2 ноября 2020 г.

Раздел 2. Прямые и плоскости в пространстве

Тема 2.1. Прямые и плоскости в пространстве

Урок-практическое занятие № 10

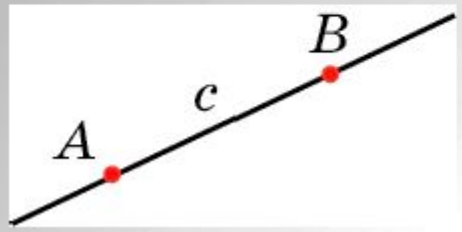
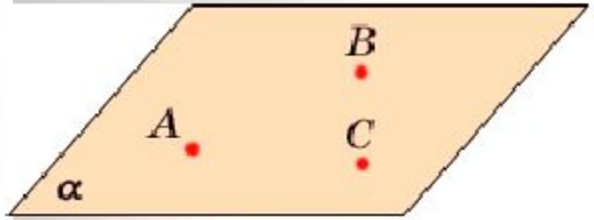
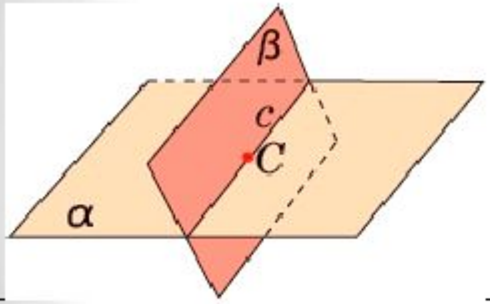
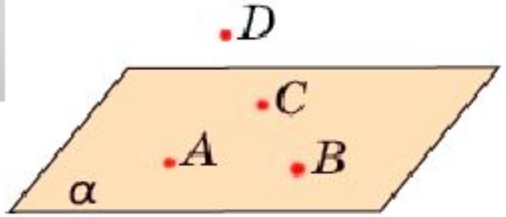
Параллельность прямых и плоскостей в пространстве

преподаватель кафедры ООД Бразнец Елена Сергеевна

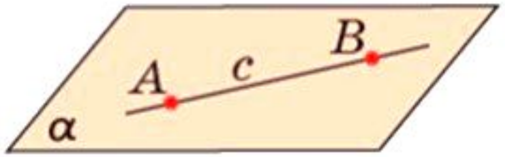
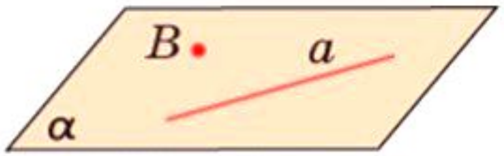
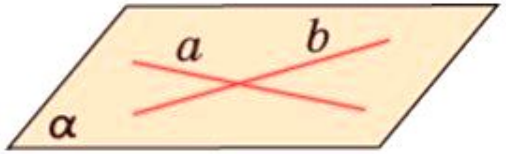
Вопросы

- Предмет стереометрии
- Аксиомы стереометрии.
  Некоторые следствия аксиом.
- Определение параллельных прямых, прямой и плоскости, плоскостей в пространстве.
- Скрещивающиеся прямые.
  Признак скрещивающихся прямых.
- Теоремы о параллельных прямых, прямой и плоскости, плоскостей в пространстве.
- Взаимное расположение прямых, прямой и плоскости, плоскостей в пространстве.

АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ

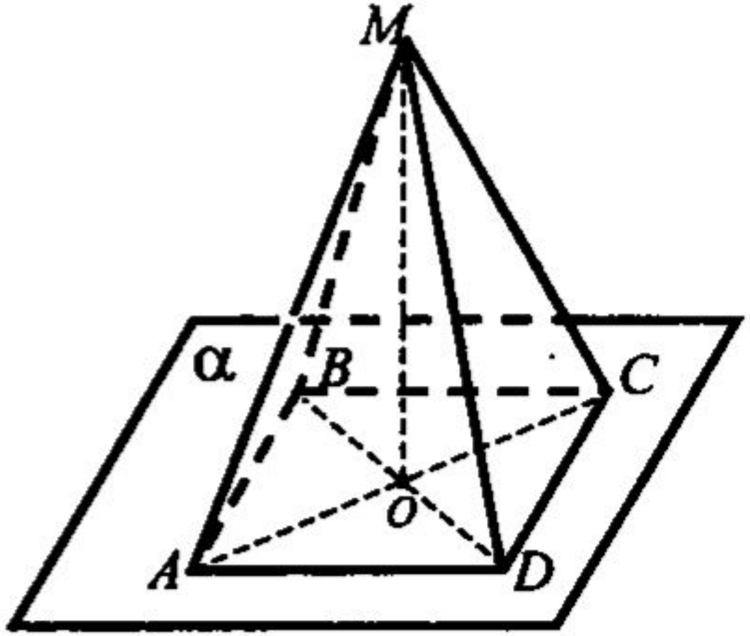
	Через любые две точки пространства проходит единственная прямая
	Через любые три точки пространства, не принадлежащие одной прямой, проходит единственная плоскость
	Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой
	Существуют по крайней мере четыре точки, не принадлежащие одной плоскости

СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ

	Если прямая имеет с плоскостью две общие точки, то она лежит в этой плоскости
	Через прямую и не принадлежащую ей точку проходит единственная плоскость
	Через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость

№ 1

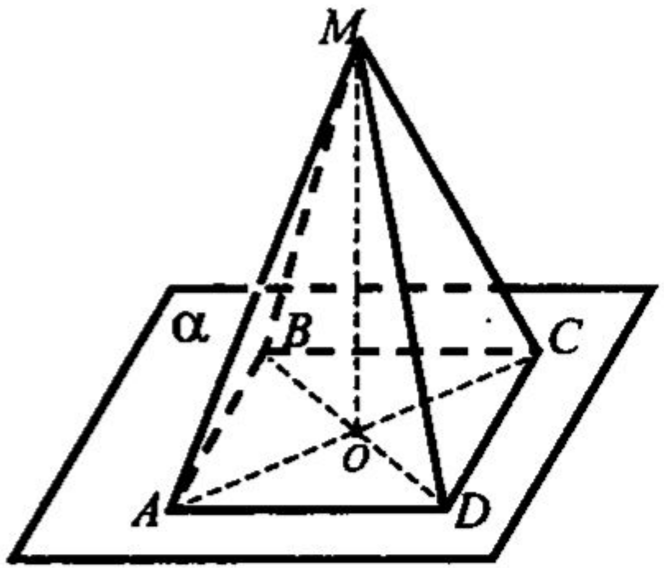
ABCD – ромб, *O* – точка пересечения его диагоналей, *M* – точка пространства, не лежащая в плоскости ромба. Точки A, D, O лежат в плоскости α.



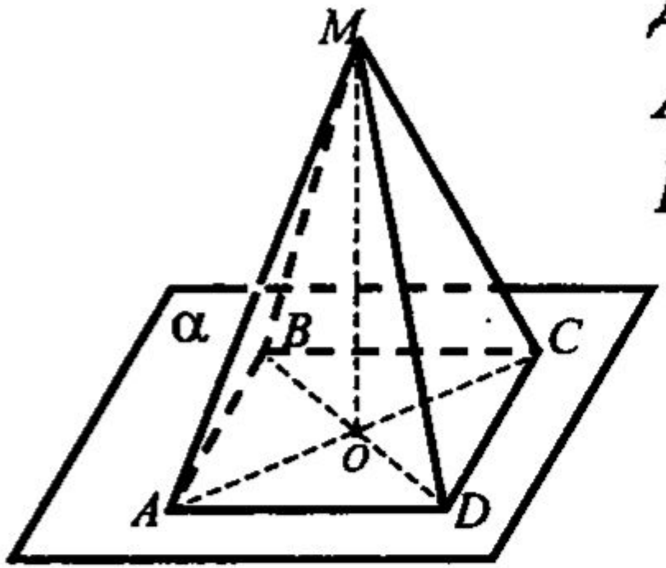
Дайте ответ на поставленные вопросы с необходимыми обоснованиями.

1) Лежат ли в плоскости α точки *B* и *C*?
2) Лежит ли в плоскости *MOB* точка *D*?
3) Назовите линию пересечения плоскостей *MOB* и *ADO*.
4) Вычислите площадь ромба, если сторона его равна 4 см, а угол равен 60°. Предложите различные способы вычисления площади ромба.

№ 1



№ 1



Дано: $ABCD$ – ромб, $AC \cap BD = O$, $M \in \alpha$, $(A, D, O) \in \alpha$.
$AB = 4$ см, $\angle A = 60°$.
Найти: $(B, C) \in \alpha$, $D \in MOB$; $MOB \cap ADO$, S_{ABCD}.

Решение

1) $D \in \alpha$, $O \in \alpha$, то по A_2 $DO \subset \alpha$, так как $B \in DO$, то $B \in \alpha$.
Аналогично $A \in \alpha$, $O \in \alpha$, то по A_2 $AO \subset \alpha$, так как $C \in AO$, то $C \in \alpha$.

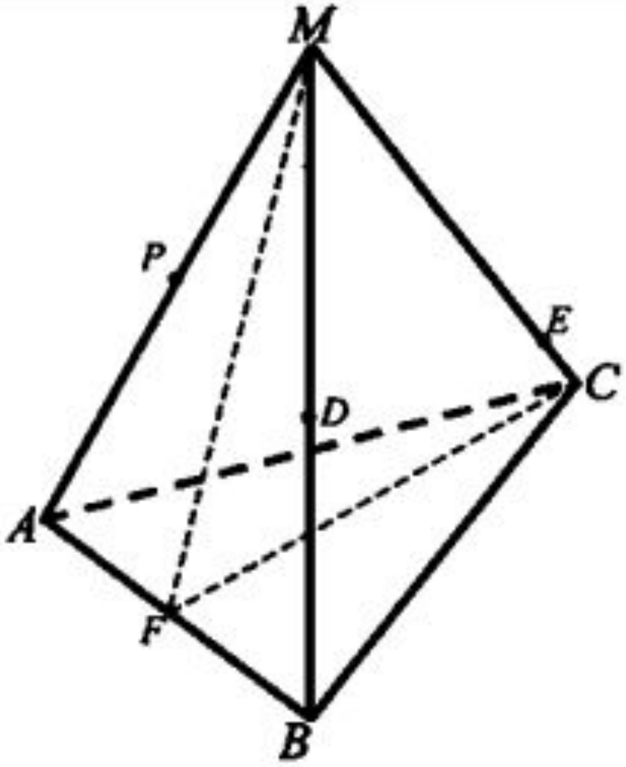
2) $OB \subset MOB$, $D \in OB$, то $D \in MOB$.

3) $O \in MOB$, $O \in ADO$.
$B \in MOB$, $B \in ADO \Rightarrow MOB \cap ADO = BO$, но так как BO – часть DB, то $MOB \cap ADO = DB$.

4) $S_{ромба} = 4 \cdot 4 \cdot \sin 60° = 8\sqrt{3}$ (см^2).

Ответ: $8\sqrt{3}$ *см*^{2}.

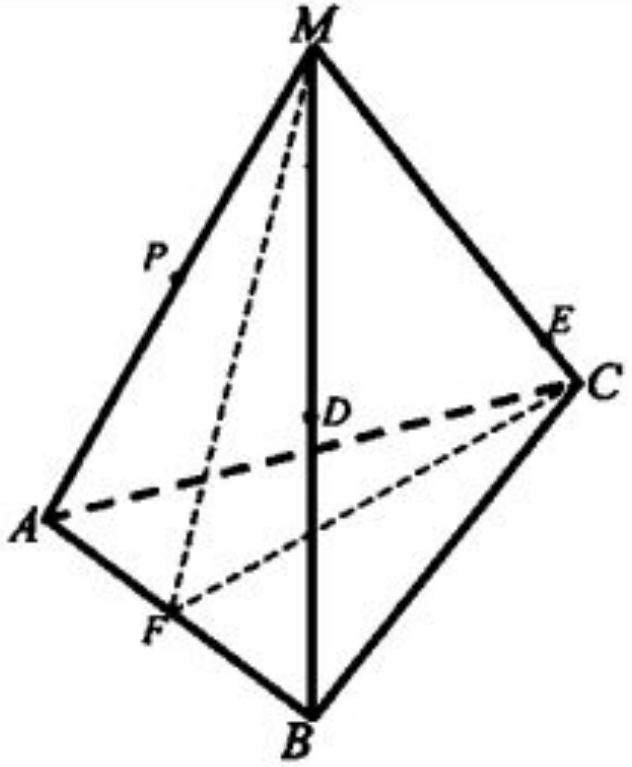
№ 2



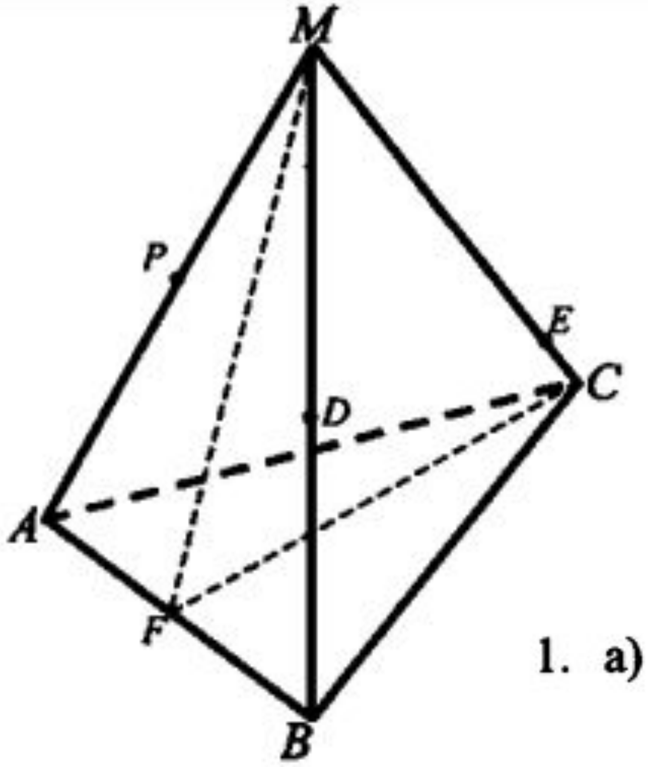
Дан тетраэдр $MABC$, каждое ребро которого равно 6 см. $Д \in MB$, $E \in MC$, $F \in AB$, $AF = FB$, $P \in MA$.

1) Назовите прямую, по которой пересека- ют-ся плоскости: а) MAB и MFC; б) MCF и ABC.
2) Найдите длину CF и S_{ABC}.
3) Как построить точку пересечения пря- мой ДЕ с плоскостью АВС?

№ 2



№ 2



Дан тетраэдр $MABC$, каждое ребро которого равно 6 см. $Д \in MB$, $E \in MC$, $F \in AB$, $AF = FB$, $P \in MA$.

1) Назовите прямую, по которой пересека- ют-ся плоскости: а) MAB и MFC; б) MCF и ABC.
2) Найдите длину CF и S_{ABC}.
3) Как построить точку пересечения пря- мой ДЕ с плоскостью ABC?

Решение

1. а) $\left.\begin{array}{l} M \in MAB,\ M \in MFC, \\ F \in MAB \text{ и } F \in MFC \end{array}\right| \Rightarrow$ аксиома A_3 $MAB \cap MFC = MF$.

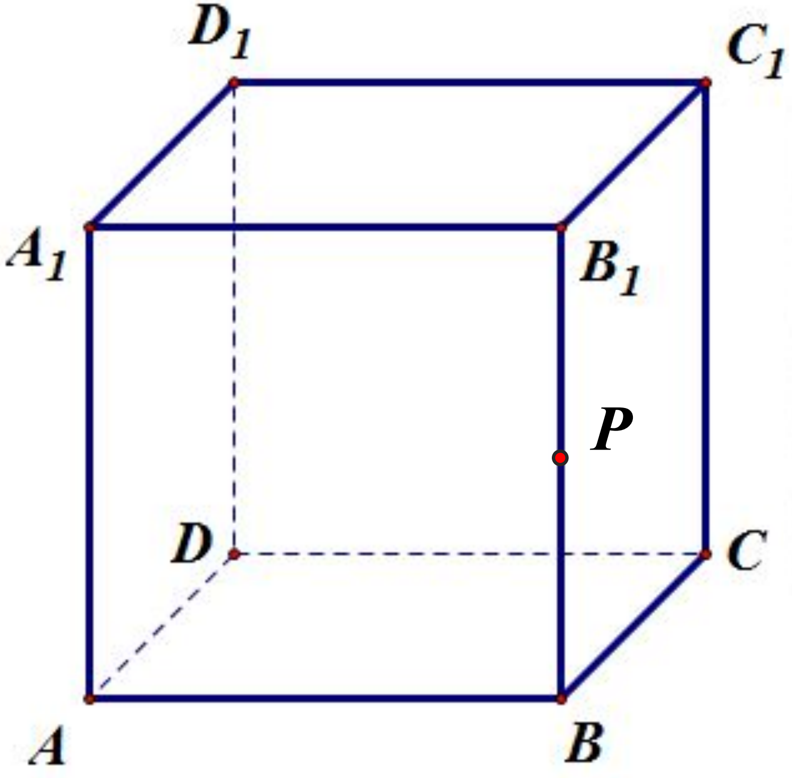
   б) $\left.\begin{array}{l} C \in MCF,\ C \in ABC, \\ F \in MFC \text{ и } F \in ABC \end{array}\right| \Rightarrow$ аксиома A_3 $MCF \cap ABC = FC$.

2. ΔABC – равносторонний $\Rightarrow$ FC – медиана, высота, биссектриса. ΔCFB – прямоугольный: $CB = 6$ (см), $FB = 3$ (см). По теореме Пифагора $FC = 3\sqrt{3}$ (см). $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot CF$; $S_{ABC} = 9\sqrt{3}$ (см^2).

3. $ДE$ и BC лежат в плоскости BMC. Пусть они пересекаются в точке K, так как K принадлежит BC, значит K принадлежит плоскости ABC (аксиома A_2):
   1) $ДE \in BMC$, $BC \in BMC$;
   2) $ДE \in BC = K$ ($K \in BC \Rightarrow K \in ABC$).

Ответ: $3\sqrt{3}$ *см*, $9\sqrt{3}$ *см^2*.

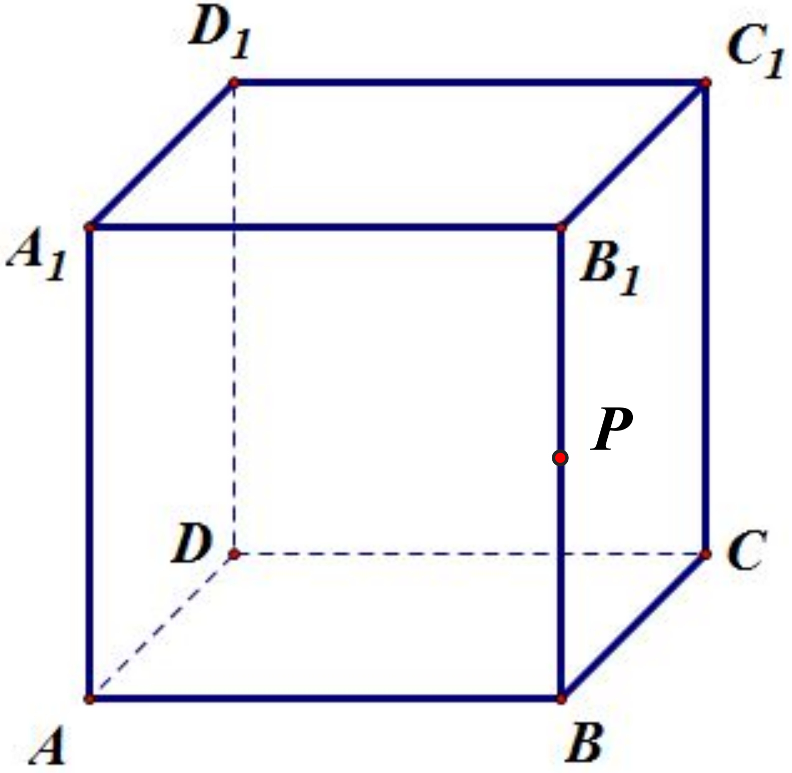
№ 3



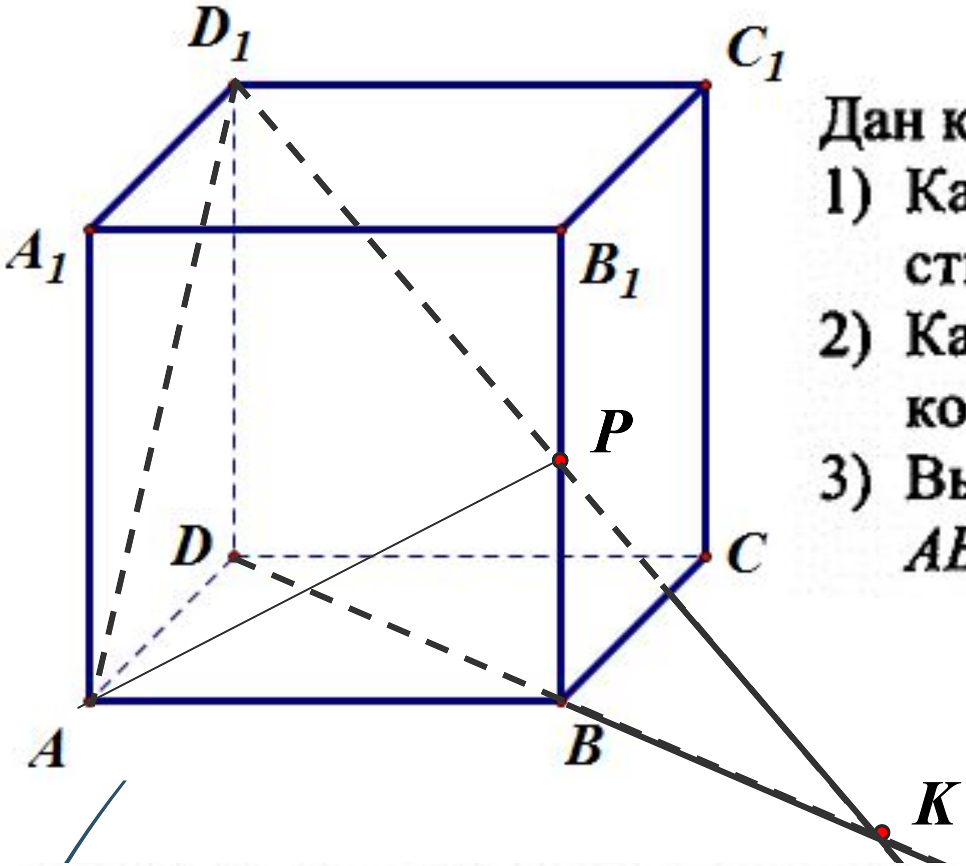
Дан куб $АВСДА_1В_1С_1Д_1$, $P \in BB_1$, $B_1P = PB$.

1) Как построить точку пересечения плоскости ABC с прямой $Д_1P$?
2) Как построить линию пересечения плоскости $АД_1P$ и ABB_1?
3) Вычислите длину отрезков AP и $АД_1$, если $AB = a$.

№ 3



№ 3



Дан куб $ABCДA_1B_1C_1Д_1$, $P \in BB_1$, $B_1P = PB$.

1) Как построить точку пересечения плоскости ABC с прямой $Д_1P$?
2) Как построить линию пересечения плоскости $AД_1P$ и ABB_1?
3) Вычислите длину отрезков AP и $AД_1$, если $AB = a$.

Решение

1. $Д_1P$ и $ДB$ лежат в одной плоскости $Д_1ДB$. Пусть они пересекаются в точке K. Тогда точка K принадлежит прямой $ДB$, а значит, $K \in ABC$.

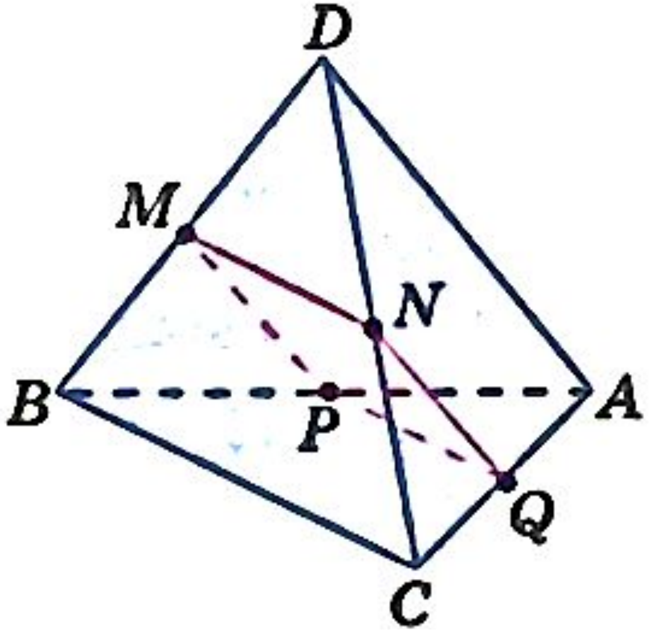
2. Точка P принадлежит BB_1, а значит, и плоскости ABB_1. Точка P принадлежит AB, а значит, и плоскости ABB_1. Следовательно, по аксиоме A_2: $AP \subset ABB_1$. Аналогично $AP \subset AД_1P$. Значит, $AД_1P \cap ABB_1 = AP$.

3. а) Из ΔABP, по теореме Пифагора $AP = \frac{a}{2}\sqrt{5}$; б) Из $\Delta AДД_1$ по теореме Пифагора $AД_1 = a\sqrt{2}$.

Ответ: $\frac{a}{2}\sqrt{5}, a\sqrt{2}$ *см²*.

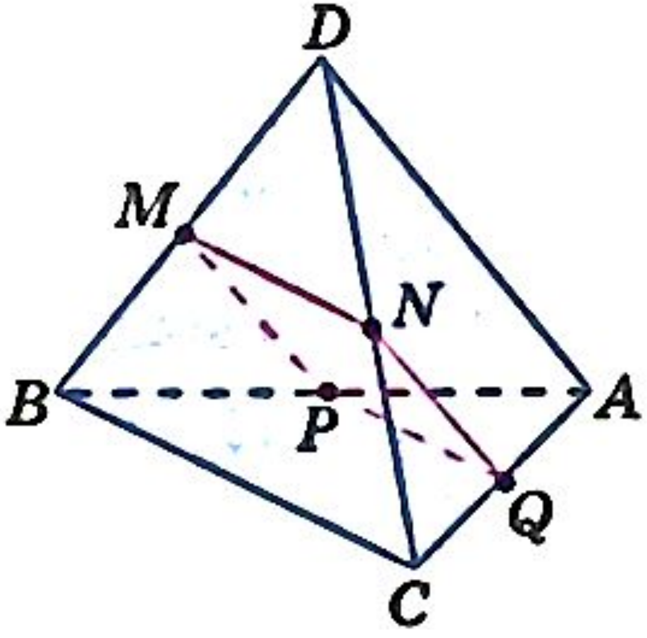
№ 4 (№ 17 из учебника)

На рисунке 17 точки M, N, Q и P — середины отрезков DB, DC, AC и AB. Найдите периметр четырехугольника $MNQP$, если $AD = 12$ см, $BC = 14$ см.



№ 4 (№ 17 из учебника)

На рисунке 17 точки M, N, Q и P — середины отрезков DB, DC, AC и AB. Найдите периметр четырехугольника $MNQP$, если $AD = 12$ см, $BC = 14$ см.



Дано: M – середина BD; N – середина CD; Q – середина AC; P – середина AB; $AD = 12$ см; $BC = 14$ см (рис. 5).

Найти: P_{MNQP} – ?

Решение:

1. $MN \parallel BC$ по составу средней линии $\Rightarrow$ $\Rightarrow MN \parallel PQ$; $PQ \parallel BC$.
2. $PM \parallel AD$ по составу средней линии $\Rightarrow$ $\Rightarrow PM \parallel QN$; $NQ \parallel DA$.

3. По определению $MNQP$ – параллелограмм.

4. $PQ = 7$; $PM = 6 \Rightarrow P_{MNQP} = 2\,(7 + 6) = 26$ *(см)*

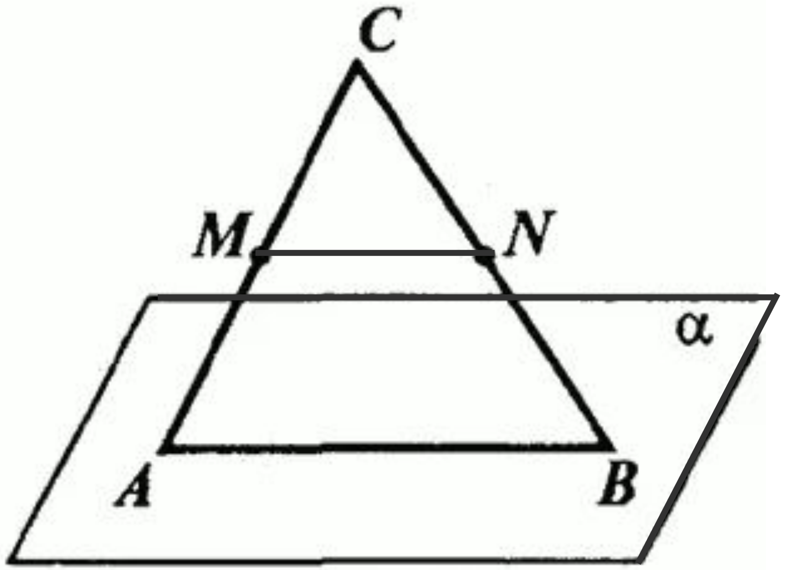
Ответ: 26 *см.*

№ 5 (№ 22 из учебника)

Точки A и B лежат в плоскости α, а точка C не лежит в этой плоскости. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков AC и BC, параллельна плоскости α.

№ 5 (№ 22 из учебника)

Точки A и B лежат в плоскости α, а точка C не лежит в этой плоскости. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков AC и BC, параллельна плоскости α.



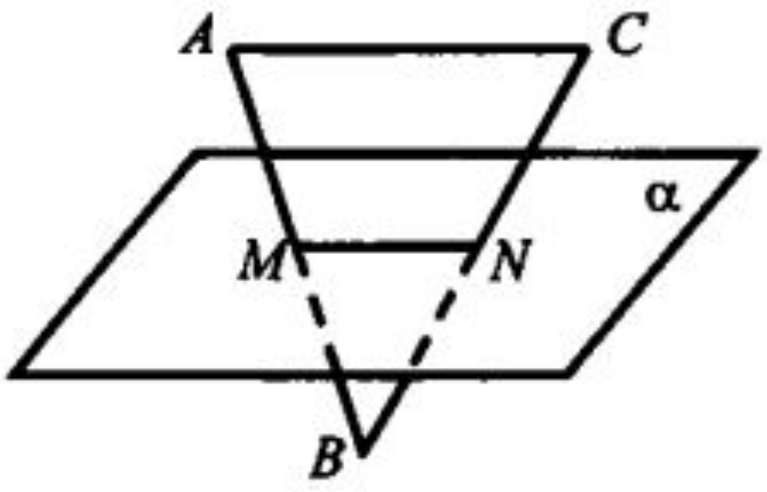
Дано: $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$; $AM = MC$; $BN = NC$.

Доказать: $MN \parallel \alpha$.

Доказательство: $MN \parallel AB$ (по свойству средней линии), $AB \in \alpha$; $MN \parallel \alpha$ по признаку.

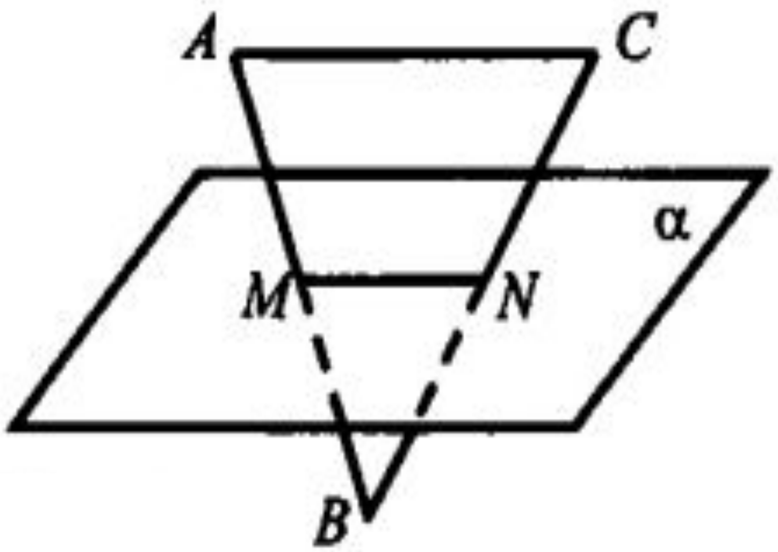
№ 6 (№ 26 из учебника)

Сторона AC треугольника ABC параллельна плоскости α, а стороны AB и BC пересекаются с этой плоскостью в точках M и N. Докажите, что треугольники ABC и MBN подобны.



№ 6 (№ 26 из учебника)

Дано: $AC \parallel \alpha$, $AB \cap \alpha = M$; $CB \cap \alpha = N$ (рис. 1).



Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta MBN$.

Доказательство:

1. Докажем, что $AC \parallel MN$;

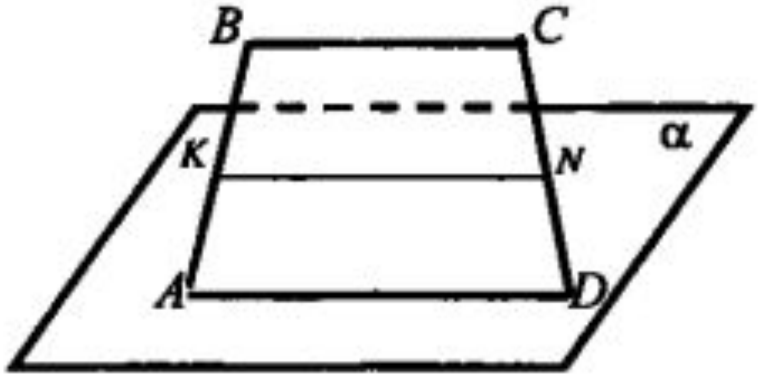
$$\left.\begin{array}{l} AC \parallel \alpha \\ MN \in \alpha \end{array}\right| \Rightarrow AC \not\cap MN;$$

$$\left.\begin{array}{l} AC \in (ABC) \\ MN \in (ABC) \\ AC \not\cap MN \end{array}\right| \Rightarrow AC \parallel MN \text{ (по определению).}$$

2. Так как $AC \parallel MN \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta MBN$.

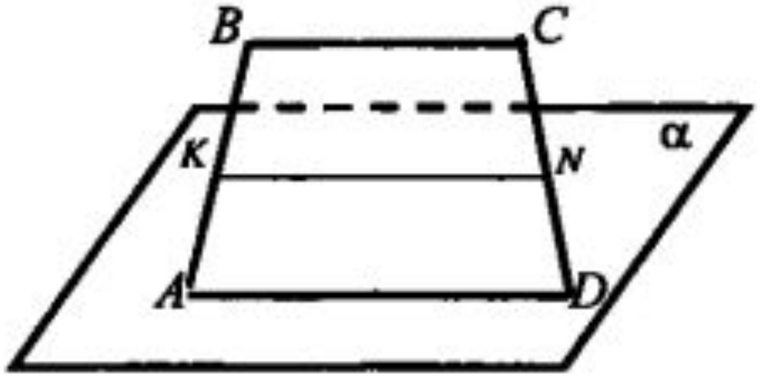
№ 7

Через основание AD трапеции $ABCD$ проведена плоскость α. $BC \notin \alpha$. Докажите, что прямая, проходящая через середины сторон AB и CD, параллельна плоскости α.



№ 7

Через основание AD трапеции $ABCD$ проведена плоскость α. $BC \notin \alpha$. Докажите, что прямая, проходящая через середины сторон AB и CD, параллельна плоскости α.



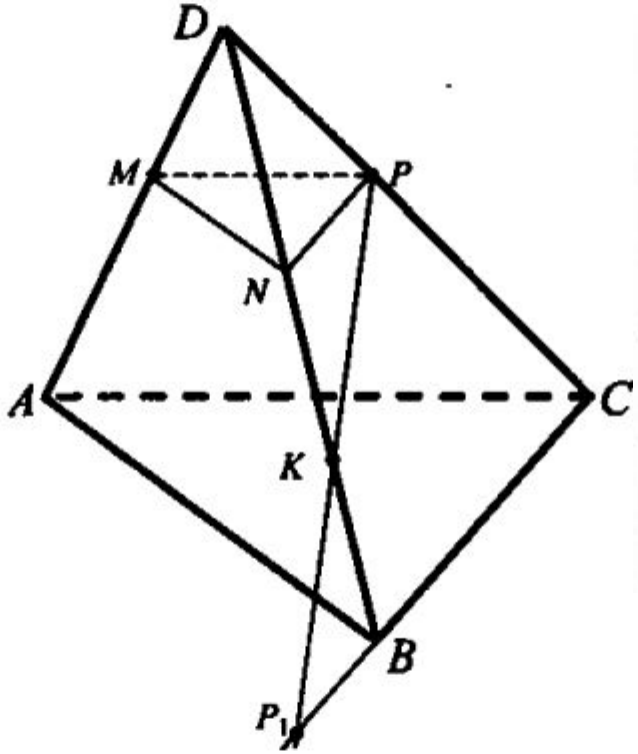
Дано: $ABCD$ – трапеция; $AD \in \alpha$, $CB \notin \alpha$; $AK = KB$, $CN = ND$ (рис. 3).

Доказать: $KN \parallel \alpha$.

Доказательство:

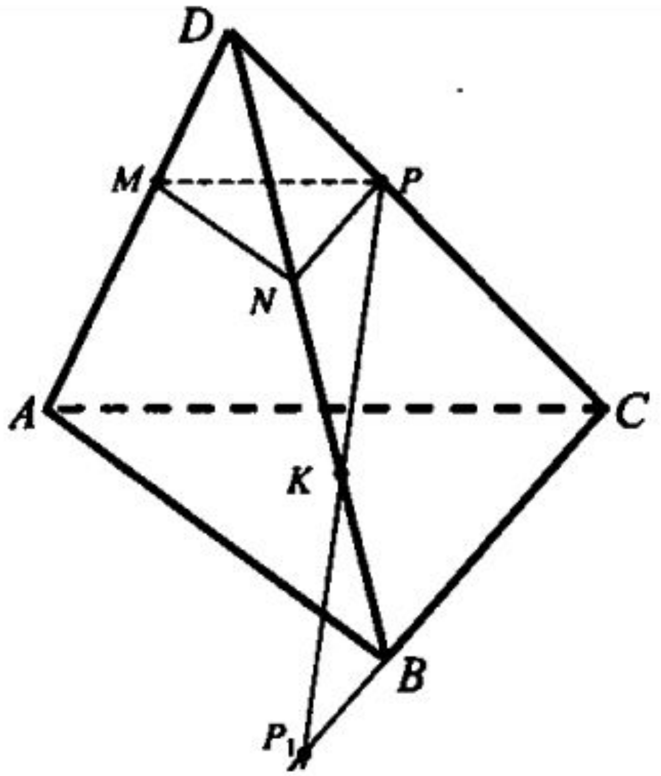
1. KN – средняя линия трапеции, значит $KN \parallel AD$.
2. $\left.\begin{array}{l} KN \parallel AD \\ AD \in \alpha \end{array}\right| \Rightarrow KN \parallel \alpha$ (по теореме о параллельности прямой и плоскости).

№ 8 (№ 34 из учебника)



Точка D не лежит в плоскости треугольника ABC, точки M, N и P — середины отрезков DA, DB и DC соответственно, точка K лежит на отрезке BN. Выясните взаимное расположение прямых: а) ND и AB; б) PK и BC; в) MN и AB; г) MP и AC; д) KN и AC; е) MD и BC.

№ 8 (№ 34 из учебника)



1) ***Задача № 34***

Дано: $D \in$ плоскости ABC. $AM = MD$; $DN = NB$; $DP = PC$; $K \in BN$ (рис. 8).

Определить взаимное расположение прямых:

а) ND и AB. $ND \cap AB = B$ (D, A, N и B лежат в одной плоскости и $AB \nparallel ND$);

б) PK и BC. $PK \cap BC = P_1$ (K, P, C, B лежат в одной плоскости и $PK \nparallel BC$);

в) MN и AB. $MN \parallel AB$ (по свойству средней линии треугольника $MN \parallel AB$);

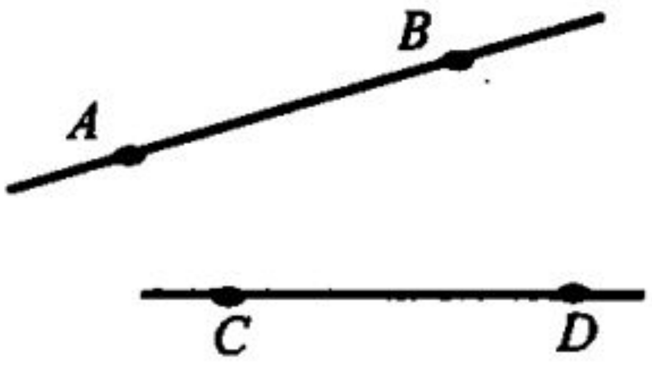
г) MP и AC. $MP \parallel AC$ (по свойству средней линии треугольника $MP \parallel AC$);

д) KN и AC. $KN \cap$ плоскости $ADC = D$; $D \notin AC \Rightarrow KN$ скрещивается с AC по признаку скрещивающихся прямых;

е) MD и BC; $MD \cap$ плоскости $ABC = A$, $A \notin BC \Rightarrow MD$ скрещивается с BC по признаку скрещивающихся прямых.

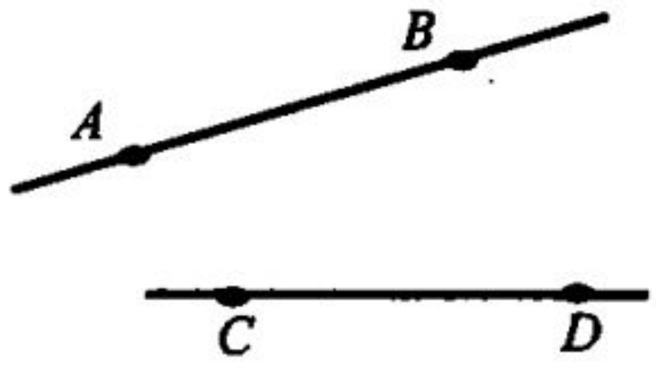
№ 9 (№ 39 из учебника)

Докажите, что если AB и CD скрещивающиеся прямые, то AD и BC также скрещивающиеся прямые.



№ 9 (№ 39 из учебника)

Докажите, что если AB и CD скрещивающиеся прямые, то AD и BC также скрещивающиеся прямые.



Дано: AB и CD скрещиваются

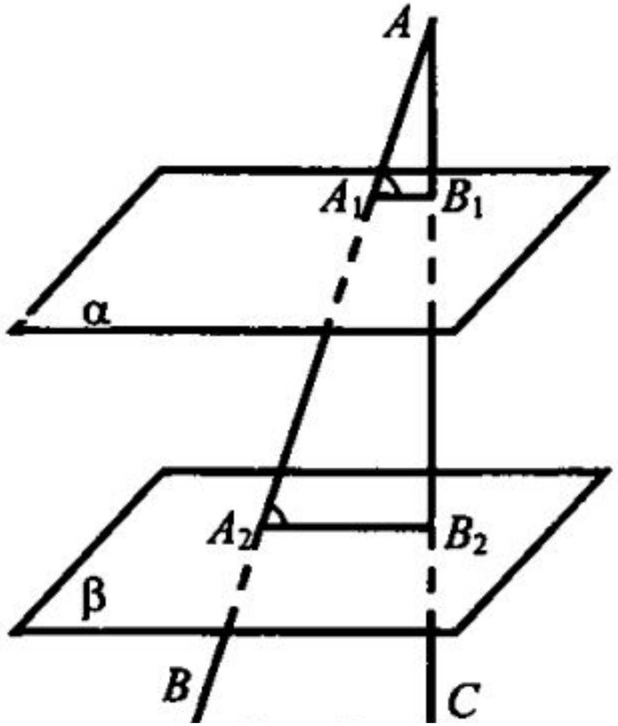
Доказать, что AD и BC скрещиваются.

Доказательство:

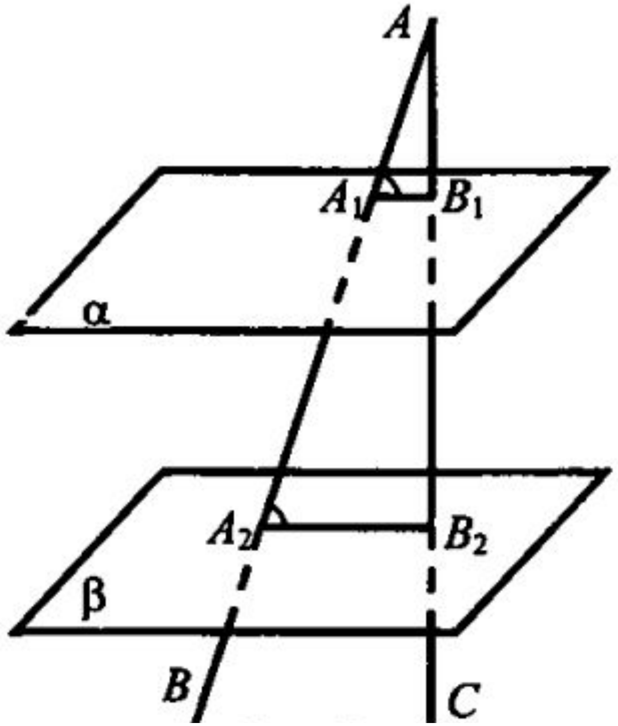
1. Точка A, C, D лежат в одной плоскости (по аксиоме A_1). Пусть эта плоскость α.
2. $B \notin \alpha$, так как AB и CD скрещиваются (по определению скрещивающихся прямых).
3. \`$BC \cap \alpha = C$; $C \notin AD \Rightarrow AD$ и BC скрещиваются (по признаку скрещивающихся прямых).

№ 10 (№ 63а из учебника)

Параллельные плоскости α и β пересекают сторону AB угла BAC соответственно в точках A_1 и A_2, а сторону AC этого угла — соответственно в точках B_1 и B_2. Найдите: а) AA_2 и AB_2, если $A_1A_2 = 2A_1A = 12$ см, $AB_1 = 5$ см; б) A_2B_2 и AA_2, если $A_1B_1 = 18$ см, $AA_1 = 24$ см, $AA_2 \quad \frac{3}{2}A_1A_2$.



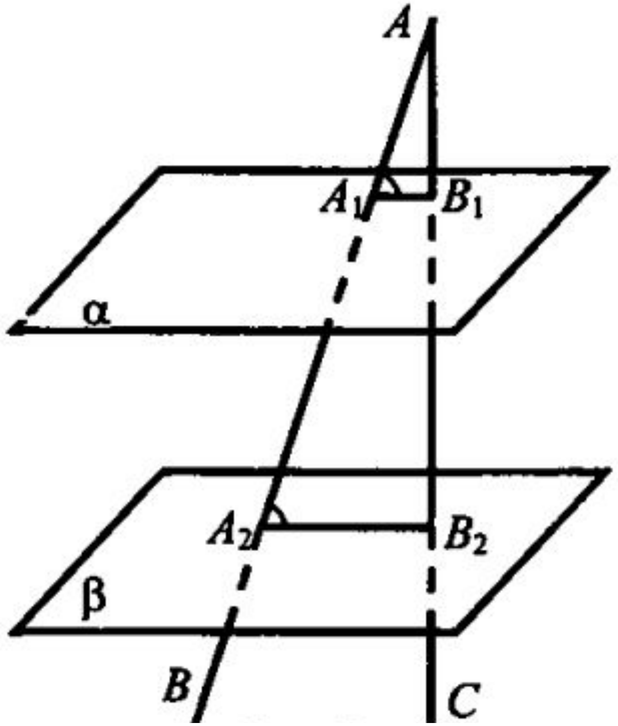
№ 10 (№ 63а из учебника)



Дано: $\alpha \parallel \beta$, $\angle BAC$, $\alpha \cap AB = A_1$, $\beta \cap AB = A_2$, $\alpha \cap AC = B_1$, $\beta \cap AB = B_2$, $A_1A_2 = 2A_1A = 12$ см, $AB_1 = 5$ см (рис. 7).

Найти: AA_2 и AB_2.

№ 10 (№ 63а из учебника)



Дано: $\alpha \parallel \beta$, $\angle BAC$, $\alpha \cap AB = A_1$, $\beta \cap AB = A_2$, $\alpha \cap AC = B_1$, $\beta \cap AB = B_2$, $A_1A_2 = 2A_1A = 12$ см, $AB_1 = 5$ см (рис. 7).

Найти: AA_2 и AB_2.

Решение: $\alpha \parallel \beta$ (BAC) пересекает α и β. По свойству параллельных плоскостей $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ (п. 11, 1°). (BAC): $\Delta A_1AB_1 \sim \Delta A_2AB_2$ (по двум углам, $\angle A$ – общий, $\angle AA_1B_1 = \angle AA_2B_2$ – соответственные при параллельных прямых A_1B_1 и A_2B_2 и секущей AB). Из подобия треугольников следует $\dfrac{AA_1}{AA_2} = \dfrac{AB_1}{AB_2}$; $A_1A_2 = 2A_1A = 12$ см, 12 см $= 2A_1A$, $A_1A = 6$ см; $AA_2 = A_1A + A_1A_2 = 6 + 12 = 18$(см); $\dfrac{6}{18} = \dfrac{5}{AB_2}$, $AB_2 = \dfrac{5 \cdot 18}{6} = 15$; $AB_2 = 15$ см. (*Ответ*: $AA_2 = 18$ см, $AB_2 = 15$ см.)

Домашнее задание

№№ 1, 2, 16, 27, 38, 44, 63(б) + задачи:

1. Точки A, B, C не лежат на одной прямой. $M \in AB$, $K \in AC$, $P \in MK$.
   Докажите, что точка P лежит в плоскости ABC.

2. Плоскость α и β пересекаются по прямой c. Прямая a лежит в плоскости α и пересекает плоскость β. Пересекаются ли прямые a и c? Почему?

3. Отрезок AB не пересекает плоскость α. Через середину отрезка C и концы отрезка A и B проведены прямые, параллельные между собой и пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1, C_1.
   Вычислить длину отрезка CC_1, если $AA_1 = 5$, $BB_1 = 7$.