}{m}} - 1}$ , а затем используем формулу для вычисления бессрочного аннуитета. Имеем  $m = 1$ ,  $p = 12$ ,  $i_1 = 0,06$ ,

$$R_1 = 10 \frac{0,06}{(1+0,06)^{\frac{1}{12}} - 1} = 123,265; A = \frac{123,265}{0,06} = 2054,421 \text{ (тыс. руб.)}$$

# Непрерывный аннуитет

*Непрерывный аннуитет* – это аннуитет, платежи которого производятся непрерывно.

# Оценка параметров непрерывного аннуитета

▷▷ *Постановка задачи*

Дано:

$W$  — размер суммарного годового платежа;

$\delta$  — непрерывная процентная ставка (сила роста);

$t$  — время (в годах).

Требуется определить настоящую стоимость  $A$  и итоговую сумму  $S$  непрерывного аннуитета за  $t$  лет.

# Оценка параметров непрерывного аннуитета

## ▷▷ Постановка задачи

Дано:

$W$  — размер суммарного годового платежа;

$\delta$  — непрерывная процентная ставка (сила роста);

$t$  — время (в годах).

Требуется определить настоящую стоимость  $A$  и итоговую сумму  $S$  непрерывного аннуитета за  $t$  лет.

## ▶▶ Решение задачи

$$S = W \frac{e^{\delta t} - 1}{\delta}; A = W \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta}. \blacktriangleleft \blacktriangleleft$$

## Пример 14

Ожидается, что доходы от инвестиционного проекта будут поступать непрерывно и равномерно в течение 10 лет, составляя 1 млн руб. в год. Определим стоимость доходов на начало проекта с учетом силы роста 10%.

Дано:  $W = 1000$ ;  $t = 10$ ;  $\delta = 0,1$ .

Найти:  $A$ .

*Решение*

$$A = W \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta} = 1000 \frac{1 - e^{-0,1 \cdot 10}}{0,1} = 6321,206 \text{ (тыс. руб.)}.$$

# Переменный аннуитет

*Переменный аннуитет* — аннуитет, платежи которого имеют неодинаковый размер.

Если нет явной закономерности при изменении размера платежей, вычисление искомых параметров переменного аннуитета производят с помощью уравнений эквивалентности.

# Оценка параметров переменного аннуитета. Случай арифметической прогрессии

## ▷▷ *Постановка задачи*

Дано:

$R$  — размер первого платежа;

$z$  — разность арифметической прогрессии;

$i$  — сложная процентная ставка при начислении процентов за интервал платежа.

Требуется определить настоящую стоимость  $A$  и итоговую сумму  $S$  переменного аннуитета с платежами, изменяющимися по закону арифметической прогрессии.

# Оценка параметров переменного аннуитета. Случай арифметической прогрессии

▷▷ *Постановка задачи*

Дано:

$R$  — размер первого платежа;

$z$  — разность арифметической прогрессии;

$i$  — сложная процентная ставка при начислении процентов за интервал платежа.

Требуется определить настоящую стоимость  $A$  и итоговую сумму  $S$  переменного аннуитета с платежами, изменяющимися по закону арифметической прогрессии.

▶▶ *Решение задачи*

Временная диаграмма аннуитета имеет вид

0	1	2	3	...	$n-2$	$n-1$	$n$
	$R$	$R+z$	$R+2z$	...	$R+(n-3)z$	$R+(n-2)z$	$R+(n-1)z$
							$S$
$A$							

$$S = \left( R + \frac{z}{i} \right) s(n, i) - \frac{zn}{i}; \quad A = \left( R + \frac{z}{i} \right) a(n, i) - \frac{zn}{i(1+i)^n}.$$



## Пример 15

На счет в банке в течение шести лет в конце года будут поступать денежные суммы, первая из которых равна 5 тыс. руб., а каждая следующая будет увеличиваться на 400 руб. Найдем настоящую стоимость и итоговую сумму этого аннуитета, если проценты начисляются по ставке 10% один раз в конце года.

Дано:  $R = 5$ ;  $z = 0,4$ ;  $t = 6$ ;  $j_1 = 0,1$ .

Найти:  $S$ ,  $A$ .

*Решение*

Имеем  $i = 0,1$ ,  $n = 6$ . Тогда

$$S = \left( 5 + \frac{0,4}{0,1} \right) s(6, 0,1) - \frac{0,4 \cdot 6}{0,1} = 45,441 \text{ (тыс. руб.)};$$

$$A = \left( 5 + \frac{0,4}{0,1} \right) a(6, 0,1) - \frac{0,4 \cdot 6}{0,1(1 + 0,1)^6} = 25,650 \text{ (тыс. руб.)}.$$

# Оценка параметров переменного аннуитета. Случай геометрической прогрессии

## ▷▷ Постановка задачи

Дано:

$R$  — размер первого платежа;

$q$  — знаменатель геометрической прогрессии;

$i$  — сложная процентная ставка при начислении процентов за интервал платежа.

Требуется определить настоящую стоимость  $A$  и итоговую сумму  $S$  переменного аннуитета с платежами, изменяющимися по закону геометрической прогрессии.

## ▶▶ Решение задачи

Временная диаграмма аннуитета имеет вид

0	1	2	3	...	$n - 2$	$n - 1$	$n$
	$R$	$Rq$	$Rq^2$	...	$Rq^{n-3}$	$Rq^{n-2}$	$Rq^{n-1}$
							$S$
$A$							

$$S = R \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}; \quad A = \frac{R}{(1+i)^n} \cdot \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}.$$

## Пример 16

На счет в банке поступают в течение пяти лет в конце года платежи. Первый платеж равен 3 тыс. руб., а каждый следующий по отношению к предыдущему увеличивается на 15%. Определим итоговую сумму и настоящую стоимость этого аннуитета, если банк начисляет в конце каждого года сложные проценты по ставке 12%.

Дано:  $R = 3$ ;  $h = 15\%$ ;  $t = 5$ ;  $j_1 = 0,12$ .

Найти:  $S$ ,  $A$ .

*Решение*

Имеем  $i = 0,12$ ;  $n = 5$ ;  $q = 1,15$ . Тогда

$$S = 3 \frac{1,15^5 - (1 + 0,12)^5}{1,15 - (1 + 0,12)} = 24,902 \text{ (тыс. руб.)};$$

$$A = \frac{3}{(1 + 0,12)^5} \cdot \frac{1,15^5 - (1 + 0,12)^5}{1,15 - (1 + 0,12)} = 14,130 \text{ (тыс. руб.)}.$$

# Бессрочный переменный аннуитет. Случай геометрической прогрессии

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R}{(1+i)^n} \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)} = \lim_{n \rightarrow \infty} R \frac{\frac{q^n}{(1+i)^n} - 1}{q - (1+i)}.$$

При  $q < 1 + i$  искомая величина  $A$  определяется выражением

$$A = \frac{R}{(1+i) - q},$$

которое называется **моделью постоянного роста** и является обобщением модели настоящей стоимости постоянного бессрочного аннуитета (при  $q = 1$ ).

Модель постоянного роста используется для определения истинной стоимости обыкновенной акции, когда дивиденды растут в геометрической прогрессии.

# Модели аннуитета

Вид аннуитета	Итоговая сумма	Настоящая стоимость	Исходные показатели
Простейший аннуитет	$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$	$A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$	<p><math>R</math> – размер платежа;  <math>i</math> – ставка за интервал платежа;  <math>n</math> – число интервалов платежа;  <math>k</math> – число периодов отсрочки;  <math>\delta</math> – сила роста;  <math>W</math> – суммарный платеж за год;  <math>z</math> – разность арифметической прогрессии;  <math>q</math> – знаменатель геометрической прогрессии</p>
Полагающийся аннуитет	$S = Rs(n, i)(1+i)$	$A = R + Ra(n-1, i)$	
Отсроченный аннуитет	$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$	$A = Ra(n, i)(1+i)^{-k}$	
Бессрочный постоянный аннуитет	–	$A = \frac{R}{i}$	
Непрерывный аннуитет	$S = W \frac{e^{\delta t} - 1}{\delta}$	$A = W \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta}$	
Переменный аннуитет, арифметическая прогрессия	$S = \left( R + \frac{z}{i} \right) s(n, i) - \frac{zn}{i}$	$A = \left( R + \frac{z}{i} \right) a(n, i) - \frac{zn}{i(1+i)^n}$	
Переменный аннуитет, геометрическая прогрессия	$S = R \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}$	$A = \frac{R}{(1+i)^n} \cdot \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}$	
Переменный бессрочный аннуитет, геометрическая прогрессия	–	$A = \frac{R}{q - (1+i)}$	