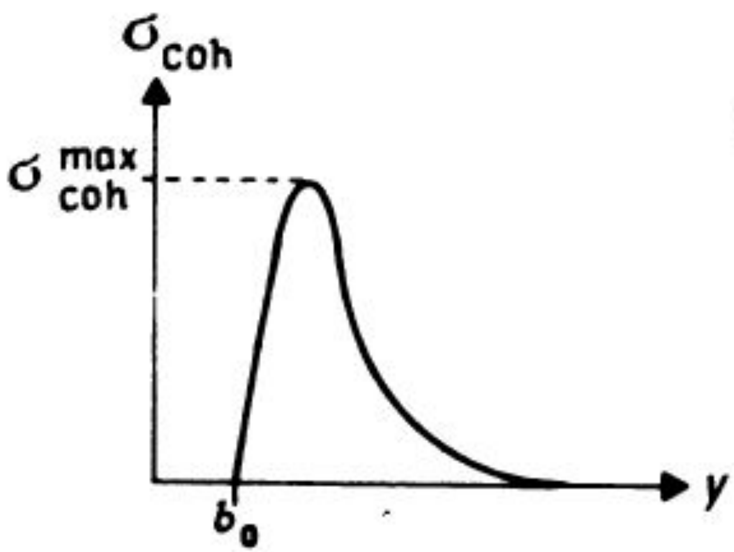
Тема:
«Модель с силами сцепления у вершины трещины. Модель Дагдейла.»

Для того, чтобы учесть релаксацию напряжений у вершины трещины, вводятся модели с силами сцепления.



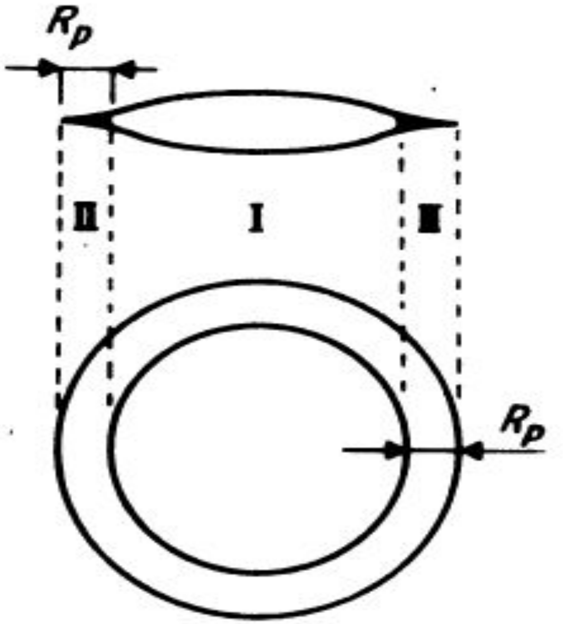
$$\sigma_{coh}^{max} \sim \sqrt{E\gamma/b_0} \sim E/10$$

y – межатомное расстояние; b_0 – межатомное расстояние;

σ_{coh} - напряжение сцепления;

Зависимость между поверхностной энергией γ и напряжением сцепления выражается соотношением

$$2\gamma = \int_{b_0}^{\infty} \sigma_{coh}(y)dy$$



Модель трещины с областью действия сил сцепления.

Основные гипотезы концепции сил

1) Длина R_p зоны действия сил сцепления

по сравнению с длиной трещины, однако она достаточна, чтобы применять методы

сплошных сред

2) Профиль трещины в зоне действия сил сцепления и, следовательно, локальное распределение напряжений сцепления не зависят от приложенных внешних нагрузок и являются постоянными материала для

данных

условий температуры и скорости деформирования.

Поля напряжений и перемещений можно представить в виде двух составляющих:

1) поля, соответствующие телу без трещины, на которое действует заданная внешняя нагрузка;
2) поля, соответствующие телу с трещиной, на берегах которой действуют напряжения $\sigma(x)$, представляющие собой разность между напряжениями сцепления $\sigma_{\mathrm{coh}}(x)$ и приложенными внешними напряжениями.

Коэффициент интенсивности напряжений K_{I} подобной модели можно получить, используя принцип наложения:

$$K_{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{I}}^{a} + K_{\mathrm{I}}^{b},$$

где K_{I}^{a} - коэффициент интенсивности напряжений, связанный с внешней нагрузкой; K_{I}^{b} - коэффициент интенсивности напряжений, связанный с силами сцепления

Модель Дагдейла.

Модель Дагдейла представляет действительную трещину длиной l, от вершины которой физически бесконечно тонкая пластическая зона R_p остирается на длину

(фиктивная длина трещи $c = l + R_p$

$\sigma_т$

На длине R_p силы сцепления имеют постоянное значение и равны пределу текучести

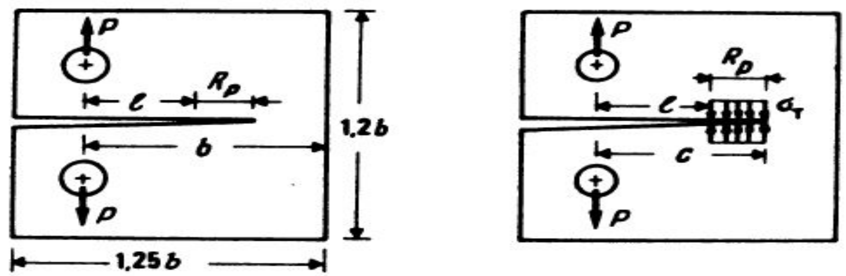


Рис. 8.2. Схема модели Дагдейла.

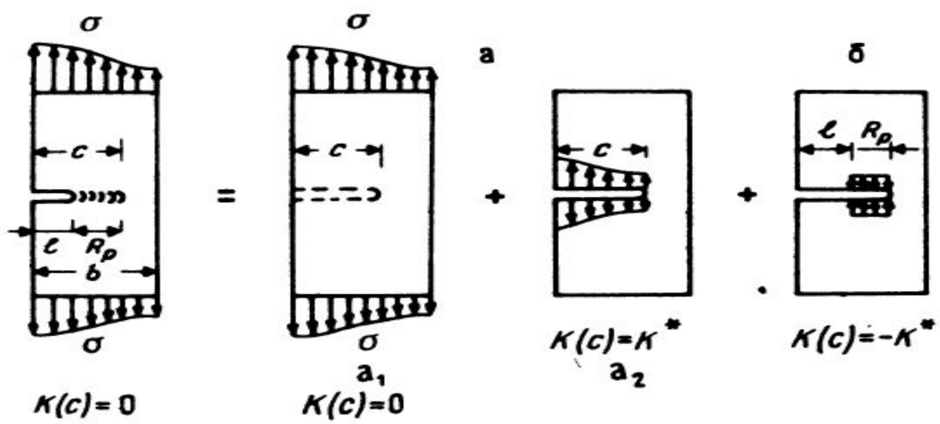


Рис. 8.3. Представление модели Дагдейла в виде двух составляющих а и б (составляющая а разделена на a_1 и a_2).

Коэффициент интенсивности напряжений в случае «а» равен:

$$K_{\mathrm{I}}^{\mathrm{a}} = \sigma\sqrt{\pi(l + R_p)}.$$

Коэффициент интенсивности напряжений в случае «б» составляет:

$$K_{\mathrm{I}}^{\text{б}} = 2\sigma_{\mathrm{т}}\sqrt{\frac{l + R_p}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{l}{l + R_p}\right]}$$

Требование, чтобы перемещения были равны нулю в вершине трещины длиной ***c***, определяется соотношением

$$K_{\mathrm{I}}^{\mathrm{a}}(c) + K_{\mathrm{I}}^{\text{б}}(c) = 0.$$

Это условие приводит к соотношению

$$l/(l + R_p) = \cos(\pi\sigma/2\sigma_{\mathrm{т}})$$

откуда $R_p = l[\sec(\pi\sigma/2\sigma_{\mathrm{т}}) - 1]$. Размер пластической зоны можно представить в форме ряда:

$$R_p = l\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|E_i^{el}|}{(2i)!}\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_{\mathrm{т}}}\right)^{2i}$$

Здесь E_i^{el} - челны числовой последовательности Эйлера. В случае $\sigma \ll \sigma_{\mathrm{т}}$ можно использовать

$$R_p = \pi^2\frac{l}{8}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{\mathrm{т}}}\right)^2 = \frac{\pi}{8}\left(\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sigma_{\mathrm{т}}}\right)^2$$

где K_{I} -коэффициент интенсивности напряжений для трещины длиной 2l.

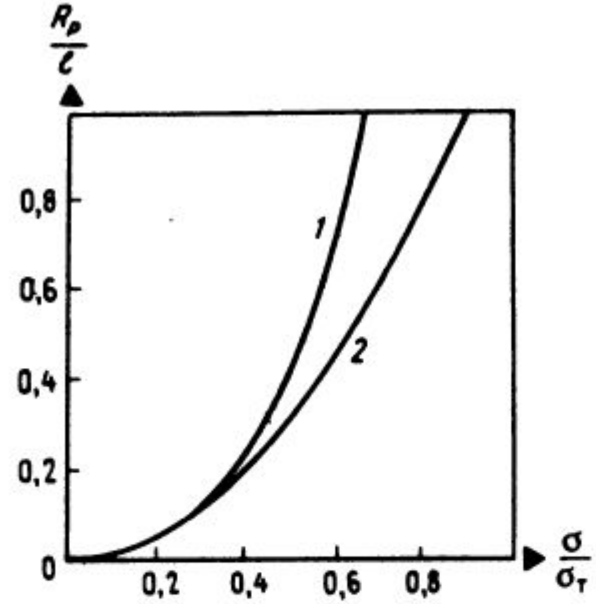


Рис. 8.4. Длина пластической зоны как функция отношения $\sigma/\sigma_т$. *1* — модель Дагдейла; *2* — модель Ирвина.

Для расчета перемещений вычисляется функция Вестергартера $Z_а$ для случая «а» и $Z_б$ для случая «б». Применяя принцип наложения можно написать $Z = Z_а + Z_б$. Функция $Z_а$ примет вид

$$Z_а = \sigma(z_1 + l)/\sqrt{(z_1 + l)^2 - (l + R_p)^2},$$

$z = z_1 + l'$, z_1 – комплексная переменная

$$Z_б = -\sigma_т\left(1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{l}{l + R_p}\right)\frac{z_1 + l}{\sqrt{(z_1 + l)^2 - (l + R_p)^2}} + \\ +\sigma_т\left\{-\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{l}{z_1 + l}\sqrt{\frac{(z_1 + l)^2 - (l + R_p)^2}{(l + R_p)^2 - l^2}}\right\},$$

С учётом формулы $l/(l+R_p)=\cos(\pi\sigma/2\sigma_т)$ выражение для Z:

$$Z=\frac{2\sigma_т}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{R_p(2l+R_p)(z_1+l)}{(z_1-R_p)(z_1+2l+R_p)l}}.$$

Соотношение $2\mu v=[(\kappa+1)/2]\operatorname{Im}(\int Zdz-y\operatorname{Re}Z)$ определяет перемещение $v(x)$ в направлении *y*. В плоскости y=0 справедливо соотношение $2\mu v=[(\kappa+1)/2]\operatorname{Im}(\int Zdz)$, откуда следует

$$v(x)=\frac{(\kappa+1)\sigma_т l}{4\pi\mu}\left[\ln\frac{1+\sqrt{\frac{2l+R_p+x}{2l+R_p}\left(1-\frac{x}{R_p}\right)}}{1-\sqrt{\frac{2l+R_p+x}{2l+R_p}\left(1-\frac{x}{R_p}\right)}}-\left(1+\frac{x}{l}\right)\ln\frac{1+\frac{x}{l}+\sqrt{\frac{2l+R_p+x}{2l+R_p}\left(1-\frac{x}{R_p}\right)}}{1+\frac{x}{l}-\sqrt{\frac{2l+R_p+x}{2l+R_p}\left(1-\frac{x}{R_p}\right)}}\right]$$

В вершине трещины $v(x=0)=\frac{(\kappa+1)\sigma_т l}{2\pi\mu}\ln\left(\sec\frac{\pi\sigma}{2\sigma_т}\right)$

Раскрытие трещины δ определяется величиной $\delta=2v(x=0)$ и при плоском напряжённом состоянии можно получить

$$\delta=8\frac{\sigma_т l}{\pi E}\ln\left(\sec\frac{\pi\sigma}{2\sigma_т}\right)$$