

Раздел 2. Прямые и плоскости в пространстве

Тема 2.1. Прямые и плоскости в пространстве

Урок-практическое занятие № 10

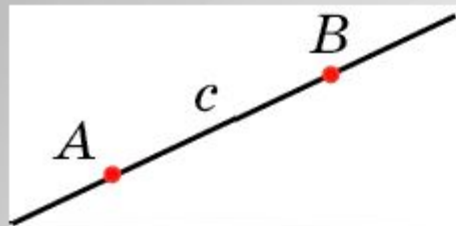
Параллельность прямых и плоскостей в пространстве



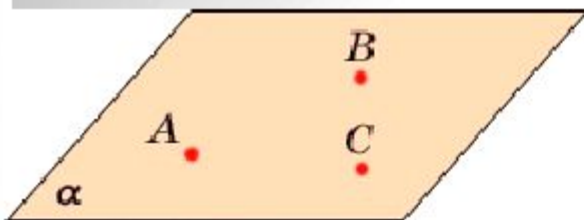
Вопросы

- Предмет стереометрии
- Аксиомы стереометрии.
Некоторые следствия аксиом.
- Определение параллельных прямых, прямой и плоскости, плоскостей в пространстве.
- Скрещивающиеся прямые.
Признак скрещивающихся прямых.
- Теоремы о параллельных прямых, прямой и плоскости, плоскостей в пространстве.
- Взаимное расположение прямых, прямой и плоскости, плоскостей в пространстве.

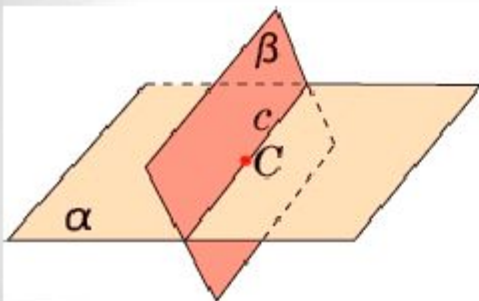
АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ



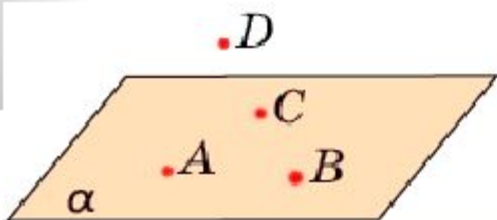
Через любые две точки пространства проходит единственная прямая



Через любые три точки пространства, не принадлежащие одной прямой, проходит единственная плоскость

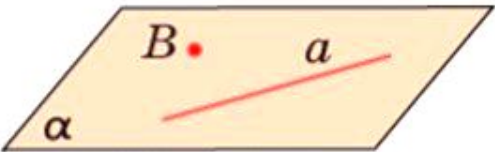


Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой



Существуют по крайней мере четыре точки, не принадлежащие одной плоскости

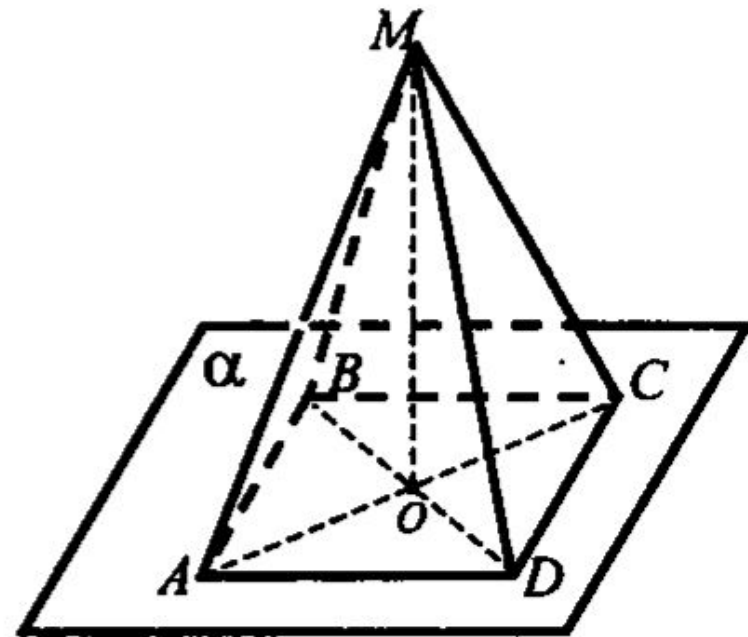
СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ

 <p>A diagram of a yellow parallelogram representing a plane α. A red line c is drawn across it, with two red dots labeled A and B on the line.</p>	<p>Если прямая имеет с плоскостью две общие точки, то она лежит в этой плоскости</p>
 <p>A diagram of a yellow parallelogram representing a plane α. A red line a is drawn across it. A red dot labeled B is located on the plane but not on the line.</p>	<p>Через прямую и не принадлежащую ей точку проходит единственная плоскость</p>
 <p>A diagram of a yellow parallelogram representing a plane α. Two red lines, labeled a and b, intersect each other within the plane.</p>	<p>Через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость</p>

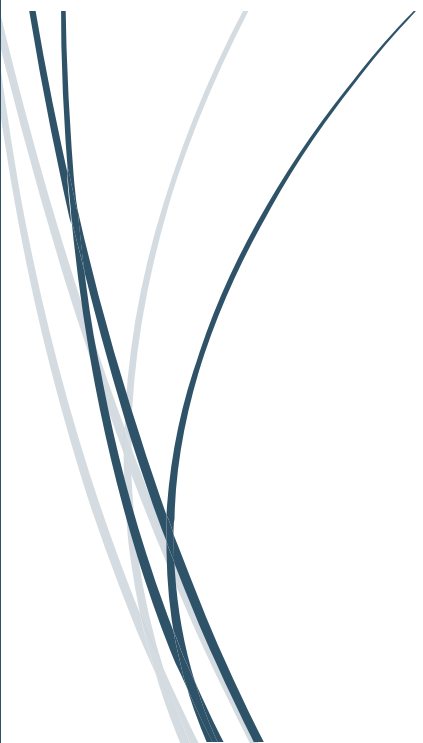
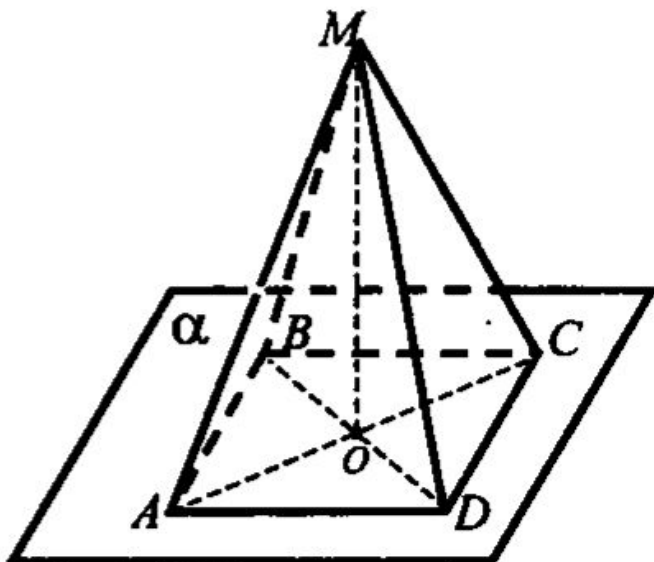
$ABCD$ – ромб, O – точка пересечения его диагоналей, M – точка пространства, не лежащая в плоскости ромба. Точки A , D , O лежат в плоскости α .

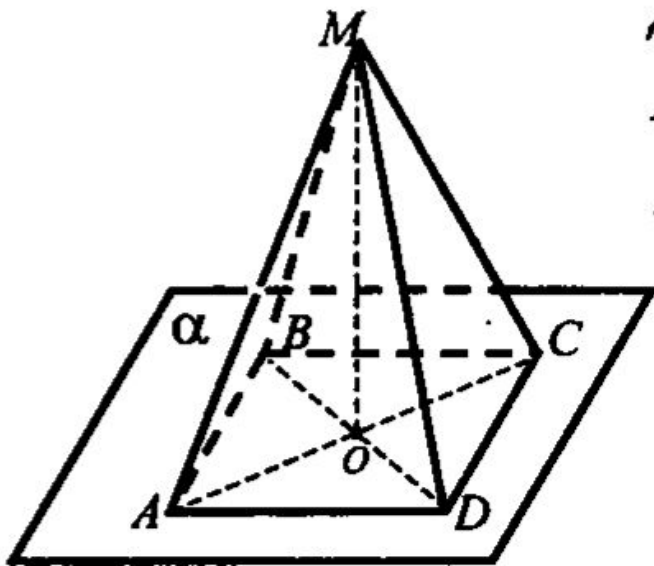
Дайте ответ на поставленные вопросы с необходимыми обоснованиями.

- 1) Лежат ли в плоскости α точки B и C ?
- 2) Лежит ли в плоскости MOB точка D ?
- 3) Назовите линию пересечения плоскостей MOB и ADO .
- 4) Вычислите площадь ромба, если сторона его равна 4 см, а угол равен 60° . Предложите различные способы вычисления площади ромба.



№ 1





Дано: $ABCD$ – ромб, $AC \cap BD = O$, $M \in \alpha$, $(A, D, O) \in \alpha$.
 $AB = 4$ см, $\angle A = 60^\circ$.

Найти: $(B, C) \in \alpha$, $D \in MOB$; $MOB \cap ADO$, S_{ABCD} .

Решение

1) $D \in \alpha$, $O \in \alpha$, то по A_2 $DO \subset \alpha$, так как $B \in DO$, то $B \in \alpha$.
 Аналогично $A \in \alpha$, $O \in \alpha$, то по A_2 $AO \subset \alpha$, так как $C \in AO$, то $C \in \alpha$.

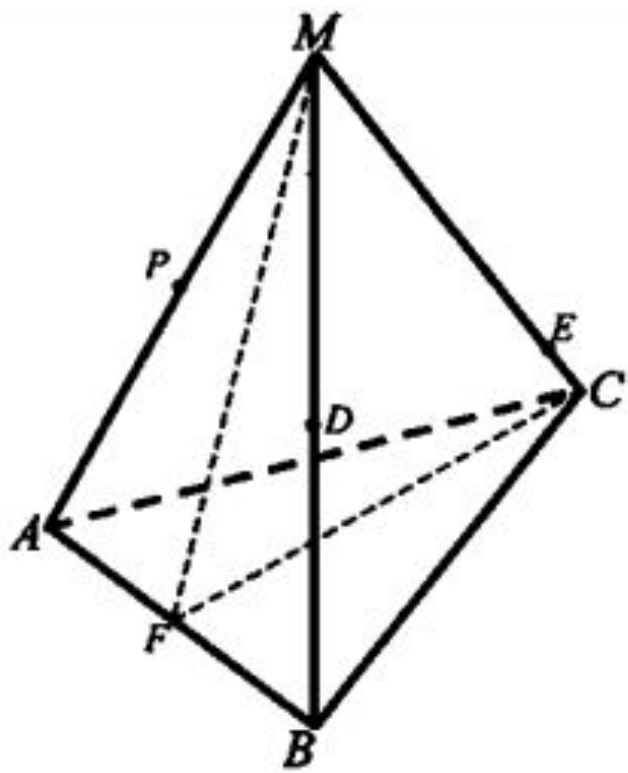
2) $OB \subset MOB$, $D \in OB$, то $D \in MOB$.

3) $O \in MOB$, $O \in ADO$.

$B \in MOB$, $B \in ADO \Rightarrow MOB \cap ADO = BO$, но так как BO – часть DB , то
 $MOB \cap ADO = DB$.

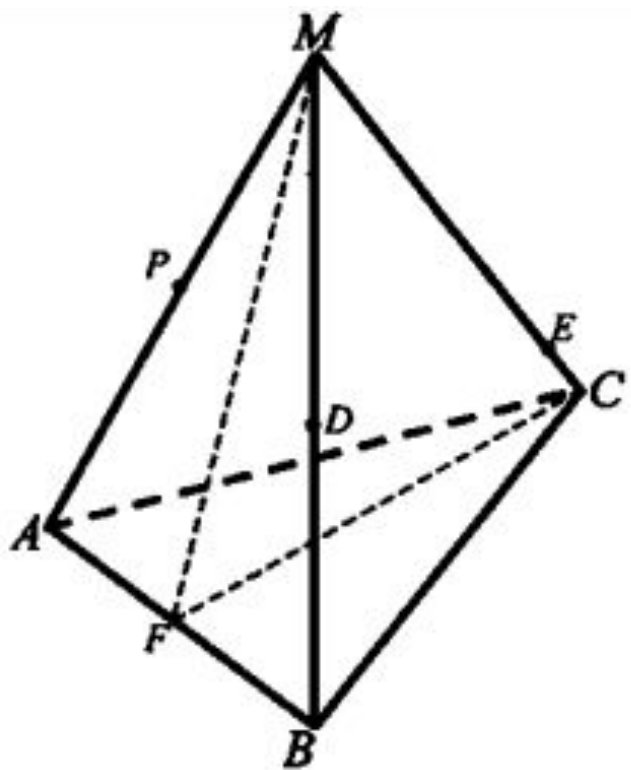
4) $S_{\text{ромба}} = 4 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = 8\sqrt{3}$ (см²).

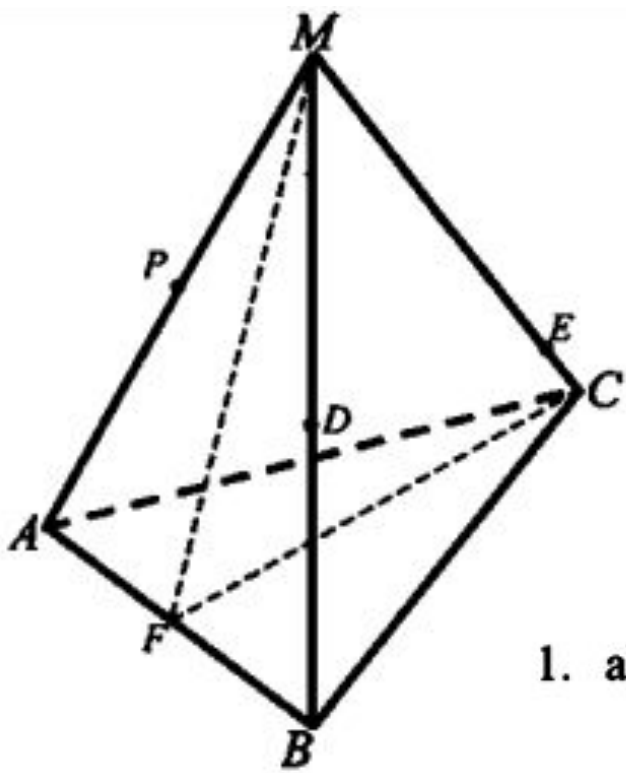
Ответ: $8\sqrt{3}$ см².



Дан тетраэдр $MABC$, каждое ребро которого равно 6 см. $D \in MB$, $E \in MC$, $F \in AB$, $AF = FB$, $P \in MA$.

- 1) Назовите прямую, по которой пересекаются плоскости: а) MAB и MFC ; б) MCF и ABC .
- 2) Найдите длину CF и S_{ABC} .
- 3) Как построить точку пересечения прямой DE с плоскостью ABC ?





Дан тетраэдр $MABC$, каждое ребро которого равно 6 см. $D \in MB$, $E \in MC$, $F \in AB$, $AF = FB$, $P \in MA$.

- 1) Назовите прямую, по которой пересекаются плоскости: а) MAB и MFC ; б) MCF и ABC .
- 2) Найдите длину CF и S_{ABC} .
- 3) Как построить точку пересечения прямой DE с плоскостью ABC ?

Решение

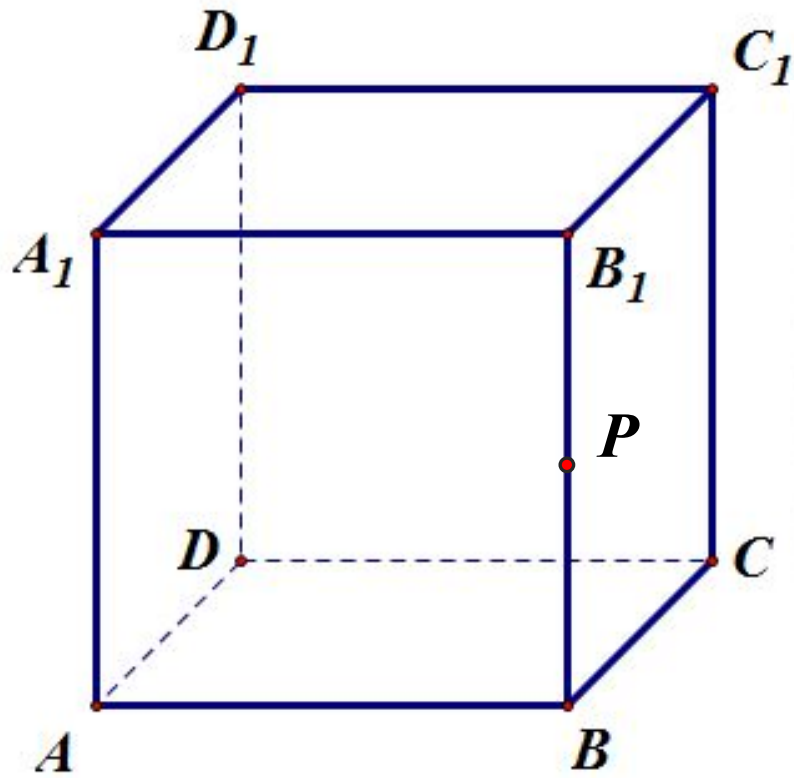
1. а) $\left. \begin{array}{l} M \in MAB, M \in MFC, \\ F \in MAB \text{ и } F \in MFC \end{array} \right\} \Rightarrow \text{аксиома } A_3, MAB \cap MFC = MF.$
- б) $\left. \begin{array}{l} C \in MCF, C \in ABC, \\ F \in MFC \text{ и } F \in ABC \end{array} \right\} \Rightarrow \text{аксиома } A_3, MCF \cap ABC = FC.$

2. $\triangle ABC$ – равносторонний $\Rightarrow FC$ – медиана, высота, биссектриса. $\triangle CFB$ – прямоугольный: $CB = 6$ (см), $FB = 3$ (см). По теореме Пифагора $FC = 3\sqrt{3}$ (см). $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CF$; $S_{ABC} = 9\sqrt{3}$ (см²).

3. DE и BC лежат в плоскости BMC . Пусть они пересекаются в точке K , так как K принадлежит BC , значит K принадлежит плоскости ABC (аксиома A_2):

- 1) $DE \in BMC, BC \in BMC$;
- 2) $DE \in BC = K (K \in BC \Rightarrow K \in ABC)$.

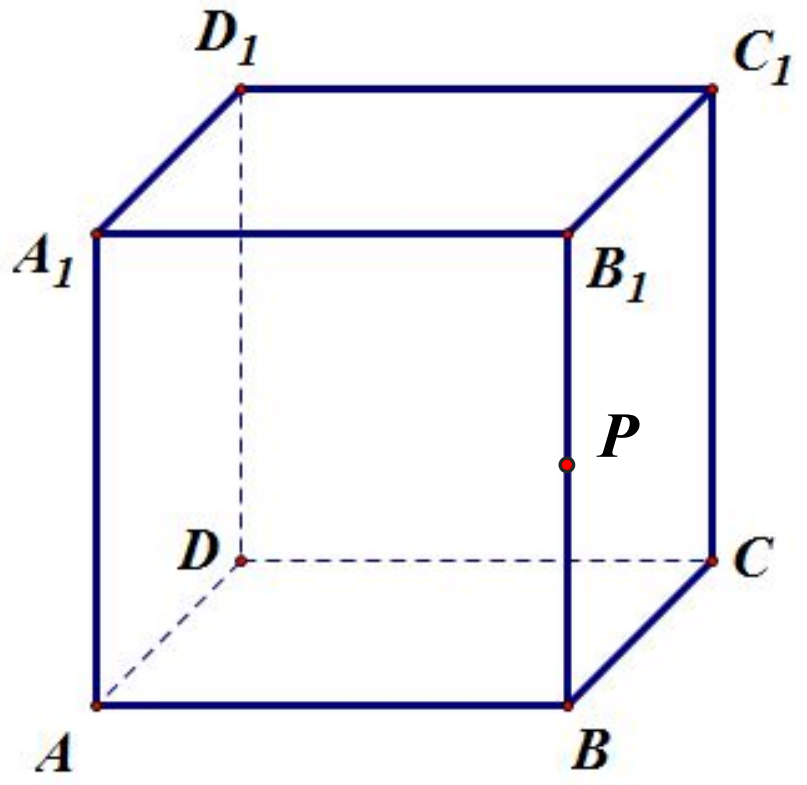
Ответ: $3\sqrt{3}$ см, $9\sqrt{3}$ см².

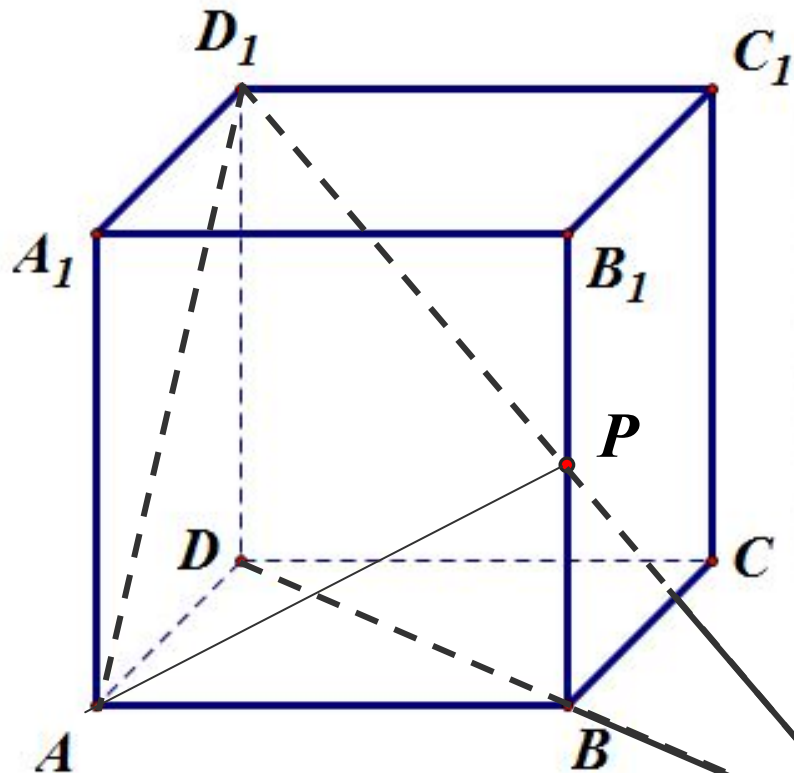


Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $P \in BB_1$, $B_1P = PB$.

- 1) Как построить точку пересечения плоскости ABC с прямой D_1P ?
- 2) Как построить линию пересечения плоскости AD_1P и ABB_1 ?
- 3) Вычислите длину отрезков AP и AD_1 , если $AB = a$.

№ 3





Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $P \in BB_1$, $B_1P = PB$.

- 1) Как построить точку пересечения плоскости ABC с прямой D_1P ?
- 2) Как построить линию пересечения плоскости AD_1P и ABV_1 ?
- 3) Вычислите длину отрезков AP и AD_1 , если $AB = a$.

Решение

1. D_1P и DV лежат в одной плоскости D_1DV . Пусть они пересекаются в точке K . Тогда точка K принадлежит прямой DV , а значит, $K \in ABC$.

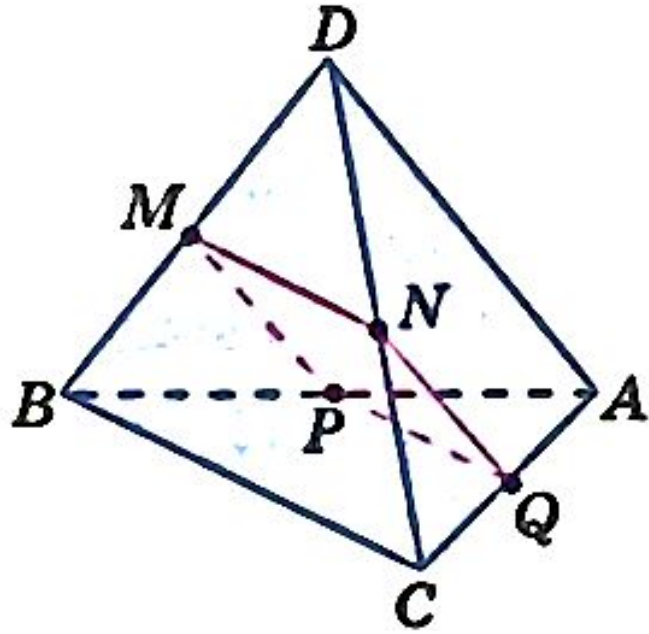
2. Точка P принадлежит BB_1 , а значит, и плоскости ABV_1 . Точка P принадлежит AP , а значит, и плоскости AD_1P . Следовательно, по аксиоме A_2 : $AP \subset ABV_1$. Аналогично $AP \subset AD_1P$. Значит, $AD_1P \cap ABV_1 = AP$.

3. а) Из $\triangle ABP$, по теореме Пифагора $AP = \frac{a}{2}\sqrt{5}$; б) Из $\triangle ADD_1$ по теореме Пифагора $AD_1 = a\sqrt{2}$.

Ответ: $\frac{a}{2}\sqrt{5}, a\sqrt{2}$ см.

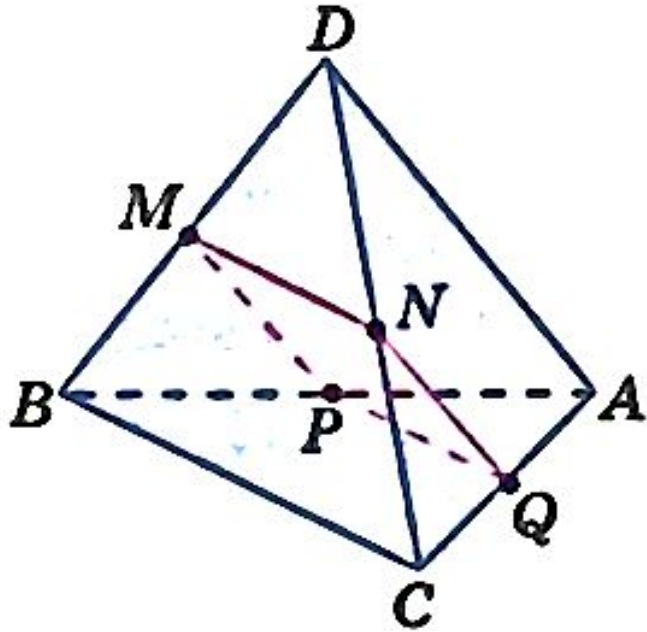
№ 4 (№ 17 из учебника)

На рисунке 17 точки M , N , Q и P — середины отрезков DB , DC , AC и AB . Найдите периметр четырехугольника $MNQP$, если $AD = 12$ см, $BC = 14$ см.



№ 4 (№ 17 из учебника)

На рисунке 17 точки M , N , Q и P — середины отрезков DB , DC , AC и AB . Найдите периметр четырехугольника $MNQP$, если $AD = 12$ см, $BC = 14$ см.



Дано: M — середина BD ; N — середина CD ;
 Q — середина AC ; P — середина AB ; $AD = 12$ см;
 $BC = 14$ см (рис. 5).

Найти: P_{MNQP} — ?

Решение:

- $MN \parallel BC$ по составу средней линии \Rightarrow
 $\Rightarrow MN \parallel PQ$; $PQ \parallel BC$.
- $PM \parallel AD$ по составу средней линии \Rightarrow
 $\Rightarrow PM \parallel QN$; $NQ \parallel DA$.

3. По определению $MNQP$ — параллелограмм.

4. $PQ = 7$; $PM = 6 \Rightarrow P_{MNQP} = 2(7 + 6) = 26$ (см)

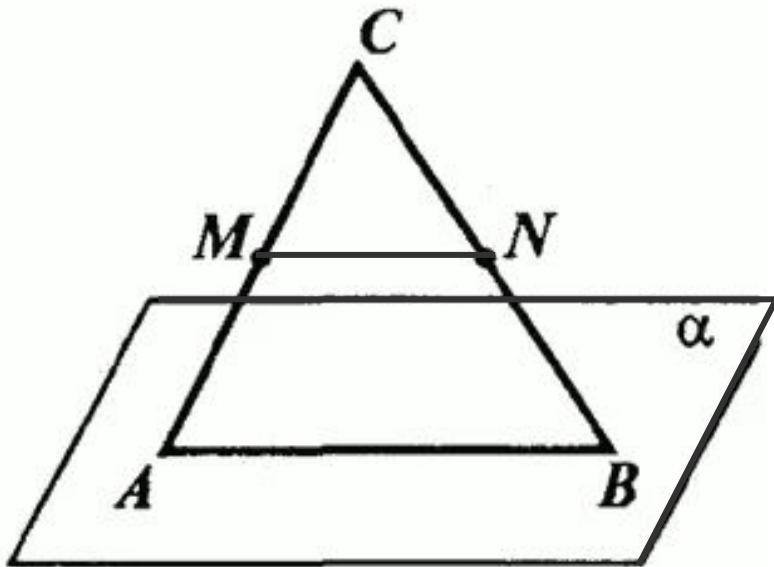
Ответ: 26 см.

№ 5 (№ 22 из учебника)

Точки A и B лежат в плоскости α , а точка C не лежит в этой плоскости. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков AC и BC , параллельна плоскости α .

№ 5 (№ 22 из учебника)

Точки A и B лежат в плоскости α , а точка C не лежит в этой плоскости. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков AC и BC , параллельна плоскости α .



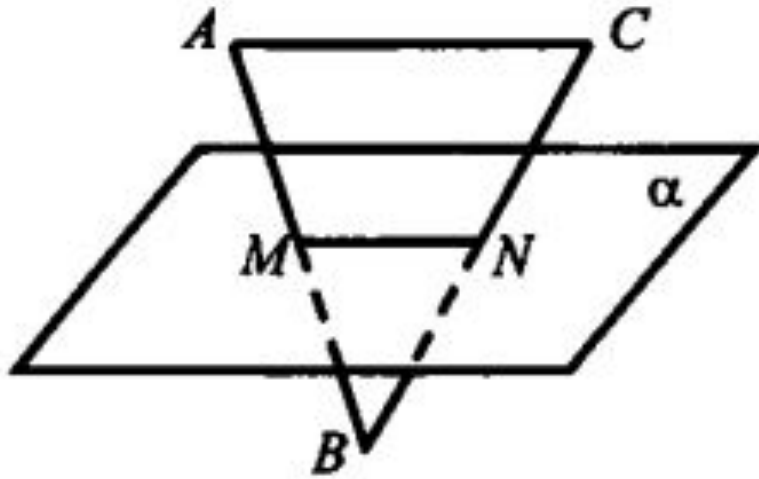
Дано: $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \notin \alpha$; $AM = MC$; $BN = NC$.

Доказать: $MN \parallel \alpha$.

Доказательство: $MN \parallel AB$ (по свойству средней линии), $AB \in \alpha$; $MN \parallel \alpha$ по признаку.

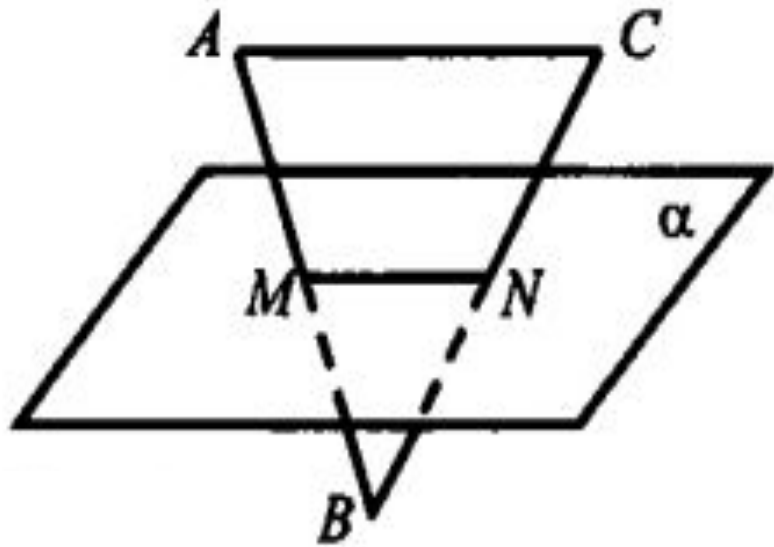
№ 6 (№ 26 из учебника)

Сторона AC треугольника ABC параллельна плоскости α , а стороны AB и BC пересекаются с этой плоскостью в точках M и N . Докажите, что треугольники ABC и MBN подобны.



№ 6 (№ 26 из учебника)

Дано: $AC \parallel \alpha$, $AB \cap \alpha = M$; $CB \cap \alpha = N$ (рис. 1).



Доказать: $\triangle ABC \sim \triangle MBN$.

Доказательство:

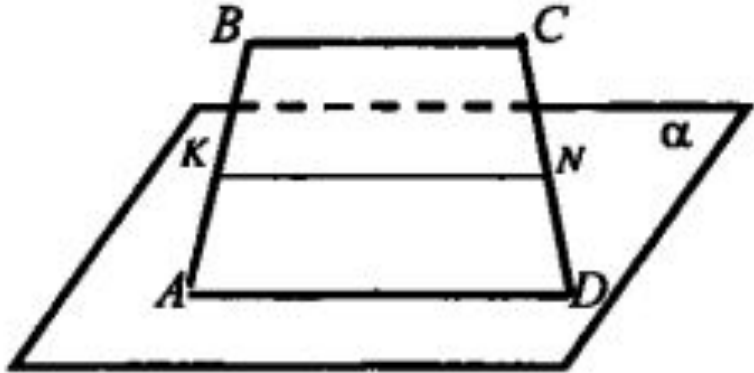
1. Докажем, что $AC \parallel MN$;

$$\left. \begin{array}{l} AC \parallel \alpha \\ MN \in \alpha \end{array} \right| \Rightarrow AC \not\cap MN;$$

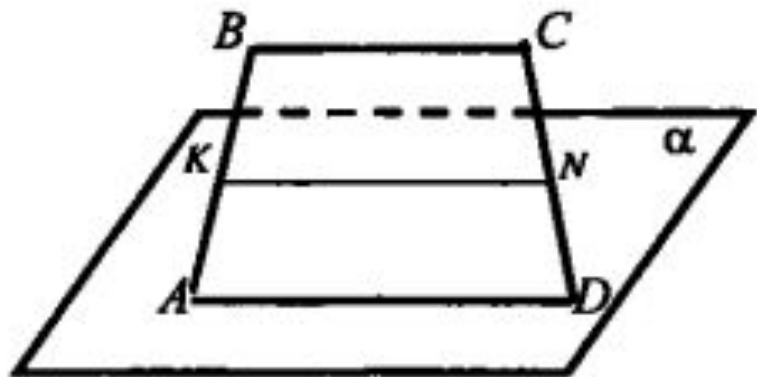
$$\left. \begin{array}{l} AC \in (ABC) \\ MN \in (ABC) \\ AC \not\cap MN \end{array} \right| \Rightarrow AC \parallel MN \text{ (по определению).}$$

2. Так как $AC \parallel MN \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MBN$.

Через основание AD трапеции $ABCD$ проведена плоскость α . $BC \notin \alpha$.
Докажите, что прямая, проходящая через середины сторон AB и CD , параллельна плоскости α .



Через основание AD трапеции $ABCD$ проведена плоскость α . $BC \notin \alpha$. Докажите, что прямая, проходящая через середины сторон AB и CD , параллельна плоскости α .



Дано: $ABCD$ – трапеция; $AD \in \alpha$, $CB \notin \alpha$;
 $AK = KB$, $CN = ND$ (рис. 3).

Доказать: $KN \parallel \alpha$.

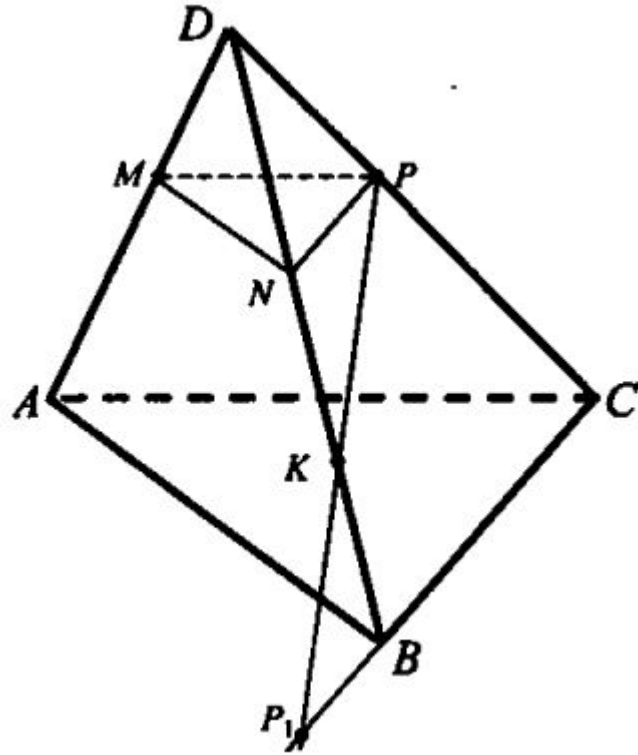
Доказательство:

1. KN – средняя линия трапеции, значит
 $KN \parallel AD$.

2. $\left. \begin{array}{l} KN \parallel AD \\ AD \in \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow KN \parallel \alpha$ (по теореме о па-

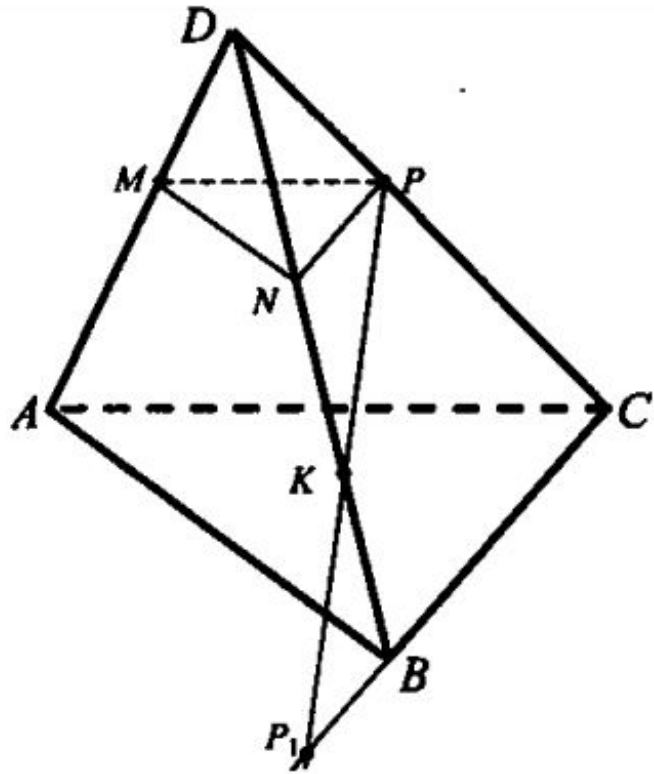
раллельности прямой и плоскости).

№ 8 (№ 34 из учебника)



Точка D не лежит в плоскости треугольника ABC , точки M , N и P — середины отрезков DA , DB и DC соответственно, точка K лежит на отрезке BC . Выясните взаимное расположение прямых: а) ND и AB ; б) PK и BC ; в) MN и AB ; г) MP и AC ; д) KN и AC ; е) MD и BC .

№ 8 (№ 34 из учебника)



1) Задача № 34

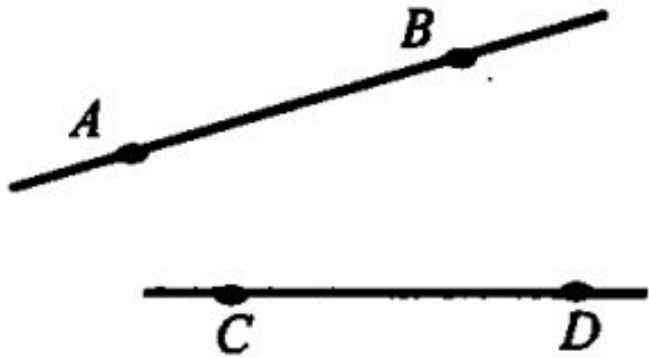
Дано: $D \in$ плоскости ABC . $AM = MD$;
 $DN = NB$; $DP = PC$; $K \in BN$ (рис. 8).

Определить взаимное расположение прямых:

- ND и AB . $ND \cap AB = B$ (D, A, N и B лежат в одной плоскости и $AB \not\parallel ND$);
- PK и BC . $PK \cap BC = P_1$ (K, P, C, B лежат в одной плоскости и $PK \not\parallel BC$);
- MN и AB . $MN \parallel AB$ (по свойству средней линии треугольника $MN \parallel AB$);
- MP и AC . $MP \parallel AC$ (по свойству средней линии треугольника $MP \parallel AC$);
- KN и AC . $KN \cap$ плоскости $ADC = D$; $D \notin AC \Rightarrow KN$ скрещивается с AC по признаку скрещивающихся прямых;
- MD и BC ; $MD \cap$ плоскости $ABC = A$, $A \notin BC \Rightarrow MD$ скрещивается с BC по признаку скрещивающихся прямых.

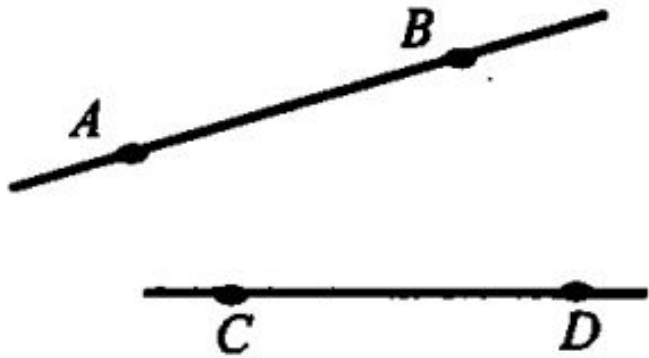
№ 9 (№ 39 из учебника)

Докажите, что если AB и CD скрещивающиеся прямые, то AD и BC также скрещивающиеся прямые.



№ 9 (№ 39 из учебника)

Докажите, что если AB и CD скрещивающиеся прямые, то AD и BC также скрещивающиеся прямые.



Дано: AB и CD скрещиваются

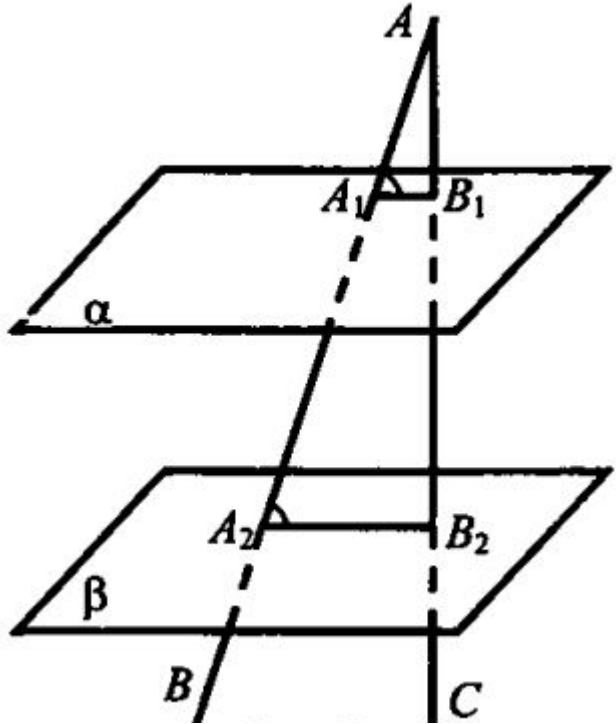
Доказать, что AD и BC скрещиваются.

Доказательство:

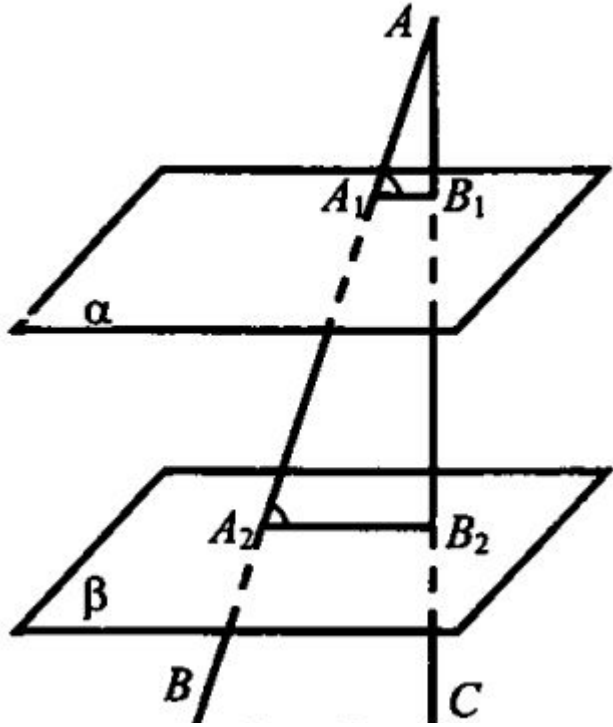
1. Точка A, C, D лежат в одной плоскости (по аксиоме A_1). Пусть эта плоскость α .
2. $B \notin \alpha$, так как AB и CD скрещиваются (по определению скрещивающихся прямых).
3. $BC \cap \alpha = C; C \notin AD \Rightarrow AD$ и BC скрещиваются (по признаку скрещивающихся прямых).

№ 10 (№ 63а из учебника)

Параллельные плоскости α и β пересекают сторону AB угла BAC соответственно в точках A_1 и A_2 , а сторону AC этого угла — соответственно в точках B_1 и B_2 . Найдите: а) AA_2 и AB_2 , если $A_1A_2 = 2A_1A = 12$ см, $AB_1 = 5$ см; б) A_2B_2 и AA_2 , если $A_1B_1 = 18$ см, $AA_1 = 24$ см, $AA_2 = \frac{3}{2} A_1A_2$.



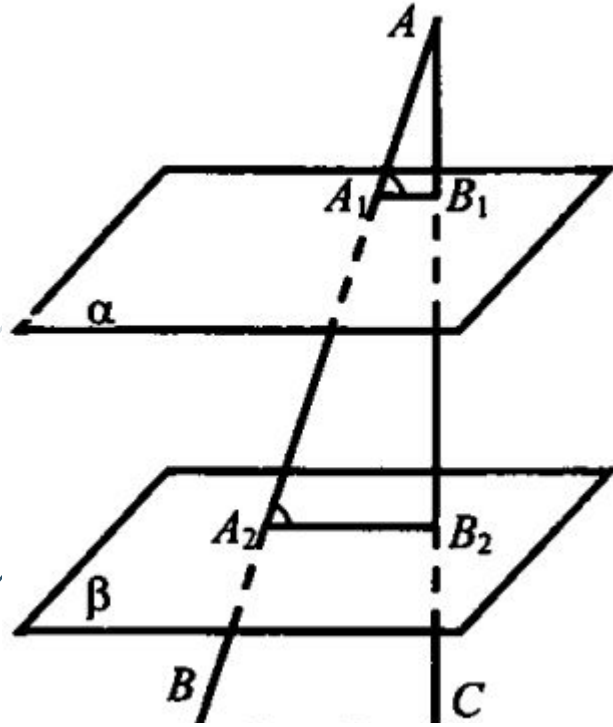
№ 10 (№ 63а из учебника)



Дано: $\alpha \parallel \beta$, $\angle BAC$, $\alpha \cap AB = A_1$, $\beta \cap AB = A_2$,
 $\alpha \cap AC = B_1$, $\beta \cap AC = B_2$, $A_1A_2 = 2A_1A = 12$ см,
 $AB_1 = 5$ см (рис. 7).

Найти: AA_2 и AB_2 .

№ 10 (№ 63а из учебника)



Дано: $\alpha \parallel \beta$, $\angle BAC$, $\alpha \cap AB = A_1$, $\beta \cap AB = A_2$, $\alpha \cap AC = B_1$, $\beta \cap AC = B_2$, $A_1A_2 = 2A_1A = 12$ см, $AB_1 = 5$ см (рис. 7).

Найти: AA_2 и AB_2 .

Решение: $\alpha \parallel \beta$ (BAC) пересекает α и β . По свойству параллельных плоскостей $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ (п. 11, 1°). (BAC): $\triangle A_1AB_1 \sim \triangle A_2AB_2$ (по двум углам, $\angle A$ – общий, $\angle AA_1B_1 = \angle AA_2B_2$ – соответственные при параллельных прямых A_1B_1 и A_2B_2 и секущей AB). Из подобия треугольников следу-

ет $\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{AB_1}{AB_2}$; $A_1A_2 = 2A_1A = 12$ см, 12 см = $2A_1A$, $A_1A = 6$ см; $AA_2 = A_1A +$

$+ A_1A_2 = 6 + 12 = 18$ (см); $\frac{6}{18} = \frac{5}{AB_2}$, $AB_2 = \frac{5 \cdot 18}{6} = 15$; $AB_2 = 15$ см. (От-

вет: $AA_2 = 18$ см, $AB_2 = 15$ см.)

Домашнее задание

№№ 1, 2, 16, 27, 38, 44, 63(б) + задачи:

1. Точки A, B, C не лежат на одной прямой.
 $M \in AB, K \in AC, P \in MK$.
Докажите, что точка P лежит в плоскости ABC .
2. Плоскость α и β пересекаются по прямой c .
Прямая a лежит в плоскости α и пересекает плоскость β . Пересекаются ли прямые a и c ? Почему?
3. Отрезок AB не пересекает плоскость α . Через середину отрезка C и концы отрезка A и B проведены прямые, параллельные между собой и пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1, C_1 .
Вычислить длину отрезка CC_1 , если $AA_1 = 5, BB_1 = 7$.