17.12.20.

Тема:
Наибольшее наименьшее значение функции на промежутке. Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах.

Учащиеся должны освоить теоретическую часть и прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:
https://youtu.be/BjinC6cN2ds

Теоретическая часть:

Прочитать.

Формулы и определения, выделенные жирным шрифтом – выучить

Наибольшее и наименьшее значения функции

1. На практике часто приходится решать задачи, в которых требуется найти *наибольшее* или *наименьшее значение* из всех тех значений, которые функция принимает *на отрезке*.

Рассмотрим, например, график функции $f(x) = 1 + 2x^2 - x^4$ на отрезке $[-1; 2]$. Этот график был построен в предыдущем параграфе (см. рис. 135).

Из рисунка видно, что наибольшее значение на этом отрезке, равное 2, функция принимает в двух точках $x = -1$ и $x = 1$; наименьшее значение, равное -7, функция принимает при $x = 2$. Точка $x = 0$ является точкой минимума функции $f(x) = 1 + 2x^2 - x^4$. Это означает, что есть такая окрестность точки $x = 0$, например интервал $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, что наименьшее значение в этой окрестности функция принимает при $x = 0$. Однако на большем промежутке, например на отрезке $[-1; 2]$, наименьшее

что наименьшее значение в этой окрестности функция принимает при $x = 0$. Однако на большем промежутке, например на отрезке $[-1; 2]$, наименьшее
значение функция принимает не в точке минимума, а на конце отрезка. Таким образом, для нахождения наименьшего значения функции на отрезке нужно сравнить её значения в точках минимума и на концах отрезка.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет несколько критических точек на этом отрезке.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a; b]$ нужно:

1) найти значения функции на концах отрезка, т. е. числа $f(a)$ и $f(b)$;

2) найти её значения в тех критических точках, которые принадлежат интервалу $(a; b)$;

3) из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Задача Функция $f(x)=x^3+\frac{3}{x}$ непрерывна на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Найти её наибольшее и наименьшее значения.

▶ 1) $f\left(\frac{1}{2}\right)=6\frac{1}{8}$, $f(2)=9\frac{1}{2}$.

2) $f'(x)=3x^2-\frac{3}{x^2}=\frac{3x^4-3}{x^2}$, $3x^4-3=0$, $x_1=1$, $x_2=-1$.

Интервалу $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ принадлежит одна стационарная точка $x_1=1$, $f(1)=4$.

3) Из чисел $6\frac{1}{8}$, $9\frac{1}{2}$ и 4 наибольшее $9\frac{1}{2}$, наименьшее 4.

Ответ Наибольшее значение функции равно $9\frac{1}{2}$, наименьшее равно 4. ◁

Задача Функция $f(x)=x+\frac{1}{x}$ непрерывна на отрезке $[2; 4]$. Найти её наибольшее и наименьшее значения.

▶ 1) $f(2)=2{,}5$, $f(4)=4{,}25$.

2) $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$, $1-\frac{1}{x^2}=0$, $x_1=-1$, $x_2=1$.

На интервале $(2; 4)$ стационарных точек нет.

3) Из чисел 2,5 и 4,25 наибольшее 4,25, наименьшее 2,5.

Ответ Наибольшее значение функции равно 4,25, наименьшее равно 2,5. ◁

2. При решении многих задач часто приходится находить наибольшее или наименьшее значение функции не на отрезке, а на *интервале*.

Нередко встречаются задачи, в которых функция $f(x)$ имеет на заданном интервале только одну стационарную точку: либо точку максимума, либо точку минимума. В этих случаях в точке максимума функция $f(x)$ принимает наибольшее значение на данном интервале (рис. 138, *а*); а в точке минимума — наименьшее значение на данном интервале (рис. 138, *б*).

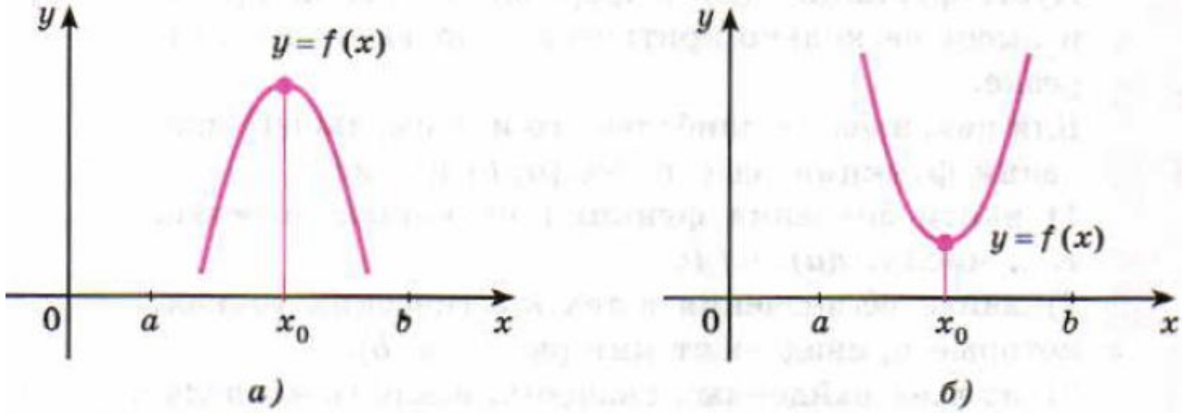

Рис. 138

Задача Число 36 записать в виде произведения двух положительных чисел, сумма которых наименьшая.

▶ Пусть первый множитель равен x, тогда второй множитель равен $\frac{36}{x}$. Сумма этих чисел равна $x + \frac{36}{x}$.

По условию задачи x — положительное число. Таким образом, задача свелась к нахождению такого значения x, при котором функция $f(x) = x + \frac{36}{x}$ принимает наименьшее значение на интервале $(0; +\infty)$.

Найдём производную:

$$f'(x) = 1 - \frac{36}{x^2} = \frac{(x+6)(x-6)}{x^2}.$$

Стационарные точки $x_1 = 6$ и $x_2 = -6$. На интервале $(0; +\infty)$ есть только одна стационарная точка $x = 6$. При переходе через точку $x = 6$ производная меняет знак с «–» на «+», и поэтому $x = 6$ — точка минимума. Следовательно, наименьшее значение на интервале $(0; +\infty)$ функция $f(x) = x + \frac{36}{x}$ принимает в точке $x = 6$ (это значение $f(6) = 12$).

Ответ $36 = 6 \cdot 6$. ◁

Практическая часть.

936 Используя график функции (рис. 140), найти её точки экстремума, а также наибольшее и наименьшее значения.

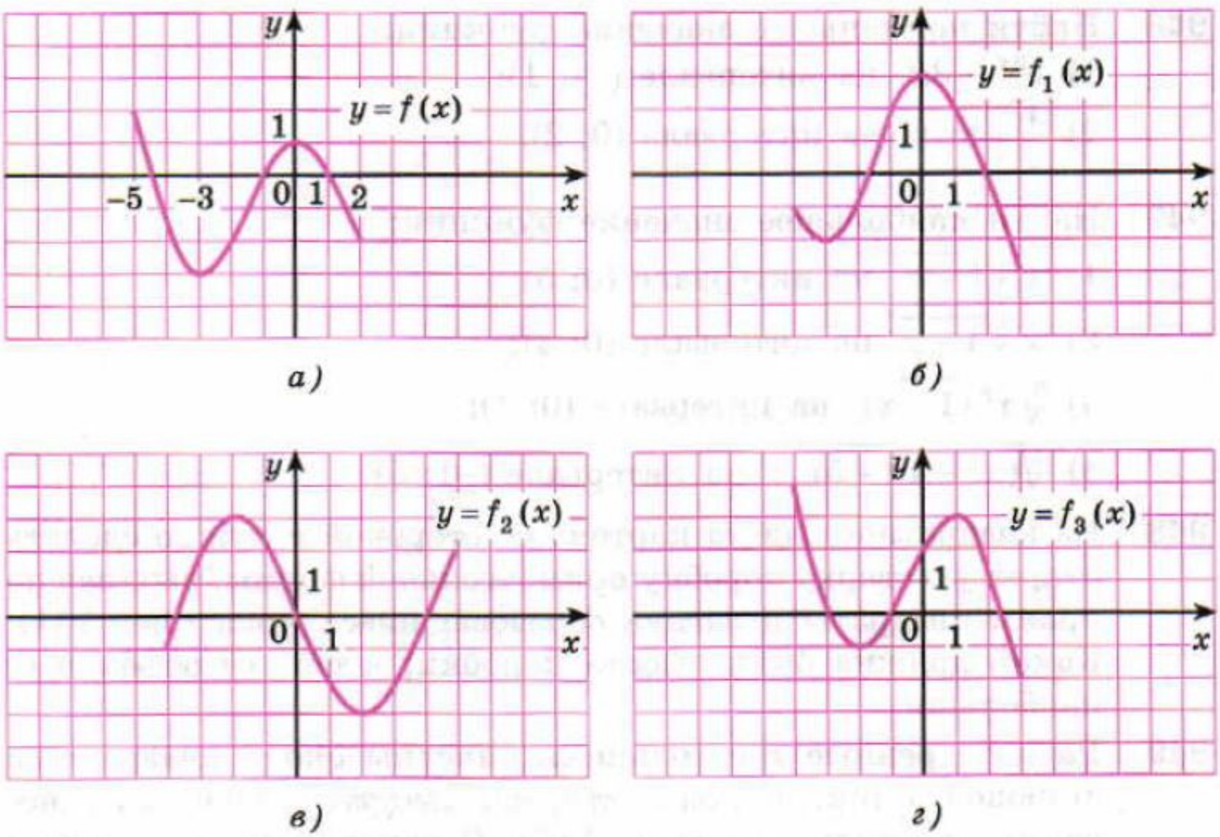

Рис. 140

937 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$:

1) на отрезке $[-4; 3]$; 2) на отрезке $[-2; 1]$.

938 Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$ на отрезке $[-3; 2]$;

2) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ на отрезке $[-2; -0{,}5]$;

3) $f(x) = \sin x + \cos x$ на отрезке $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.