Уравнения и неравенства. Системы уравнений

несколько неравенств с одной переменной образуют **систему неравенств**, если ставится задача найти все общие решения заданных неравенств

Значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в верное числовое неравенство, называют частным решением системы неравенств.

Множество всех частных решений системы неравенств представляет собой **общее решение системы неравенств** (чаще говорят просто решение системы неравенств).

Решить систему неравенств – значит найти все её частные решения, либо доказать , что у данной системы решений нет.

Решение системы неравенств – это пересечение решений неравенств, входящих в систему.

Запомните! Решение системы неравенств – это пересечение решений неравенств, входящих в систему.

Неравенства, входящие в систему, объединяются фигурной скобкой.

Алгоритм решения системы неравенств с одной переменной:

1. отдельно решить каждое неравенство;
2. найти пересечение найденных решений.

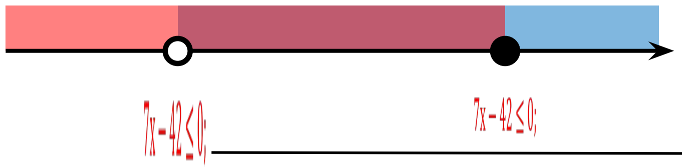
Это пересечение и является множеством решений системы неравенств

Пример 1. Решить систему неравенств $\left[\begin{array}{l} 7x-42\le 0; \\ 7x-42\le 0; \end{array}\right.$

Решение.

$$\left[\begin{array}{l} 7x-42\le 0; \\ 7x-42\le 0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 7x-42\le 0; \\ 7x-42\le 0; \end{array}\right.$$



Отметим эти промежутки на координатной прямой. Решение первого неравенства помечено штриховкой снизу, второго неравенства – штриховкой сверху. Решением системы неравенств будет пересечение решений неравенств, то есть промежуток, на котором обе штриховки совпали.
В итоге получаем полуинтервал от семи вторых до шести, включая шесть.

$$7x-42\le 0;$$

$$7x-42\le 0;$$

Пример 2. Решить систему неравенств $\begin{cases} 7x - 42 \le 0; \\ 7x - 42 \le 0; \end{cases}$

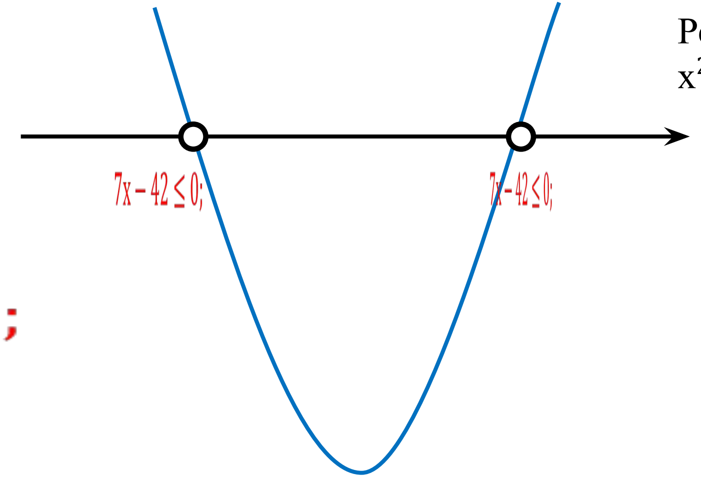
Решение.

$7x - 42 \le 0;$

$7x - 42 \le 0;$

$7x - 42 \le 0;$

$7x - 42 \le 0;$



Решим первое неравенство — $x^2+x-6>0$

Рассмотрим функцию $y= x^2+x-6$

Нули функции: $x_1= -3$, $x_2=2$.

Изображая схематически параболу, найдем, что решением первого неравенства является объединение открытых числовых лучей $y>0$ при $x \in (-\infty;-3) \cup (2;+\infty)$.

Пример 2. Решить систему неравенств $\begin{cases} 7x - 42 \le 0; \\ 7x - 42 \le 0; \end{cases}$

Решение. Решим второе неравенство системы $x^2+x+6>0$. Рассмотрим функцию $y= x^2+x+6$.

$7x - 42 \le 0;$

$7x - 42 \le 0;$

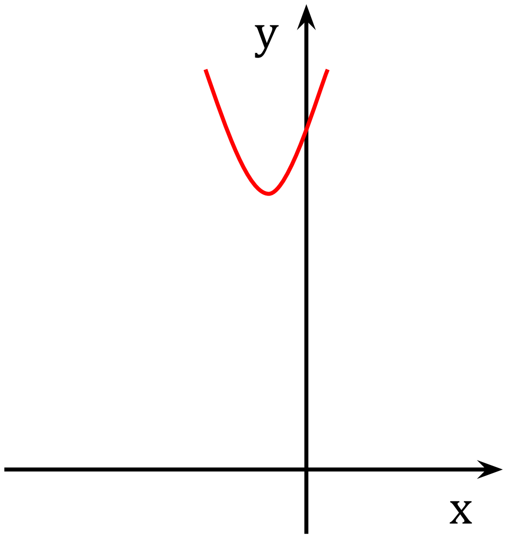
$7x - 42 \le 0;$

$7x - 42 \le 0;$

$x^2 + x + 6 > 0;$

$y = x^2 + x + 6;$

$D = -23 < 0;$



Дискриминант равен D= -23<0, значит, функция не имеет нулей.
Парабола не имеет общих точек с осью Ox.
Изображая схематически параболу, найдем,
что решением неравенства является множество всех чисел

Пример 2. Решить систему неравенств $\begin{cases} 7x - 42 \le 0; \\ 7x - 42 \le 0; \end{cases}$

Решение.

$7x - 42 \le 0;$

$7x - 42 \le 0;$

$7x - 42 \le 0;$

$7x - 42 \le 0;$

$7x - 42 \le 0;$

$x^2 + x + 6 > 0;$

$y = x^2 + x + 6;$

$D = -23 < 0;$

$7x - 42 \le 0;$

Изобразим на координатной прямой решения неравенств системы.

Из рисунка видно, что решением системы является объединение открытых числовых лучей от минус бесконечности до минус трех и от двух до плюс бесконечности.

Ответ: объединение открытых числовых лучей от минуса бесконечности до минус трех и от двух до плюс бесконечности.

Говорят, что несколько неравенств с одной переменной образуют совокупность неравенств, если ставится задача найти все такие значения переменной, каждое из которых является решением, хотя бы одного из заданных неравенств.

Каждое такое значение переменной называют частным решением совокупности неравенств.

Запомните! Решение совокупности неравенств – объединение решений неравенств, входящих в совокупность.
Неравенства, входящие в совокупность, объединяются квадратной скобкой.

Множество всех частных решений совокупности неравенств представляет собой общее решение совокупности неравенств.

Алгоритм решения совокупности неравенств:

1. отдельно решить каждое неравенство;
2. найти объединение найденных решений.

Это объединение и является решением совокупности неравенств.

Пример 4. Решить совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l} 7x - 42 \le 0; \\ 7x - 42 \le 0; \end{array}\right.$$

Решение.

$$\left[\begin{array}{l} 7x - 42 \le 0; \\ 7x - 42 \le 0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 7x - 42 \le 0; \\ 7x - 42 \le 0; \end{array}\right.$$

$7x - 42 \le 0;$

$7x - 42 \le 0;$

Решение

Преобразуем каждое из неравенств. Получим равносильную совокупность неравенств

Для первого неравенства множеством решений служит промежуток от семи третьих до плюс бесконечности, а для второго – промежуток от одной четвертой до плюс бесконечности.

Изобразим на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих неравенствам икс больше семи третьих и икс больше одной четвертой.

Находим, что объединением этих множеств, т.е. решением данной совокупности неравенств, является открытый числовой луч от одной четвертой до плюс бесконечности.

Ответ: открытый числовой луч от одной четвертой до плюс бесконечности.

Пример 5. Решить совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} 7x - 42 \le 0; \\ 7x - 42 \le 0; \end{array}\right.$

Решение.

$$\left[\begin{array}{l} 7x - 42 \le 0; \\ 7x - 42 \le 0; \end{array}\right.$$

(2; +∞);

Ответ: (2; +∞).

Преобразуем каждое из неравенств.

Получим равносильную совокупность неравенств: икс больше двух и икс больше либо равно четырем.

Изобразим на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих этим неравенствам.

Находим, что объединением этих множеств, т.е. решением данной совокупности неравенств, является открытый числовой луч от двух до плюс бесконечности.

Ответ: открытый числовой луч от двух до плюс бесконечности.

Решение неравенств с одной переменной. Иррациональные неравенства. Неравенства с модулем

Рассмотрим решение неравенства

$$\boxed{7x - 42 \le 0;}$$

$7x - 42 \leq 0;$

1. ОДЗ: $f(x) \geq 0$;

2. $g(x) > 0$. При $g(x) \leq 0$ неравенство не имеет решения.

$7x - 42 \leq 0;$

$$\left[7x - 42 \leq 0; \right.$$

1) ОДЗ неравенства задается условием $f(x) \geq 0$.

2) правая часть первого неравенства должна быть положительной,
то есть $g(x) > 0$.
При $g(x) \leq 0$ неравенство (1)
не имеет решения

3. обе части первого неравенства неотрицательны, поэтому их можно возвести в квадрат
при этом знак неравенства сохраняется):
$f(x) < g^2(x)$.
Таким образом, данное иррациональное неравенство равносильно системе неравенств

$$7x - 42 \le 0;$$

Решение.

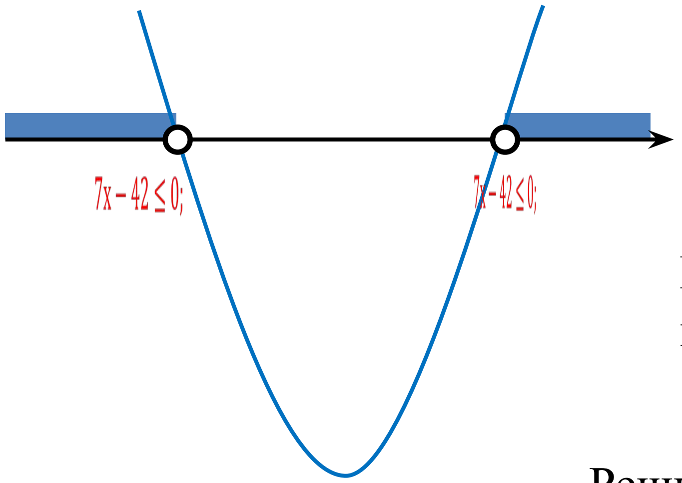
$$\left[7x - 42 \le 0; \right.$$

$$\left[7x - 42 \le 0; \right.$$

$x^2 - x - 2 > 0;$

$x_1 = -1, \; x_2 = 2;$

$$\left[7x - 42 \le 0; \right.$$



$7x - 42 \le 0;$

Это неравенство равносильно системе неравенств

Выполним преобразования в первом и третьем неравенствах

Решим квадратное неравенство Графически. Для этого найдем корни квадратного трехчлена

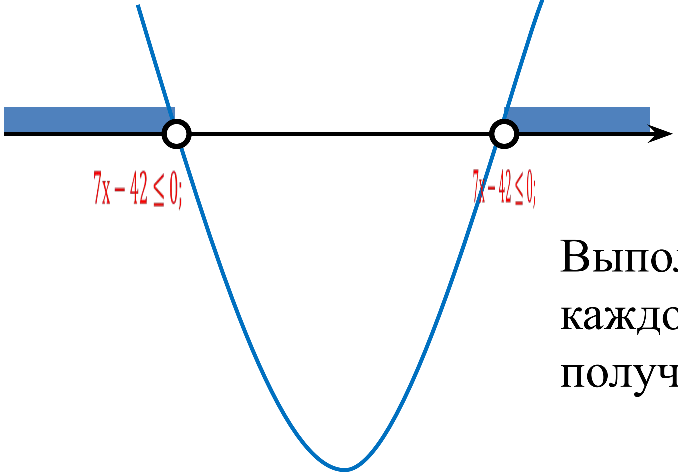
Геометрическая модель помогает найти решение неравенства

$$7x - 42 \leq 0;$$

Решение.

Это неравенство равносильно системе неравенств

$$\left[7x - 42 \leq 0; \right.$$



Выполним преобразования в каждом неравенстве системы, получим систему, в которой

$$\left[7x - 42 \leq 0; \right.$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

$x_1 = -2, \; x_2 = 7;$

Вычислим корни квадратного трехчлена

$$\left[7x - 42 \leq 0; \right.$$

Решим квадратное неравенство графическим способом.

$$7x - 42 \leq 0;$$

$7x - 42 \le 0;$

$7x - 42 \le 0;$

$$7x - 42 \le 0;$$

$\left[7x - 42 \le 0; \right.$ $\left[7x - 42 \le 0; \right.$

$$7x - 42 \le 0;$$

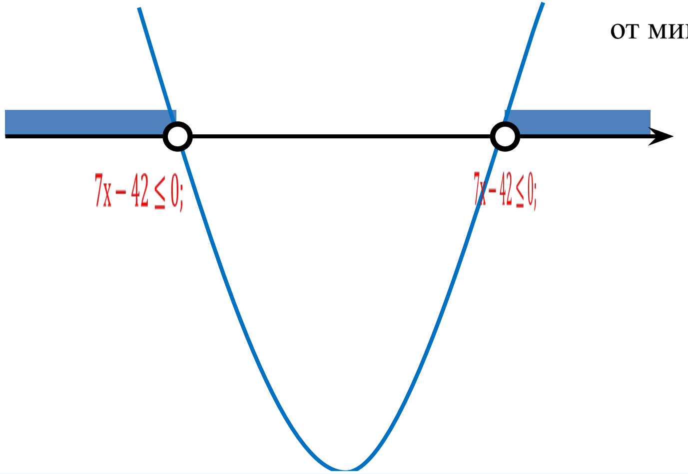
$\left[7x - 42 \le 0; \right.$

3. $\left[\begin{array}{l} \left[7x - 42 \le 0; \right. \\ \left[7x - 42 \le 0; \right. \end{array} \right.$

$7x - 42 \leq 0;$

Решение.

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ 7x - 42 \leq 0; \right. \\ \left\{ \right. \end{array}\right.$$



от минус бесконечности до двух.

$7x - 42 \leq 0;$

$x_1 = -2,\ x_2 = 1;$

$$\left[\ 7x - 42 \leq 0; \right.$$

$x \in (-\infty;$
$-2).$

Решение

Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств:

<u>Первая система</u>:

три минус икс больше либо равно нулю, икс минус один меньше нуля;

<u>Вторая система</u>:

икс минус один больше либо равно нулю, три минус икс больше квадрата разности икс и единицы.

Решим первую систему неравенств

икс меньше либо равно трем, икс меньше единицы.

Решением является открытый числовой луч от минус бесконечности до единицы.

Решим вторую систему неравенств.

Решением является полуинтервал от единицы до двух, включая один.

Решением совокупности системы неравенств является объединение двух открытых лучей — это открытый луч от минус бесконечности до двух.

Решение данного иррационального неравенства — открытый луч

от минус бесконечности до двух.

$$7x - 42 \le 0;$$

Решение.

Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l}\left\{7x - 42 \le 0;\right.\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}7x - 42 \le 0;\\ 7x - 42 \le 0;\\ 7x - 42 \le 0;\end{array}\right.$$

$7x - 42 \le 0;$

$x_1 = -2,\ x_2 = 1;$

$$\left\{7x - 42 \le 0;\right.$$

$x \in (2; +\infty);$

$7x - 42 \le 0;$

$x \in (-\infty; -2);$

$7x - 42 \le 0;$

Решение систем уравнений второй степени

Рассмотрим сначала системы уравнений с двумя переменными, составленные из одного уравнения второй степени и одного уравнения первой степени.

Такую систему всегда можно решить способом подстановки.

Для этого выполняют следующий алгоритм действий:

— выражают из уравнения первой степени одну переменную через другую;

— подставляют полученное выражение в уравнение второй степени, в результате приходят к уравнению с одной переменной;

— решают получившееся уравнение с одной переменной;

— находят соответствующие значения второй переменной.

Пример 1: Решить систему уравнений $\left[\begin{array}{l} 7x - 42 \leq 0; \\ 7x - 42 \leq 0; \end{array}\right.$

Решение:

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0; \qquad 7x - 42 \leq 0;$$

$$7x - 42 \leq 0; \qquad 7x - 42 \leq 0;$$

Выразим из второго уравнения переменную x через y

Подставим это выражение в первое уравнение вместо x

После упрощения получим равносильное уравнение

Соответствующие значения x можно найти, подставив найденные значения y в одно из уравнений системы

Ответ: (-1, 25; 0,75); (1,6; -0,2)

Если система состоит из двух уравнений второй степени с двумя переменными, то найти её решения обычно трудно.
В отдельных случаях такие системы можно решить ***способом подстановки или способом сложения.***

Пример 2: Решить систему уравнений $\left[\begin{array}{l} 7x-42\le 0; \\ 7x-42\le 0; \end{array}\right.$

Решение: $x \neq 0$

$$7x-42\le 0;$$

$$7x-42\le 0;$$

$7x-42\le 0;$ $7x-42\le 0;$

$$7x-42\le 0;$$

Ответ: (-2; -1); (2; 1)

Системы уравнений

Для решения систем уравнений с двумя переменными использовались такие способы:

- Метод подстановки;
- метод алгебраического сложения;
- метод введения новых переменных;
- графический метод.

Если поставлена задача – найти такие пары $(x; y)$, которые одновременно удовлетворяют уравнению $p(x; y) = 0$ и уравнению $q(x; y) = 0$, то говорят, что данные уравнения образуют систему уравнений

$$\begin{cases} p(x; y) = 0, \\ q(x; y) = 0. \end{cases}$$

Пару значений (x; y), которая одновременно является решением и первого и второго уравнения системы, называют решением системы уравнений.

Решить систему уравнений – значит найти все её решения или установить, что решений нет.

Система трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} p(x;\ y;\ z) = 0 \\ q(x;\ y;\ z) = 0 \\ r(x;\ y;\ z) = 0 \end{cases}$$

При этом надо найти тройки $x;\ y;\ z$ удовлетворяющие каждое уравнение системы.

Вообще, можно говорить о системах с любым количеством уравнений и неизвестных.

Алгоритм решения системы уравнений

- постепенный переход от сложного уравнения к более простому, но при этом выполнять равносильные преобразования.
- стремиться получить хотя бы одно линейное уравнение, а если происходит переход к уравнению-следствию, то обязательна проверка корней.

Две системы уравнений называют равносильными, если они имеют одни и те же решения или решений не имеют.

Равносильные способы решения систем уравнений:

— метод подстановки;

— метод алгебраического сложения;

— введения новых переменных.

Запомните!

Неравносильные преобразования:

— возведение в квадрат обеих частей уравнения;

— умножение уравнений системы;

— преобразования, приводящие к расширению области определения.

Проверка решений их подстановкой в исходную систему обязательна.

Обратите внимание на рациональность решения системы.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4, \\ 2x + y + z = 1, \\ x + 2y + z = 3. \end{cases}$$

Решение.

Сложим все три уравнения(это равносильное преобразование) и получим:4x+4y+4 z=8.

$$4x + 4y + 4z = 8;$$

Разделим почленно обе части уравнения на четыре, получим; x+y+ z =2

$$x + y + z = 2;$$

Из третьего уравнения получаем: (x+y+ z)+y=3

$$x + (x + y + z) = 1;$$
$$x + 2 = 1;$$
$$x = -1;$$

$$(x + y + z) + y = 3;$$
$$2 + y = 3;$$
$$y = 1;$$

$$(x + y + z) + z = 4;$$
$$2 + z = 4;$$
$$z = 2;$$

Из второго уравнения системы имеем: x+(x+y+ z)=1

Ответ: $(-1; 1; 2)$.

Из первого уравнения имеем: (x+y+ z)+ z=4

Итак, система уравнений имеет единственное решение (-1;1;2).

Пример 2. Решить систему уравнений $\left[7x - 42 \le 0; \right.$

Решение.

$7x - 42 \le 0;$

$7x - 42 \le 0;$

$\left[7x - 42 \le 0; \right.$ $\left[7x - 42 \le 0; \right.$

(1; 1), (–1; –1);

$7x - 42 \le 0;$

$7x - 42 \le 0;$

$7x - 42 \le 0;$

$7x - 42 \le 0;$

$7x - 42 \le 0;$

Задание 3

Решить систему уравнений: игрек квадрат плюс два икс игрек минус три икс квадрат равно нулю и игрек квадрат плюс три икс в квадрате равно четырем.

Решение

- Можно заметить, что первое уравнение системы – однородное. Считая игрек неизвестной величиной, а икс – постоянной, решим его. Получим: игрек первое равно икс и игрек второе равно минус три икс.
- Тем самым мы получили линейные уравнения. Исходная система сводится к совокупности двух систем уравнений:
- первая система состоит из уравнений: игрек равен икс, игрек квадрат плюс три икс в квадрате равно четырем.
- Вторая система состоит из уравнений: игрек равен минус три икс, игрек квадрат плюс три икс в квадрате равно четырем.
- Решения первой системы — пара чисел: один и один и пара чисел: минус один, минус один. Вторую систему решаем способом подстановки.
- Решениями системы является пара чисел: один, деленное на квадратный корень из трех и минус квадратный корень из трех, вторая пара: минус один, деленное на квадратный корень из трех и квадратный корень из трех.
- При решении исходной системы все преобразования были равносильными, поэтому проверка не нужна.
- Ответ: пара чисел: один и один; пара чисел: минус один, минус один; пара чисел: один, деленное на квадратный корень из трех, и минус квадратный корень из трех; пара: минус один, деленное на квадратный корень из трех, и квадратный корень из трех.

Пример 3. Решить систему уравнений $\left[\; 7x - 42 \le 0; \right.$

Решение.

$$\left[\; 7x - 42 \le 0; \right.$$

$$\left[\; 7x - 42 \le 0; \right.$$

(1; 0), (–2; 3);

Проверка.

$7x - 42 \le 0;$

$$7x - 42 \le 0;$$

$$7x - 42 \le 0;$$

$x = -2,\ y = 3$:

1 = 1 – верное равенство;

$7x - 42 \le 0;$ – неопределён;

Ответ: (1; 0).

Решить дома:

а) $\begin{cases} 3x+4 \le 4x+6 \\ x-5 \le 4-2x \end{cases}$

а) $\begin{cases} 5x+3 \le 6x+7 \\ x-1 \le 5-x \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2y-(y-4) < 6 \\ y > 3(2y-1)+18 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3y-(y-2) < 4 \\ y > 4(2y-1)+18 \end{cases}$