

17.12.20.

Тема:

Наибольшее наименьшее значение функции на промежутке. Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах.

*Учащиеся должны освоить теоретическую часть и прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.*

Видео для усвоения материала:

<https://youtu.be/BjinC6cN2ds>

## Теоретическая часть:

Прочитать.

Формулы и определения, выделенные жирным шрифтом – выучить

### Наибольшее и наименьшее значения функции

1. На практике часто приходится решать задачи, в которых требуется найти *наибольшее* или *наименьшее значение* из всех тех значений, которые функция принимает *на отрезке*.

Рассмотрим, например, график функции  $f(x) = 1 + 2x^2 - x^4$  на отрезке  $[-1; 2]$ . Этот график был построен в предыдущем параграфе (см. рис. 135).

Из рисунка видно, что наибольшее значение на этом отрезке, равное 2, функция принимает в двух точках  $x = -1$  и  $x = 1$ ; наименьшее значение, равное  $-7$ , функция принимает при  $x = 2$ . Точка  $x = 0$  является точкой минимума функции  $f(x) = 1 + 2x^2 - x^4$ . Это означает, что есть такая окрестность точки  $x = 0$ , например интервал  $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ,

что наименьшее значение в этой окрестности функция принимает при  $x = 0$ . Однако на большем промежутке, например на отрезке  $[-1; 2]$ , наименьшее значение в этой окрестности функция принимает при  $x = 0$ . Однако на большем промежутке, например на отрезке  $[-1; 2]$ , наименьшее значение функция принимает не в точке минимума, а на конце отрезка. Таким образом, для нахождения наименьшего значения функции на отрезке нужно сравнить её значения в точках минимума и на концах отрезка.



Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$  и имеет несколько критических точек на этом отрезке.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке  $[a; b]$  нужно:

- 1) найти значения функции на концах отрезка, т. е. числа  $f(a)$  и  $f(b)$ ;
- 2) найти её значения в тех критических точках, которые принадлежат интервалу  $(a; b)$ ;
- 3) из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

**Задача**      Функция  $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$  непрерывна на отрезке  $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ .

Найти её наибольшее и наименьшее значения.

► 1)  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6\frac{1}{8}, f(2) = 9\frac{1}{2}$ .

2)  $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2} = \frac{3x^4 - 3}{x^2}, 3x^4 - 3 = 0, x_1 = 1, x_2 = -1$ .

Интервалу  $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$  принадлежит одна стационарная точка  $x_1 = 1, f(1) = 4$ .

3) Из чисел  $6\frac{1}{8}, 9\frac{1}{2}$  и  $4$  наибольшее  $9\frac{1}{2}$ , наименьшее  $4$ .

**Ответ**

Наибольшее значение функции равно  $9\frac{1}{2}$ , наименьшее равно  $4$ . ◁

**Задача**

Функция  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  непрерывна на отрезке  $[2; 4]$ .

Найти её наибольшее и наименьшее значения.

► 1)  $f(2) = 2,5, f(4) = 4,25$ .

2)  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, 1 - \frac{1}{x^2} = 0, x_1 = -1, x_2 = 1$ .

На интервале  $(2; 4)$  стационарных точек нет.

3) Из чисел  $2,5$  и  $4,25$  наибольшее  $4,25$ , наименьшее  $2,5$ .

**Ответ**

Наибольшее значение функции равно  $4,25$ , наименьшее равно  $2,5$ . ◁

2. При решении многих задач часто приходится находить наибольшее или наименьшее значение функции не на отрезке, а на *интервале*.

Нередко встречаются задачи, в которых функция  $f(x)$  имеет на заданном интервале только одну стационарную точку: либо точку максимума, либо точку минимума. В этих случаях в точке максимума функция  $f(x)$  принимает наибольшее значение на данном интервале (рис. 138, а); а в точке минимума — наименьшее значение на данном интервале (рис. 138, б).

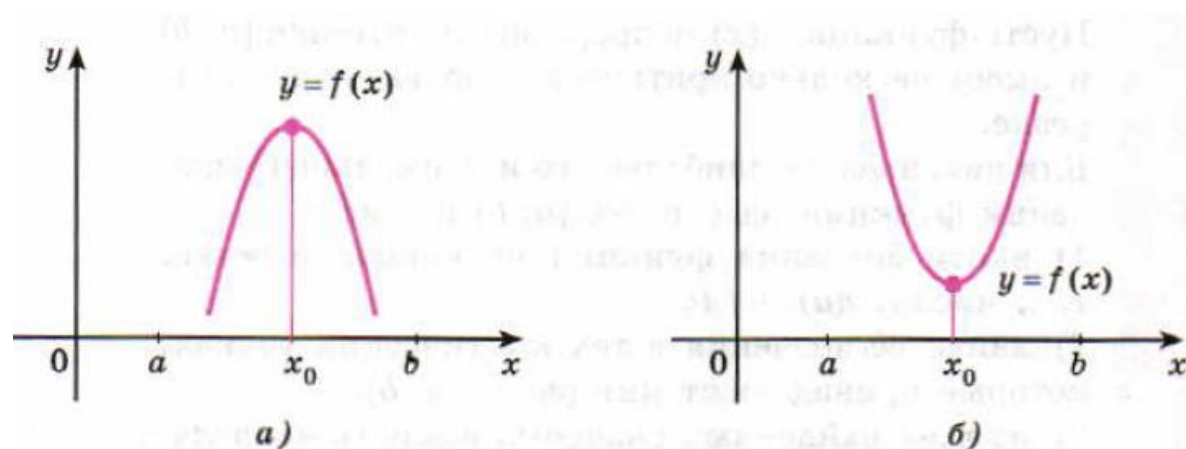


Рис. 138

### Задача

Число 36 записать в виде произведения двух положительных чисел, сумма которых наименьшая.

► Пусть первый множитель равен  $x$ , тогда второй множитель равен  $\frac{36}{x}$ . Сумма этих чисел равна  $x + \frac{36}{x}$ .

По условию задачи  $x$  — положительное число. Таким образом, задача свелась к нахождению такого значения  $x$ , при котором функция  $f(x) = x + \frac{36}{x}$  принимает наименьшее значение на интервале  $(0; +\infty)$ .

Найдём производную:

$$f'(x) = 1 - \frac{36}{x^2} = \frac{(x+6)(x-6)}{x^2}.$$



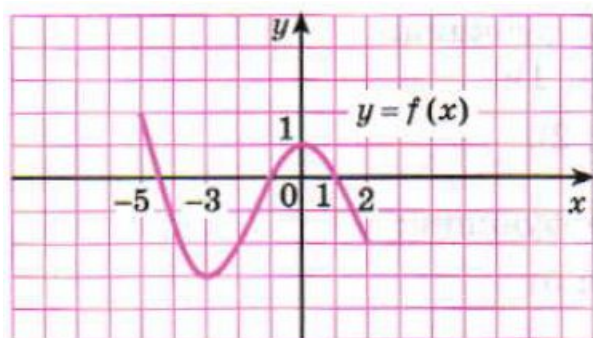
Стационарные точки  $x_1 = 6$  и  $x_2 = -6$ . На интервале  $(0; +\infty)$  есть только одна стационарная точка  $x = 6$ . При переходе через точку  $x = 6$  производная меняет знак с «-» на «+», и поэтому  $x = 6$  — точка минимума. Следовательно, наименьшее значение на интервале  $(0; +\infty)$  функция  $f(x) = x + \frac{36}{x}$  принимает в точке  $x = 6$  (это значение  $f(6) = 12$ ).

**Ответ**

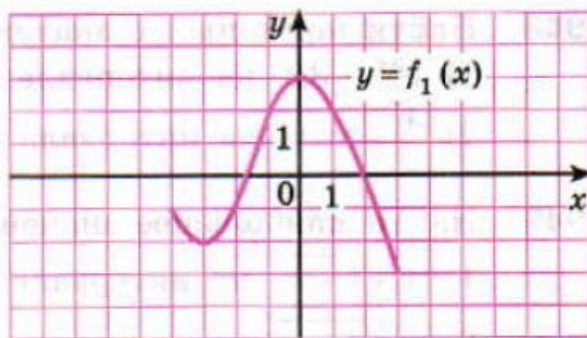
$36 = 6 \cdot 6$ .  $\triangleleft$

## Практическая часть.

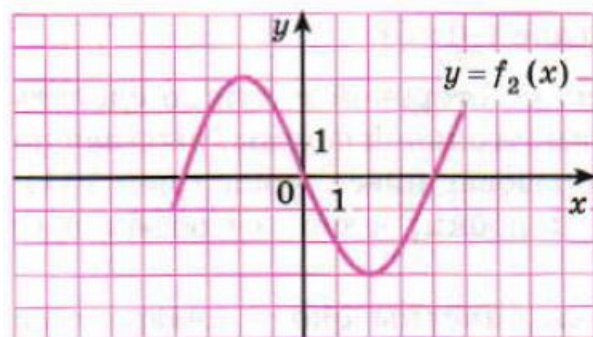
**936** Используя график функции (рис. 140), найти её точки экстремума, а также наибольшее и наименьшее значения.



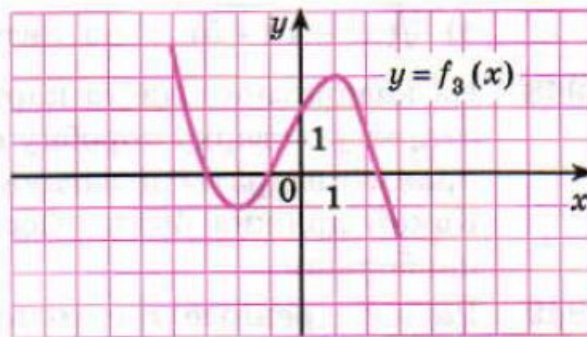
а)



б)



в)



г)

Рис. 140

**937** Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ :

- 1) на отрезке  $[-4; 3]$ ; 2) на отрезке  $[-2; 1]$ .

**938** Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1)  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$  на отрезке  $[-3; 2]$ ;

2)  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  на отрезке  $[-2; -0,5]$ ;

3)  $f(x) = \sin x + \cos x$  на отрезке  $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ .