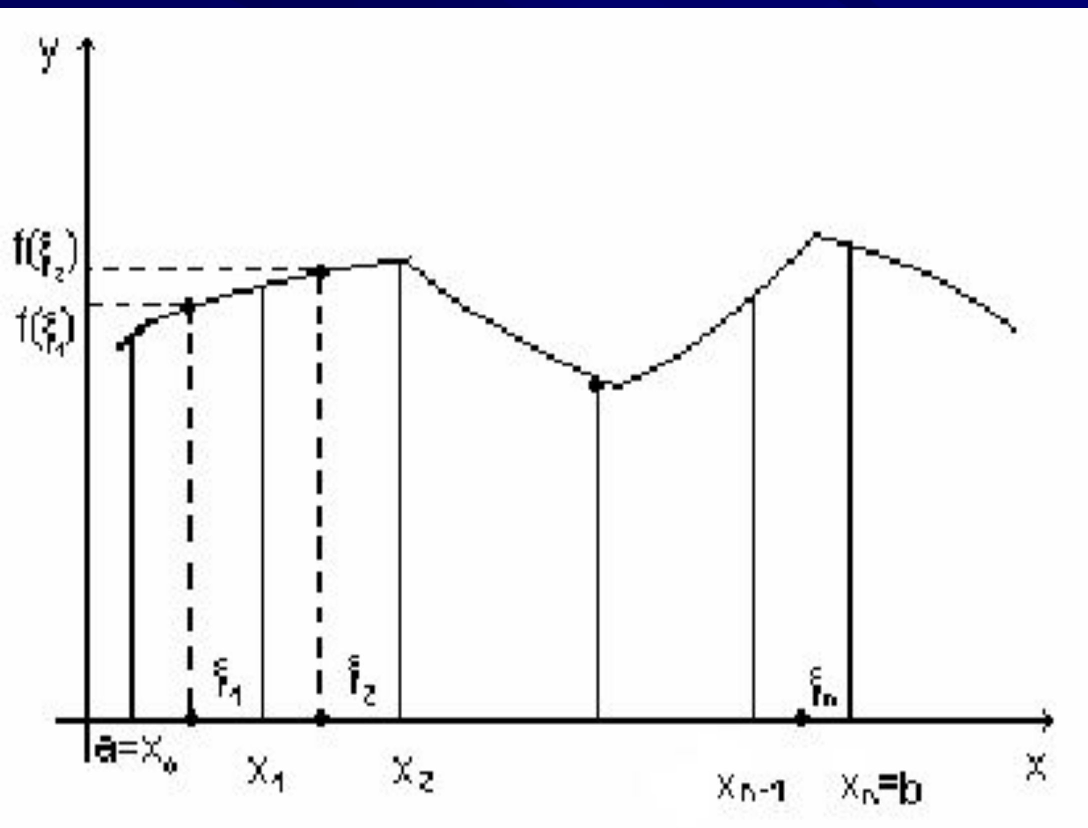
Определенный интеграл



Пусть функция f(x) определена на отрезке (a;b). Разобьем отрезок на n частей точками

$$a = x_0 \angle x_1 \angle x_2 \angle \ldots \angle x_n = b,$$

выберем на каждом элементарном отрезке $[x_{k-1}; x_k]$ произвольную точку ξ_k, вычислим значение f(x) в каждой из этих точек и обозначим через Δx_k длину каждого такого отрезка.

$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

Определение 1:

Сумма вида $f(\xi_1)\cdot\Delta x_1 + f(\xi_2)\cdot\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\cdot\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$

называется интегральной суммой для f(x) на отрезке $[a;b]$

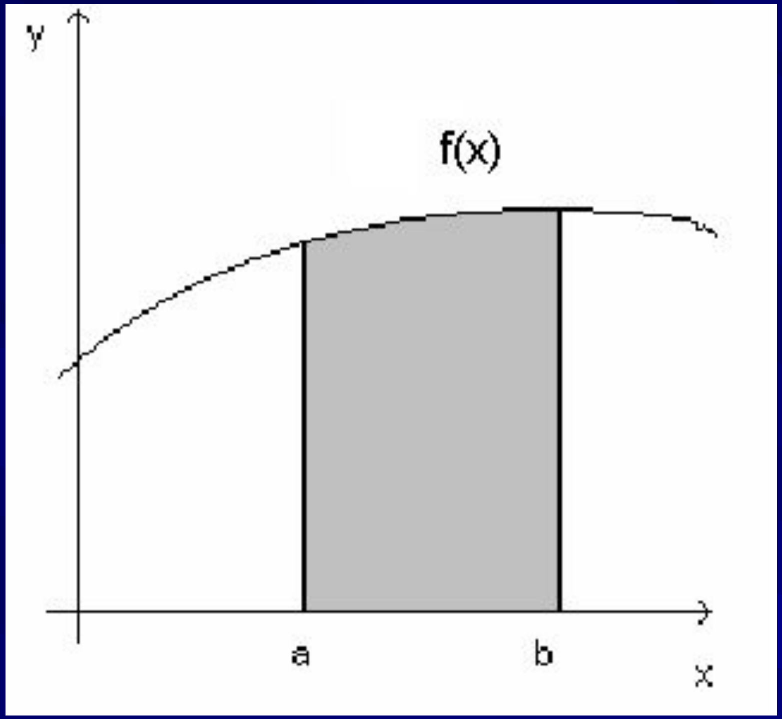
Определение 2:

Устремим максимальную длину отрезков к нулю. При этом $n\to\infty$. Тогда интегральная сумма стремится к некоторому пределу

$$\lim_{\substack{\max\Delta x_k\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$$

называется определенным интегралом от функции f(x) на отрезке $[a;b]$ (или в отрезке от a до b). a и b называются нижним и верхним пределом интегрирования.

Геометрический смысл



Если $f(x) > 0$ на $[a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции – фигуры, ограниченной линиями y=f(x), x=a, x=b, y=a.

Основные свойства определенного интеграла

1) Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

- формула Ньютона-Лейбница

Здесь F(x) – первообразная для f(x).

2) $$\int_a^b \left(f_1(x) + f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

3) $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Т.е. при перестановке пределов интегрирования меняется знак интеграла.

4) $$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен 0.

5) $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Т.е. отрезок интегрирования можно разбивать на части.

6) $$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

Примеры

1.Вычислить $\int_1^2 5x^4dx$

Найдем первообразную $\int_1^2 5x^4dx = 5\int x^4dx = 5\cdot\frac{x^5}{5} + C = x^5 + C$

Возьмем $F(x) = x^5 (C = 0)$

Тогда получаем по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_1^2 5x^4dx = x^5\Big|_1^2 = 2^5 - 1^5 = 31$$

2. Вычислить $\int_0^4 (3x - e^{\frac{x}{4}})dx$

Найдем первообразную

$$\int (3x - e^{\frac{x}{4}})dx = \int 3x dx - \int e^{\frac{x}{4}} dx = \frac{3}{2}x^2 - 4e^{\frac{x}{4}} + C$$

Выберем

$$F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4e^{\frac{x}{4}}$$

Тогда

$$\int_0^4 (3x - e^{\frac{x}{4}})dx = (\frac{3}{2}x^2 - 4e^{\frac{x}{4}})\Big|_0^4 = \frac{3}{2}\cdot 16 - 4e - (0 - 4\cdot e^0) = 28 - 4e$$

Спасибо за внимание!!!