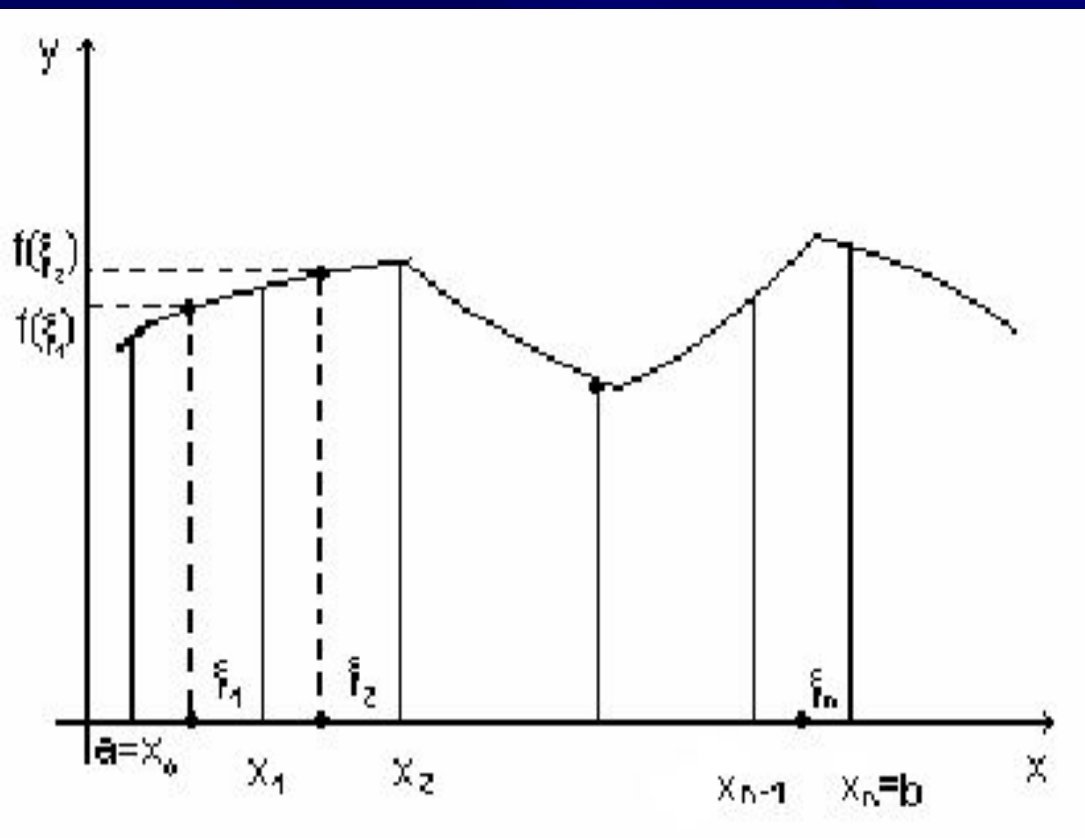


Определенный интеграл



Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $(a;b)$. Разобьем отрезок на n частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b,$$

выберем на каждом элементарном отрезке $[x_{k-1}; x_k]$ произвольную точку ξ_k , вычислим значение $f(x)$ в каждой из этих точек и обозначим через Δx_k длину каждого такого отрезка.

$$(k = 1, 2, \dots, n)$$

Определение 1:

Сумма вида $f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + f(\xi_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$

называется интегральной суммой для $f(x)$ на отрезке $[a; b]$

Определение 2:

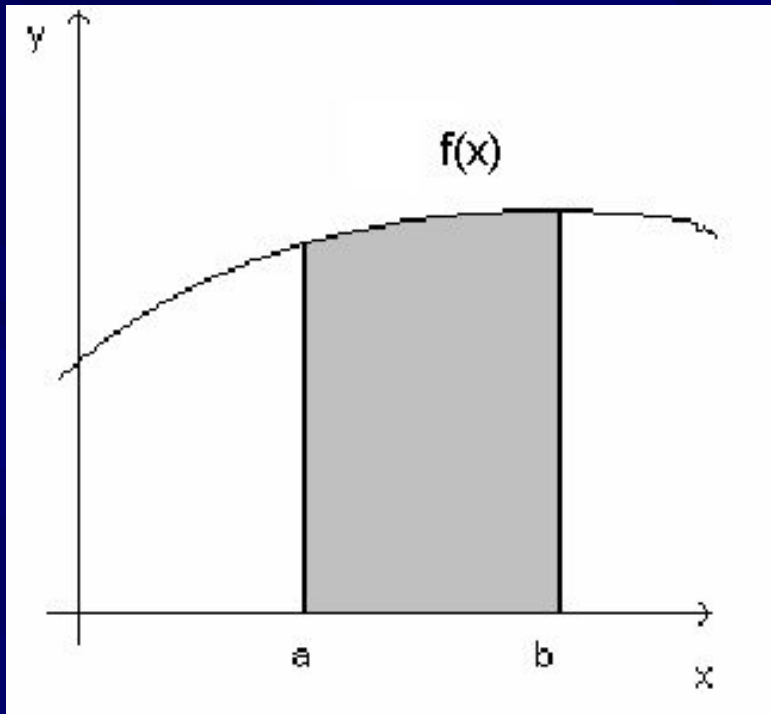
Устремим максимальную длину отрезков к нулю. При этом

$n \rightarrow \infty$. Тогда интегральная сумма стремится к некоторому пределу

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_k \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx$$

называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ (или в отрезке от a до b). a и b называются нижним и верхним пределом интегрирования.

Геометрический смысл



Если $f(x) > 0$ на $[a; b]$, то $\int_a^b f(x) dx$ численно равен площади криволинейной трапеции – фигуры, ограниченной линиями $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=0$.

Основные свойства определенного интеграла

1) Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad - \text{ формула}$$

Ньютона-Лейбница

Здесь $F(x)$ – первообразная для $f(x)$.

$$2) \int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

$$3) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Т.е. при перестановке пределов интегрирования меняется знак интеграла.

$$4) \int_a^a f(x) dx = 0$$

Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен 0.

$$5) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Т.е. отрезок интегрирования можно разбивать на части.

$$6) \int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$$

Примеры

1. Вычислить

$$\int_1^2 5x^4 dx$$

Найдем первообразную $\int_1^2 5x^4 dx = 5 \int x^4 dx = 5 \cdot \frac{x^5}{5} + C = x^5 + C$

Возьмем $F(x) = x^5 (C = 0)$

Тогда получаем по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_1^2 5x^4 dx = x^5 \Big|_1^2 = 2^5 - 1^5 = 31$$

2. Вычислить $\int_0^4 (3x - e^{\frac{x}{4}}) dx$

Найдем первообразную

$$\int (3x - e^{\frac{x}{4}}) dx = \int 3x dx - \int e^{\frac{x}{4}} dx = \frac{3}{2} x^2 - 4e^{\frac{x}{4}} + C$$

Выберем

$$F(x) = \frac{3}{2} x^2 - 4e^{\frac{x}{4}}$$

Тогда

$$\int_0^4 (3x - e^{\frac{x}{4}}) dx = \left(\frac{3}{2} x^2 - 4e^{\frac{x}{4}} \right) \Big|_0^4 = \frac{3}{2} \cdot 16 - 4e - (0 - 4 \cdot e^0) = 28 - 4e$$

Спасибо за внимание!!!