



РАНХиГС

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Аннуитеты.

Князева М.А.,
доцент, канд. техн.
наук

Основные параметры аннуитета

Аннуитет – регулярный поток платежей.

Параметры:

- размер платежа;
- число платежей;
- число платежей в год;
- интервал платежа — период времени между двумя последовательными платежами;
- срок аннуитета — период времени от начала первого до конца последнего интервала платежа;
- процентная ставка;
- число периодов начисления процентов в год;
- настоящая (приведенная) стоимость — консолидированный платеж аннуитета на начало его срока;
- итоговая сумма — консолидированный платеж аннуитета на конец его срока.

Классификация аннуитетов

- **По определенности срока аннуитета:**
 - Определенный (верная рента)
 - Случайный (условная рента)
- **По определению времени:**
 - Дискретный
 - Непрерывный
- **По выбору моментов платежей**
 - Обыкновенный (рента постнумерандо)
 - Полагающийся (рента пренумерандо)
- **По соотношению интервала платежа и периода начисления процентов:**
 - простой
 - общий

Классификация аннуитетов (продолжение)

- **По величине платежей:**
 - Постоянный
 - Переменный
- **По числу платежей:**
 - Срочный (ограниченная рента)
 - Бессрочный (вечная рента)
- **По соотношению начала срока аннуитета и даты заключения сделки:**
 - Немедленный
 - Отсроченный

Простейший аннуитет

Простейший аннуитет:

- ✓ определенный,
 - ✓ дискретный,
 - ✓ срочный,
 - ✓ постоянный,
 - ✓ немедленный,
 - ✓ простой,
 - ✓ обыкновенный,
- аннуитет.

Оценка параметров простейшего аннуитета

▷▷ *Постановка задачи*

Дано:

R — размер платежа;

n — число платежей;

i — сложная процентная ставка при начислении процентов за интервал платежа.

Требуется найти итоговую сумму S и настоящую стоимость A простейшего аннуитета.

Оценка параметров простейшего аннуитета (продолжение)

►► Решение задачи

Временная диаграмма платежей простейшего аннуитета имеет вид

0	1	2	...	$n - 2$	$n - 1$	n
	R	R	...	R	R	R
						S
A						

$$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

или $S = Rs(n, i)$, где

$$s(n, i) = \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Функция $s(n, i)$ табулирована для целых значений n и $i > 5$ (см. приложение). Она называется *функцией наращенения*.

Оценка параметров простейшего аннуитета (окончание)

Величины A и S эквивалентны по ставке i . Они связаны соотношением

$$A = S(1 + i)^{-n}.$$

С использованием выражения для S получаем искомое выражение для A :

$$A = R \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i},$$

или $A = Ra(n, i)$, где

$$a(n, i) = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}.$$

Функция $a(n, i)$ табулирована для целых значений n и $i > 5$ (см. приложение). Она называется **функцией дисконтирования**. ◀◀

Пример 1

Для обеспечения будущих расходов создается фонд. Средства в фонд поступают в виде постоянного обыкновенного аннуитета в течение пяти лет. Размер разового платежа 4 млн руб. На взносы ежегодно начисляются проценты по ставке 18,5%. Определим итоговую стоимость фонда. Какую сумму следовало бы поместить на депозит в момент начала срока аннуитета под 18,5% годовых, чтобы через пять лет накопилось сумма, равная итоговой стоимости фонда?

Дано: $t = 5$; $R = 4$; $j_1 = 0,185$.

Найти: S , A .

Решение

Имеем $n = 5$, $i = 0,185$. Тогда

$$S = 4 \frac{(1 + 0,185)^5 - 1}{0,185} = 28,936 \text{ (млн руб.)};$$

$$A = 28,936(1 + 0,185)^{-5} = 12,368 \text{ (млн руб.)}.$$

Пример 2

Владелец малого предприятия предусматривает создание в течение трех лет фонда развития. Для этого ассигнуется ежегодно 41,2 тыс. руб., которые помещаются в банк под 20% годовых. Какая сумма потребовалась бы фирме для создания фонда, если бы она была помещена в банк на три года под 20% годовых?

Дано: $t = 3$; $j_1 = 0,2$; $R = 41,2$.

Найти: A .

Решение

Имеем $n = 3$, $i = 0,2$. Тогда

$$A = 41,2 \frac{1 - (1 + 0,2)^{-3}}{0,2} = 86,79 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Пример 3

Товар стоит 500 тыс. руб. Он может быть приобретен в рассрочку путем начального платежа в сумме 200 тыс. руб. и одинаковых ежемесячных взносов в течение двух лет. Найдем величину ежемесячного платежа, чтобы обеспечить эквивалентность выплат с учетом ставки 12% при начислении процентов ежемесячно.

Дано: $F = 500$; $t = 2$; $R_0 = 200$; $j_{12} = 0,12$.

Найти: R .

Решение

Требуется определить платежи простейшего аннуитета, настоящая стоимость которого равна стоимости товара, подлежащей выплате в рассрочку. Из формулы $A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$ выражаем $R = \frac{Ai}{1 - (1+i)^{-n}}$. Имеем $A = F - R_0 = 500 - 200 = 300$, $n = 24$, $i = 0,01$. Тогда

$$R = \frac{300 \cdot 0,01}{1 - (1 + 0,01)^{-24}} = 14,122 \text{ (тыс. руб.)}$$

Полагающийся аннуитет

Полагающийся аннуитет – аннуитет, платежи которого относятся к начальным моментам интервалов платежа.

Оценка параметров полагающегося аннуитета

▷▷ *Постановка задачи*

Дано:

R — размер платежа;

n — число платежей;

i — сложная процентная ставка при начислении процентов за интервал платежа.

Требуется найти итоговую сумму S и настоящую стоимость A полагающегося аннуитета.

Оценка параметров полагающегося аннуитета (продолжение)

►► Решение задачи

Временная диаграмма платежей полагающегося аннуитета имеет вид

0	1	2	...	$n - 2$	$n - 1$	n
R	R	R	...	R	R	
						S
A						

Для определения итоговой суммы S данный аннуитет можно представить в виде обыкновенного аннуитета с итоговой суммой $S_{(-1)}$, который начинается на один период времени раньше исходного полагающегося аннуитета:

-1	0	1	2	...	$n - 2$	$n - 1$	n
	R	R	R	...	R	R	
						$S_{(-1)}$	
							S

Оценка параметров полагающегося аннуитета (окончание)

Составим уравнение эквивалентности с датой сравнения на конец срока аннуитета с учетом вспомогательной суммы $S_{(-1)}$:

$$S = S_{(-1)}(1 + i), S_{(-1)} = Rs(n, i).$$

Искомая сумма находится из этих соотношений:

$$S = Rs(n, i)(1 + i).$$

Для определения настоящей стоимости A данный аннуитет можно представить как совокупность первого платежа и обыкновенного аннуитета из остальных платежей с настоящей стоимостью $A^{(n-1)}$:

Искомая сумма находится из этих соотношений:

$$A = R + Ra(n - 1, i). \blacktriangleleft\blacktriangleleft$$

Пример 4

Товар куплен в рассрочку ежемесячными платежами по 200 тыс. руб. в течение полутора лет. Первый платеж был сделан в момент покупки. Найдем эквивалентную стоимость товара в момент покупки с учетом годовой номинальной ставки 6% при начислении процентов ежемесячно.

Решение

Имеем $n = 18$, $i = 0,005$. Тогда $A = 200 + 200a(18 - 1; 0,005) = 3451,726$ (тыс. руб.).

Общий аннуитет

Общий аннуитет — это аннуитет, число интервалов платежа которого может не совпадать с числом периодов начисления процентов.

Параметры общего аннуитета находят путем перехода от заданного общего аннуитета к эквивалентному ему простому аннуитету по определенной процентной ставке.

Оценка параметров общего аннуитета

▷▷ Постановка задачи

Дано:

R_p — размер платежа общего аннуитета;

p — число интервалов платежа в год;

i_m — процентная ставка за период начисления;

m — число периодов начисления процентов в год.

Требуется найти размер платежа R_m простого аннуитета, эквивалентного исходному общему аннуитету по ставке i_m , если этот общий аннуитет является: 1) обыкновенным; 2) полагающимся.

Оценка параметров общего аннуитета (продолжение)

Случай 1. Общий аннуитет — обыкновенный.

Совмещенная временная диаграмма за год имеет вид

0	1	2	...	$p - 1$	p
	R_p	R_p	...	R_p	R_p
					S_p
<hr/>					
0	1	2	...	$m - 1$	m
	R_m	R_m	...	R_m	R_m
					S_m

$$R_m = R_p \frac{i_m}{(1+i_m)^{\frac{m}{p}} - 1},$$

или с учетом функции наращенения $s(n, i)$

$$R_m = \frac{R_p}{s\left(\frac{m}{p}, i_m\right)},$$

где $s\left(\frac{m}{p}, i_m\right) = \frac{(1+i_m)^{\frac{m}{p}} - 1}{i_m}$.

Оценка параметров общего аннуитета (окончание)

Случай 2. Общий аннуитет — полагающийся.

Совмещенная временная диаграмма за год имеет вид

0	1	2	...	$p - 1$	p
R_p	R_p	R_p	...	R_p	
					S_p
0	1	2	...	$m - 1$	m
	R_m	R_m	...	R_m	R_m
					S_m

$$R_m = R_p \frac{i_m}{1 - (1 + i_m)^{-\frac{m}{p}}},$$

или с учетом функции дисконтирования $a(n, i)$

$$R_m = \frac{R_p}{a\left(\frac{m}{p}, i_m\right)},$$

где $a\left(\frac{m}{p}, i_m\right) = \frac{1 - (1 + i_m)^{-\frac{m}{p}}}{i_m}$. ◀◀

Пример 6

Работник получает премию 50 тыс. руб. в конце каждого года. Какие ежемесячные выплаты эквивалентны этой сумме при ежемесячном начислении процентов по ставке 6%?

Дано: $R_1 = 50$; $p = 1$; $j_{12} = 0,06$; $m = 12$.

Найти: R_{12} .

Решение --

Имеем $i_{12} = \frac{0,06}{12} = 0,005$. Тогда

$$R_{12} = R_1 \frac{i_{12}}{(1+i_{12})^{\frac{1}{12}} - 1} = 50 \frac{0,005}{(1+0,005)^{\frac{1}{12}} - 1} = 4,05 \text{ (тыс. руб.)}$$

Годовой платеж в данном случае играет роль итоговой стоимости простейшего ежемесячного аннуитета, осуществляемого в течение года.

Пример 7

Определим, как заменить ежеквартальные платежи по 500 тыс. руб. на полугодовые платежи, если применяется процентная ставка 5% при начислении процентов два раза в год и выплаты осуществляются: а) в конце кварталов, б) в начале кварталов.

Дано: $R_4 = 500$; $p = 4$; $j_2 = 0,05$; $m = 2$.

Найти: R_2 .

Решение

Имеем $i_2 = \frac{0,05}{2} = 0,025$. Тогда:

$$\text{а) } R_2 = R_4 \frac{i_2}{(1+i_2)^{\frac{2}{4}} - 1} = 500 \frac{0,025}{(1+0,025)^{\frac{2}{4}} - 1} = 1006,20 \text{ (тыс. руб.)};$$

$$\text{б) } R_2 = R_4 \frac{i_2}{1 - (1+i_2)^{-\frac{2}{4}}} = 500 \frac{0,025}{1 - (1+0,025)^{-\frac{2}{4}}} = 1018,711 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Пример 8

Инвестиции в производство пять лет назад составили 800 тыс. руб. Оценим эффективность вложения этих средств с учетом начисления процентов, если средний размер ежемесячных дивидендов по этим инвестициям составил 15 тыс. руб., а эффективная ставка равна 8%.

Дано: $F = 800$; $R_{12} = 15$; $p = 12$; $t = 5$; $j_1 = 0,08$; $m = 1$.

Найти: A .

Решение

Требуется определить настоящую стоимость A общего ежемесячного аннуитета и сравнить ее с вложенной суммой F . Имеем $n = 5$, $i = i_1 = 0,08$.

Годовой платеж:

$$R_1 = 15 \cdot \frac{0,08}{(1 + 0,08)^{\frac{1}{12}} - 1} = 184,656 \text{ (тыс. руб.)}$$

Настоящая стоимость:

$$A = R_1 \frac{1 - (1 + i_1)^{-n}}{i_1} = 184,656 \frac{1 - (1 + 0,08)^{-5}}{0,08} = 737,277 \text{ (тыс. руб.)}$$

Поскольку $A < F$, то инвестиции использовались неэффективно — выгоднее было деньги положить в банк на депозит под 8% годовых.

Пример 9

Определим, сколько ежемесячных платежей по 5 тыс. руб. нужно перечислить на счет в банке, чтобы погасить задолженность в сумме 100 тыс. руб., включающую проценты при полугодовом начислении, если первая выплата делается через месяц после займа и годовая номинальная ставка равна 18%.

Дано: $R_{12} = 5$; $j_2 = 0,18$; $A = 100$.

Найти: n .

Решение

Сначала перейдем от данного общего к простому аннуитету с полугодовыми выплатами, затем найдем, сколько понадобится полугодий для выплаты долга, и пересчитаем их в месяцы:

$$R_2 = R_{12} \frac{i_2}{(1+i_2)^{\frac{2}{12}} - 1} = 5 \frac{0,09}{(1+0,09)^{\frac{1}{6}} - 1} = 31,106 \text{ (тыс. руб.)};$$

$$A = R_2 \frac{1 - (1+i_2)^{-n}}{i_2}; n = -\log_{1+i_2} \left(1 - \frac{Ai_2}{R_2} \right);$$

$$n = -\log_{1,09} \left(1 - \frac{100 \cdot 0,09}{31,106} \right) = -\log_{1,09} 0,711 = -\frac{\ln 0,711}{\ln 1,09} = 3,958 \text{ полугодий, или } 23,747 \text{ мес.}$$

Отсроченный аннуитет

Отсроченный аннуитет — аннуитет, который начинается позднее по отношению к началу включающей его финансовой операции.

Число интервалов платежа от начала финансовой операции до начала аннуитета называется *периодом отсрочки*.

Приведенная стоимость отсроченного аннуитета — это платеж, отнесенный на начало финансовой операции и эквивалентный данному отсроченному аннуитету по определенной ставке.

Основной задачей при анализе отсроченного аннуитета является определение его приведенной стоимости.

Оценка параметров отсроченного аннуитета

▷▷ *Постановка задачи*

Дано:

R — размер платежа;

n — число платежей;

k — число интервалов платежа в периоде отсрочки;

i — сложная процентная ставка при начислении процентов за интервал платежа.

Требуется определить приведенную стоимость отсроченного аннуитета A .

Оценка параметров отсроченного аннуитета (окончание)

►► Решение задачи

Временная диаграмма платежей отсроченного аннуитета имеет вид

0	1	2	...	k	$k+1$	$k+2$...	$k+n-1$	$k+n$
					1	2	...	$n-1$	n
					R	R	...	R	R

A_0

A

$$A = Ra(n, i)(1+i)^{-k}$$

Пример 10

Компания получила ссуду, которую она будет возмещать, выплачивая по 500 тыс. руб. в год. Первая выплата будет сделана через три года, последняя — через 10 лет от даты заключения сделки. Определим сумму ссуды, если применяется годовая номинальная ставка 16%.

Дано: $R = 500$; $t_1 = 3$; $t_n = 10$; $j_1 = 16\%$.

Найти: A .

Решение

Временная диаграмма имеет вид

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
			1	2	3	4	5	6	7	8
			500	500	500	500	500	500	500	500
A										

Имеем $i = 0,16$; $n = 8$; $k = 2$. Тогда

$$a(8, 0,16) = \frac{1 - (1 + 0,16)^{-8}}{0,16} = 4,344;$$

$$A = 500a(8, 0,16)(1 + 0,16)^{-2} = 1613,999 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Пример 11

Ссуду 200 тыс. руб. с начисляемыми на нее процентами в конце каждого полугодия по ставке 14% годовых требуется погасить десятью полугодовыми взносами. Первая выплата будет сделана через три года после получения ссуды. Какими должны быть эти взносы?

Дано: $A = 200$; $n = 10$; $t_1 = 3$; $j_1 = 0,14$.

Найти: R .

Решение

Временная диаграмма по полугодиям имеет вид

0	1	2	3	4	5	6	7	...	14	15
						1	2	...	9	10
						R	R	...	R	R
200										

Имеем $k = 5$, $i = 0,07$. Тогда

$$200(1 + 0,07)^5 = Ra(10, 0,07), \quad a(10, 0,07) = \frac{1 - (1 + 0,07)^{-10}}{0,07} = 7,024;$$

$$R = \frac{200(1 + 0,07)^5}{a(10, 0,07)} = 39,938 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Бессрочный аннуитет

Бессрочный аннуитет – аннуитет, срок которого неограничен.

Итоговая сумма вечной ренты не имеет смысла, так как платежи продолжают осуществляться неограниченно долго.

Оценка параметров бессрочного аннуитета

▷▷ *Постановка задачи*

Дано:

R — размер платежа;

i — сложная процентная ставка при начислении процентов за интервал платежа.

Требуется определить настоящую стоимость бессрочного аннуитета A .

Пример 12

Компания гарантирует выплату дивидендов в размере 60 тыс. руб. на акцию в конце каждого года в течение неопределенно долгого времени. Имеет ли смысл покупать акции этой компании по цене 700 тыс. руб., если можно поместить деньги в банк на депозит под 8% годовых?

Дано: $F = 350$; $R = 60$; $j_1 = 0,08$.

Найти: A .

Решение

Требуется определить настоящую стоимость данных платежей A и сравнить ее с их заданной начальной стоимостью F . Имеем $i = 0,08$,

$$A = \frac{R}{i} = \frac{60}{0,08} = 750 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Поскольку $A > F$, то акции покупать стоит.

Пример 13

Для обслуживания переезда требуется 10 тыс. руб. в конце каждого месяца. Какую сумму следует инвестировать компании, чтобы на получаемые проценты поддерживать обслуживание переезда? Эффективная ставка равна 6%.

Дано: $R_{12} = 10$; $r = 0,06$.

Найти: A .

Решение

Здесь имеет место общий аннуитет. Сначала найдем эквивалентный данному месячному годовому платеж по формуле $R_m = R_p \frac{i_m}{(1+i_m)^{\frac{p}{m}} - 1}$, а затем используем формулу для вычисления бессрочного аннуитета. Имеем $m = 1$, $p = 12$, $i_1 = 0,06$,

$$R_1 = 10 \frac{0,06}{(1+0,06)^{\frac{1}{12}} - 1} = 123,265; A = \frac{123,265}{0,06} = 2054,421 \text{ (тыс. руб.)}$$

Непрерывный аннуитет

Непрерывный аннуитет – это аннуитет, платежи которого производятся непрерывно.

Оценка параметров непрерывного аннуитета

▷▷ *Постановка задачи*

Дано:

W — размер суммарного годового платежа;

δ — непрерывная процентная ставка (сила роста);

t — время (в годах).

Требуется определить настоящую стоимость A и итоговую сумму S непрерывного аннуитета за t лет.

Оценка параметров непрерывного аннуитета

▷▷ Постановка задачи

Дано:

W — размер суммарного годового платежа;

δ — непрерывная процентная ставка (сила роста);

t — время (в годах).

Требуется определить настоящую стоимость A и итоговую сумму S непрерывного аннуитета за t лет.

▶▶ Решение задачи

$$S = W \frac{e^{\delta t} - 1}{\delta}; A = W \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta}. \blacktriangleleft \blacktriangleleft$$

Пример 14

Ожидается, что доходы от инвестиционного проекта будут поступать непрерывно и равномерно в течение 10 лет, составляя 1 млн руб. в год. Определим стоимость доходов на начало проекта с учетом силы роста 10%.

Дано: $W = 1000$; $t = 10$; $\delta = 0,1$.

Найти: A .

Решение

$$A = W \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta} = 1000 \frac{1 - e^{-0,1 \cdot 10}}{0,1} = 6321,206 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Переменный аннуитет

Переменный аннуитет — аннуитет, платежи которого имеют неодинаковый размер.

Если нет явной закономерности при изменении размера платежей, вычисление искомых параметров переменного аннуитета производят с помощью уравнений эквивалентности.

Оценка параметров переменного аннуитета. Случай арифметической прогрессии

▷▷ *Постановка задачи*

Дано:

R — размер первого платежа;

z — разность арифметической прогрессии;

i — сложная процентная ставка при начислении процентов за интервал платежа.

Требуется определить настоящую стоимость A и итоговую сумму S переменного аннуитета с платежами, изменяющимися по закону арифметической прогрессии.

Оценка параметров переменного аннуитета. Случай арифметической прогрессии

▷▷ *Постановка задачи*

Дано:

R — размер первого платежа;

z — разность арифметической прогрессии;

i — сложная процентная ставка при начислении процентов за интервал платежа.

Требуется определить настоящую стоимость A и итоговую сумму S переменного аннуитета с платежами, изменяющимися по закону арифметической прогрессии.

▶▶ *Решение задачи*

Временная диаграмма аннуитета имеет вид

0	1	2	3	...	$n-2$	$n-1$	n
	R	$R+z$	$R+2z$...	$R+(n-3)z$	$R+(n-2)z$	$R+(n-1)z$
							S
A							

$$S = \left(R + \frac{z}{i} \right) s(n, i) - \frac{zn}{i}; \quad A = \left(R + \frac{z}{i} \right) a(n, i) - \frac{zn}{i(1+i)^n}.$$

Пример 15

На счет в банке в течение шести лет в конце года будут поступать денежные суммы, первая из которых равна 5 тыс. руб., а каждая следующая будет увеличиваться на 400 руб. Найдем настоящую стоимость и итоговую сумму этого аннуитета, если проценты начисляются по ставке 10% один раз в конце года.

Дано: $R = 5$; $z = 0,4$; $t = 6$; $j_1 = 0,1$.

Найти: S , A .

Решение

Имеем $i = 0,1$, $n = 6$. Тогда

$$S = \left(5 + \frac{0,4}{0,1} \right) s(6, 0,1) - \frac{0,4 \cdot 6}{0,1} = 45,441 \text{ (тыс. руб.)};$$

$$A = \left(5 + \frac{0,4}{0,1} \right) a(6, 0,1) - \frac{0,4 \cdot 6}{0,1(1 + 0,1)^6} = 25,650 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Оценка параметров переменного аннуитета. Случай геометрической прогрессии

▷▷ Постановка задачи

Дано:

R — размер первого платежа;

q — знаменатель геометрической прогрессии;

i — сложная процентная ставка при начислении процентов за интервал платежа.

Требуется определить настоящую стоимость A и итоговую сумму S переменного аннуитета с платежами, изменяющимися по закону геометрической прогрессии.

▶▶ Решение задачи

Временная диаграмма аннуитета имеет вид

0	1	2	3	...	$n-2$	$n-1$	n
	R	Rq	Rq^2	...	Rq^{n-3}	Rq^{n-2}	Rq^{n-1}
							S
A							

$$S = R \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}; \quad A = \frac{R}{(1+i)^n} \cdot \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}.$$

Пример 16

На счет в банке поступают в течение пяти лет в конце года платежи. Первый платеж равен 3 тыс. руб., а каждый следующий по отношению к предыдущему увеличивается на 15%. Определим итоговую сумму и настоящую стоимость этого аннуитета, если банк начисляет в конце каждого года сложные проценты по ставке 12%.

Дано: $R = 3$; $h = 15\%$; $t = 5$; $j_1 = 0,12$.

Найти: S , A .

Решение

Имеем $i = 0,12$; $n = 5$; $q = 1,15$. Тогда

$$S = 3 \frac{1,15^5 - (1 + 0,12)^5}{1,15 - (1 + 0,12)} = 24,902 \text{ (тыс. руб.)};$$

$$A = \frac{3}{(1 + 0,12)^5} \cdot \frac{1,15^5 - (1 + 0,12)^5}{1,15 - (1 + 0,12)} = 14,130 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Бессрочный переменный аннуитет. Случай геометрической прогрессии

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R}{(1+i)^n} \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)} = \lim_{n \rightarrow \infty} R \frac{\frac{q^n}{(1+i)^n} - 1}{q - (1+i)}.$$

При $q < 1 + i$ искомая величина A определяется выражением

$$A = \frac{R}{(1+i) - q},$$

которое называется **моделью постоянного роста** и является обобщением модели настоящей стоимости постоянного бессрочного аннуитета (при $q = 1$).

Модель постоянного роста используется для определения истинной стоимости обыкновенной акции, когда дивиденды растут в геометрической прогрессии.

Модели аннуитета

Вид аннуитета	Итоговая сумма	Настоящая стоимость	Исходные показатели
Простейший аннуитет	$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$	$A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$	<p>R – размер платежа; i – ставка за интервал платежа; n – число интервалов платежа; k – число периодов отсрочки; δ – сила роста; W – суммарный платеж за год; z – разность арифметической прогрессии; q – знаменатель геометрической прогрессии</p>
Полагающийся аннуитет	$S = Rs(n, i)(1+i)$	$A = R + Ra(n-1, i)$	
Отсроченный аннуитет	$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$	$A = Ra(n, i)(1+i)^{-k}$	
Бессрочный постоянный аннуитет	–	$A = \frac{R}{i}$	
Непрерывный аннуитет	$S = W \frac{e^{\delta t} - 1}{\delta}$	$A = W \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta}$	
Переменный аннуитет, арифметическая прогрессия	$S = \left(R + \frac{z}{i} \right) s(n, i) - \frac{zn}{i}$	$A = \left(R + \frac{z}{i} \right) a(n, i) - \frac{zn}{i(1+i)^n}$	
Переменный аннуитет, геометрическая прогрессия	$S = R \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}$	$A = \frac{R}{(1+i)^n} \cdot \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}$	
Переменный бессрочный аннуитет, геометрическая прогрессия	–	$A = \frac{R}{q - (1+i)}$	