

# ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР

Игра – математическая модель ситуации, некоторая упрощённая схема, где зафиксированы все участвующие стороны, правила развития данной ситуации, определённые выигрыши после каждого хода, правила окончания игры. Из этого следует, что основными в игровой модели являются следующие элементы:

- в игре могут быть две или более стороны, называемые игроками, которые преследуют различные интересы;
- в игре фиксируют правила игры: возможные действия игроков, ситуация выигрыша и его величина, правила остановки игры;
- игры бывают парные, когда есть только две стороны, и множественные, когда участие в игре принимают три и более сторон;
- игры бывают коалиционные, когда часть игроков соединяют свои интересы и действуют как один игрок.

Мы рассмотрим только парные игры как наиболее важные для моделирования реальных явлений. Результаты анализа таких моделей позволяют сформулировать принципы и подходы к выработке оптимальных решений в условиях конкуренции.

В парной игре два игрока: А – это «мы» и В – «противник». Игры называются антагонистическими, или с противоположными интересами, если игрок А выигрывает ровно столько, сколько проигрывает В. В сумме выигрыш равен 0, поэтому такую игру называют игрой с нулевой суммой. Но существуют также парные игры и с ненулевой суммой (неантагонистические).

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР

Ходы в игре могут быть личные и случайные. Личный ход зависит от сознательного решения стороны, а случайный ход - результат случайного механизма, который иногда применяется специально, а иногда случайно вовлекается в игру. В ходе проведения игры каждый игрок имеет какие-то альтернативы поведения, которые называют стратегиями игроков. В общем случае стратегия игрока – это совокупность правил, определяющих выбор вариантов действий при каждом личном ходе игрока в зависимости от сложившейся ситуации. Применение в каждой игре стратегии однозначно определяет исход игры. Если количество стратегий конечно - игра конечная, в противном случае - бесконечная игра. В теории игр считается, что игра повторяется многократно и игроков интересует средний выигрыш. Задачей теории игр является обоснование оптимальных стратегий обоих игроков.

# ПЛАТЕЖНАЯ МАТРИЦА АНТОГОНИСТИЧЕСКОЙ ИГРЫ

Будем считать, что у игрока А всего  $m$  стратегий, а у игрока В –  $n$  стратегий.

$A_1 A_2 \dots A_m$   
 $B_1 B_2 \dots B_n$

Таблица 41

	<b>B<sub>1</sub></b>	<b>B<sub>2</sub></b>	·	<b>B<sub>n</sub></b>
<b>A<sub>1</sub></b>	$a_{11}$	$a_{12}$		$a_{1n}$
<b>A<sub>2</sub></b>	$a_{21}$	$a_{22}$	·	$a_{2n}$
·	·	·		
<b>A<sub>m</sub></b>	$a_{m1}$	$a_{m2}$	·	$a_{mn}$

Если игрок А применяет свою стратегию  $A_i$ , а В применяет  $B_j$ , то выигрыш в игре составляет  $a_{ij}$ . А старается увеличивать выигрыш, а В – уменьшить эту величину. Величины  $a_{ij}$  образуют матрицу, которая называется платежной матрицей.

Рассмотрим пример простейшей игры «Поиск».

Игрок А прячется в двух местах I и II. Игрок В ищет игрока А в местах I и II. Если В находит А, то А платит ему 1 рубль, если не находит, то В платит 1 рубль игроку А.

Платежная матрица – Таблица 42.

Таблица 42

	<b>B<sub>1</sub></b>	<b>B<sub>2</sub></b>
<b>A<sub>1</sub></b>	-1	1
<b>A<sub>2</sub></b>	1	-1

# ПЛАТЕЖНАЯ МАТРИЦА АНТОГОНИСТИЧЕСКОЙ ИГРЫ

Основой для анализа игр является анализ платежной матрицы. Поэтому игры, для которых могут быть построены платежные матрицы, называются матричными играми.

Для игр с полной информацией, т. е. когда один игрок знает, как поступил второй, всегда можно построить платёжную матрицу.

Основным принципом, которым необходимо пользоваться для объективной оценки игровой ситуации, является следующий подход: противник настолько же разумен, как и мы, и делает все, чтобы использовать свои возможности против нас, т. е. активно противодействует в выборе оптимального решения. Задачей теории игр является обоснование оптимальных стратегий обоих игроков.

Если игрок А будет применять любое сколь угодно сложное правило чередования мест I и II, то В все равно разгадает этот закон чередования и будет выигрывать. Ниже мы обоснуем оптимальные стратегии игроков А и В. Рассмотрим другие простые примеры игр.

# ПЛАТЕЖНАЯ МАТРИЦА АНТОГОНИСТИЧЕСКОЙ ИГРЫ

Игра «Три пальца».

*Таблица 43*

	<b>B<sub>1</sub></b>	<b>B<sub>2</sub></b>	<b>B<sub>3</sub></b>
<b>A<sub>1</sub></b>	2	-3	4
<b>A<sub>2</sub></b>	-3	4	-5
<b>A<sub>3</sub></b>	4	-5	6

Игра «Конкуренты».

*Таблица 44*

	<b>B<sub>1</sub></b>	<b>B<sub>2</sub></b>	<b>B<sub>3</sub></b>
<b>A<sub>1</sub></b>	-2	-2	1
<b>A<sub>2</sub></b>	1	0	2
<b>A<sub>3</sub></b>	0	-1	1

Игрок А и игрок В одновременно показывают один, два или три пальца. Выигрыш равен сумме, причём выигрывает А, если сумма очков четная, и В, если сумма нечетная. Построим платежную матрицу.

Фирма А может поставить на рынок три товара  $A_1, A_2, A_3$ , а фирма В три своих конкурирующих товара  $B_1, B_2, B_3$ . Если фирма А поставит товар  $A_i$ , а фирма В - товар  $B_j$ , то в результате выигрыш в доходах фирм определяется приведенной платежной матрицей.

# ПЛАТЕЖНАЯ МАТРИЦА АНТОГОНИСТИЧЕСКОЙ ИГРЫ

Возникает вопрос – как на основе анализа матрицы найти оптимальное решение игры, и что понимать под оптимальным решением игры?

Рассмотрим так называемый принцип минимакса при решении игры.

Ясно, что игроки должны действовать с разумной осторожностью, т. е. необходимо, чтобы мы больше всего реагировали на опасные для нас ходы со стороны противника. По отношению к игроку А рассуждаем так, что если он применит стратегию  $A_1$ , то можно зафиксировать самый плохой для него выигрыш:  $a_1 = \min a_{ij}$ .

# ПЛАТЕЖНАЯ МАТРИЦА АНТОГОНИСТИЧЕСКОЙ ИГРЫ

Для стратегии  $A_2$ :  $a_2 = \min a_{2j}$ , и так далее.

Для  $A_m$ :  $a_m = \min a_{mj}$ .

Тогда естественно, что игрок А выберет ту стратегию, для которой величина  $a_i$  будет максимальной (по строкам в платежной матрице).

Величина  $a = \max_i \min_j a_{ij}$  называется нижней ценой игры. Она показывает, меньше какой величины не будет выигрыш игрока А при осторожном подходе к игре. Аналогично рассуждая относительно игрока В, получаем величины:

$b_j = \max a_{ij}$  - максимальные величины в столбцах, и затем

$b = \max_j \min_i a_{ij}$  - верхняя цена игры.

Эта величина показывает, больше какой величины не может быть выигрыш в игре.



# ПЛАТЕЖНАЯ МАТРИЦА АНТОГОНИСТИЧЕСКОЙ ИГРЫ

Получим значения  $a$  и  $b$  для вышеприведенных игр.

Для игры «Поиск»  $a = -1$ ;  $b = 1$ .

Для игры «Три пальца»  $a = -3$ ;  $b = 4$ .

Для игры «Конкуренты»  $a = b = 0$ .

Эта игра обладает седловой точкой, так как в ней максимин совпадает с минимаксом. Принятие стратегий, соответствующих седловой точке, взаимоприемлемо для обоих игроков, поэтому их можно принять за оптимальное решение игры. Таким образом, пара стратегий  $(A_2, B_2)$  является оптимальным решением игры «Конкуренты». Оптимальный выигрыш в этой игре называется ценой игры и равен 0.

Если игра имеет седловую точку, то говорят, что игра решается в чистых стратегиях. Решение, соответствующее седловой точке, обладает свойством устойчивости: если один игрок примет оптимальную стратегию, то другому невыгодно отклоняться от своей оптимальной стратегии. (Проверьте это, рассмотрев строку  $A_2$  и столбец  $B_2$ ). Такое свойство устойчивости положено в основу понятия оптимального решения любой игры.

# РЕШЕНИЕ ИГР В СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ

Если в игре верхняя и нижняя цена не совпадают ( $a$  не равно  $b$ ), то значит, что седловой точки нет, но можно улучшить средний выигрыш игроков А и В путем смешивания их стратегий. Это значит, что игрок А, каждый раз играя игру, чередует свои чистые стратегии  $A_1 A_2 \dots A_m$ . Вопрос состоит в том, какова должна быть доля случаев применения стратегий игроков.

Назовем смешанной стратегией игрока А вектор  $S_A = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ , в котором показаны вероятности применения соответствующих стратегий. Например:  $S_A = (0,1; 0,2; 0,7; 0)$ ,  $\sum_{i=1}^m p_i = 1$  - свойство полноты.

Аналогично для игрока В получаем:  $S_B = (q_1, q_2, \dots, q_m)$ ,  $\sum_{i=1}^n q_j = 1$ .

Заметим, что чистая стратегия – это частный случай смешанной стратегии.  $A_3 = S_A = (0, 0, 1, 0)$ .

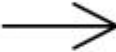
Справедлива основная теорема теории игр: любая матричная игра имеет решение в виде пары смешанных стратегий игроков А и В  $(S_A^*; S_B^*)$ , дающих оптимальное значение цены игры  $V^*$ . Это оптимальное решение обладает следующим свойством: если один игрок придерживается своей оптимальной стратегии, то другому невыгодно отклоняться от своей оптимальной стратегии.

# УПРОЩЕНИЕ ИГР И АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГРЫ

Прежде чем решать игру, ее необходимо упростить, т. е. если для игры построена платежная матрица, можно вычеркнуть заведомо невыгодные стратегии для игроков А и В.

Таблица 45

		<b>B<sub>1</sub></b>	<b>B<sub>2</sub></b>	<b>B<sub>3</sub></b>
<b>A<sub>1</sub></b>	5	0	3	
<b>A<sub>2</sub></b>	4	-1	2	
<b>A<sub>3</sub></b>	2	2	1	



	<b>B<sub>2</sub></b>	<b>B<sub>3</sub></b>
<b>A<sub>1</sub></b>	0	3
<b>A<sub>3</sub></b>	2	1

Здесь  $A_2$  уступает по всем компонентам  $A_1$ , а  $B_1$  уступает и  $B_2$ , и  $B_3$ . Заметим, что строки лучше, если элементы больше, а столбцы лучше, если элементы меньше.

Если по каждой компоненте стратегии одна строка хуже другой, то ее можно вычеркнуть. При этом решение игры упрощается.

В результате остаются такие строки и столбцы, которые нельзя сравнить. Если число оставшихся стратегий хотя бы одного игрока равно двум, то игру можно решить аналитически или геометрически.

# УПРОЩЕНИЕ ИГР И АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГРЫ

Рассмотрим игры, в которых у каждого игрока лишь две стратегии. Если в такой игре нет седловой точки, то значит, что все стратегии активны, т. е. они войдут в решение с какой-то вероятностью, не равной нулю.

Справедлива теорема об активных стратегиях: если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остается неизменным и равен цене игры  $V$  независимо от того, что делает другой игрок, если только тот не выходит за пределы своих активных стратегий.

Таблица 46

		$q_1$	$q_2$
		$B_1$	$B_2$
$p_1$	$A_1$	$a_{11}$	$a_{12}$
$p_2$	$A_2$	$a_{21}$	$a_{22}$

# УПРОЩЕНИЕ ИГР И АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГРЫ

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

$$q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

$$V = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

Например, для платежной матрицы

*Таблица 47*

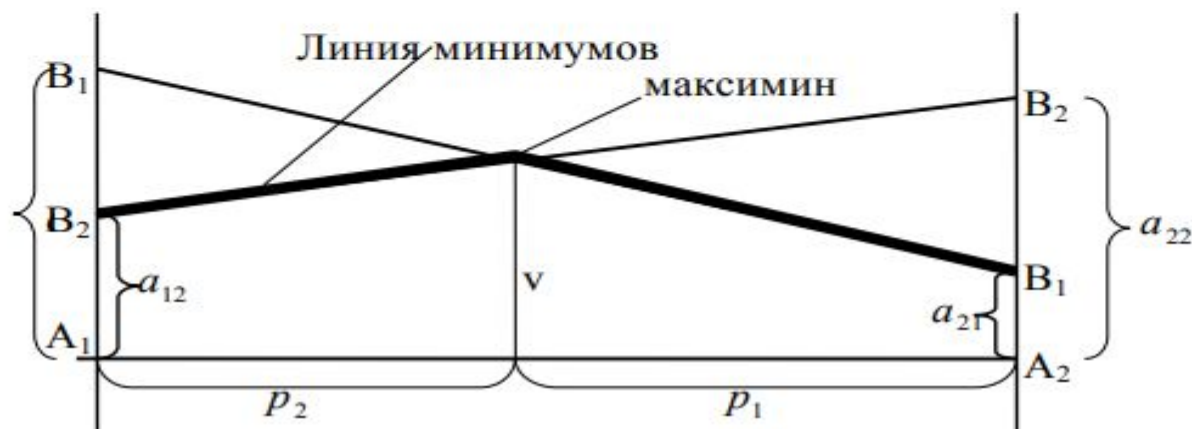
	<b>B<sub>1</sub></b>	<b>B<sub>2</sub></b>
<b>A<sub>1</sub></b>	0	3
<b>A<sub>2</sub></b>	2	1

$$p_1 = \frac{1-2}{0+1-2-3} = \frac{1}{4}; \quad q_1 = \frac{1}{2};$$

$$p_2 = \frac{3}{4}; \quad q_2 = \frac{1}{2}; \quad v = \frac{1}{4};$$

# ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

Рассмотрим игру  $2 \times 2$ . Отложим по оси абсцисс единичный отрезок. Левый конец будет соответствовать чистой стратегии  $A_1$ , а правый – стратегии  $A_2$ . Любая точка внутри отрезка обозначает смешанную стратегик  $S(p_1, p_2)$ . На оси ординат будем откладывать выигрыши. На левой вертикали будут выигрыши, полученные при применении чистых стратегий  $A_1B_1$  и  $A_1B_2$ , а на правой –  $A_2B_1$  и  $A_2B_2$ . Если  $A$  применяет смешанные стратегии, а  $B$  - чистые, то выигрыши будут ординатами соответствующих прямых. Решим игру для игрока  $A$ : для этого найдем сначала самые маленькие выигрыши при различных смешанных стратегиях – это будет линия минимумов. Затем на этой линии найдем наивысшую точку. Получим максимин.



# ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

Аналогично задача решается для игрока В: находим линию максимумов и минимакс.

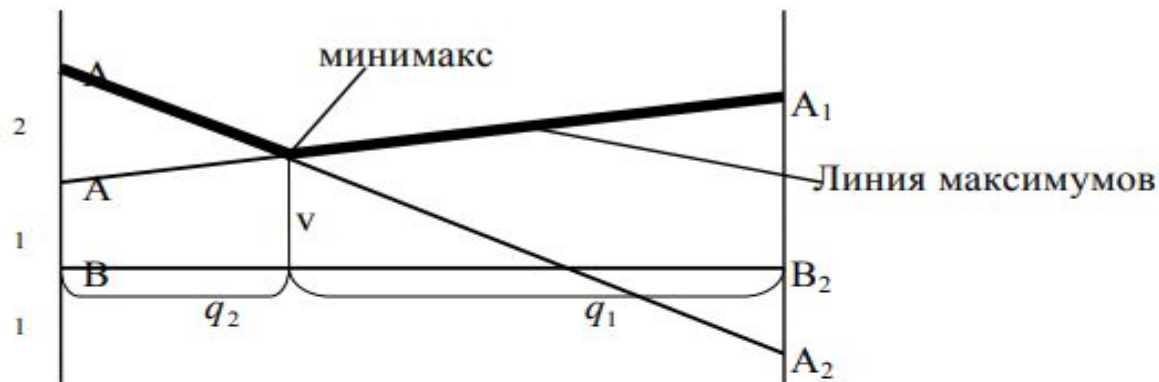


Рис. 62

По принципу максимина игрок А сначала фиксирует свои минимальные выигрыши, а затем выбирает максимальный выигрыш. Так получают величины  $p_1$  и  $p_2$ ,  $q_1$  и  $q_2$  на единичном отрезке и величина цены игры  $v$ .

Примечания:

- решение не обязательно находится на пересечении прямых;
- если у одного игрока две стратегии, а у другого три и более стратегий, то игра также может быть решена геометрически.

# ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

Пример:

Таблица 48

	<b>B<sub>1</sub></b>	<b>B<sub>2</sub></b>	<b>B<sub>3</sub></b>	<b>B<sub>4</sub></b>
<b>A<sub>1</sub></b>	3	0	-1	2
<b>A<sub>2</sub></b>	1	-1	-2	0
<b>A<sub>3</sub></b>	-1	-2	4	-3

Таблица 49

	<b>B<sub>2</sub></b>	<b>B<sub>3</sub></b>	<b>B<sub>4</sub></b>
<b>A<sub>1</sub></b>	0	-1	2
<b>A<sub>3</sub></b>	-2	4	-3

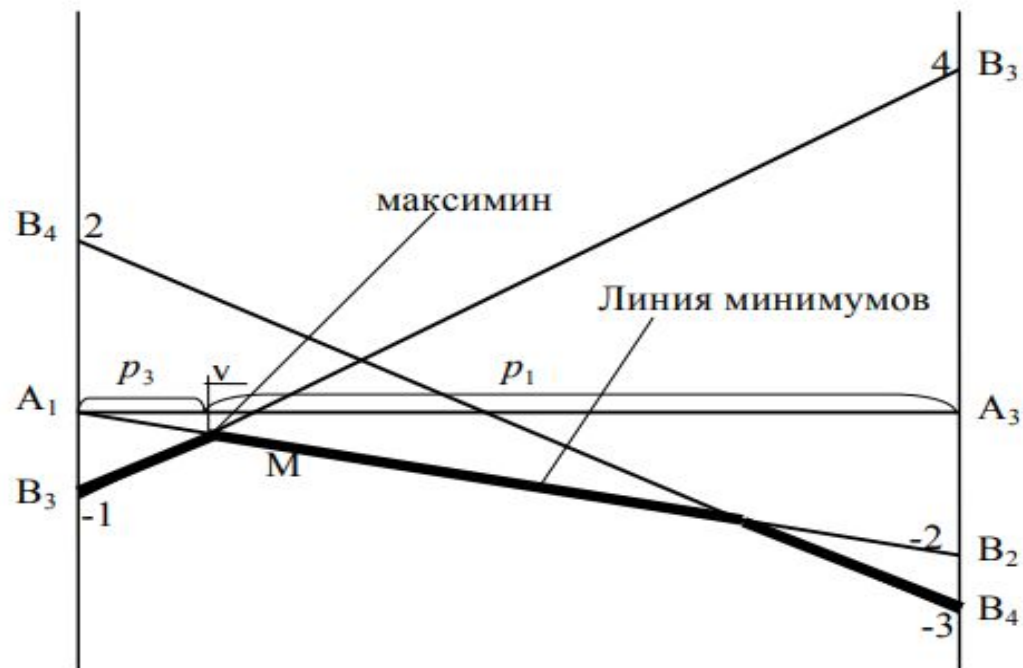
Все элементы строки  $A_2$  меньше элементов строки  $A_1$ , поэтому  $A_2$  можно отбросить как заведомо невыгодную. Все элементы столбца  $B_1$  больше соответствующих элементов столбца  $B_2$ , поэтому стратегию  $B_1$  отбрасываем как заведомо невыгодную.

После вычеркивания столбца  $B_1$  и строки  $A_2$  игра упрощается. Тогда останутся  $B_2, B_3, B_4$  и  $A_1$  и  $A_3$ .

Строим график решения со стороны игрока А.



# ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР



Находим линию минимумов (на рисунке выделено жирной линией) и определяем на ней максимум, точку  $M$ .

Найдем точное решение, для чего определим координаты точки  $M$ .

С этой целью зададим уравнения прямых  $B_2$  и  $B_3$  в виде  $v = f(p_3)$ .

Уравнение прямой построим в виде уравнения с угловым коэффициентом ( $y = kx + b$ ).

# ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

Уравнение прямой построим в виде уравнения с угловым коэффициентом ( $y = kx + b$ ).

$v = kp_3 + b$ , где  $k$  – тангенс угла наклона прямой;  $b$  – смещение по оси ординат (если прямая возрастает –  $k > 0$ , если убывает, то  $k < 0$ ).

Построим прямую  $\begin{cases} B_3 : v = 5p_3 - 1; \\ B_2 : v = -2p_3 + 0. \end{cases}$

$$p = \frac{1}{7}; p = \frac{6}{7}; v = -\frac{2}{7}.$$

Таблица 50

	<b>B<sub>2</sub></b>	<b>B<sub>3</sub></b>
<b>A<sub>1</sub></b>	0	-1
<b>A<sub>4</sub></b>	-2	4

Решим игру со стороны игрока В. Из графика видно, что стратегия  $B_4$  не формирует оптимальное решение – точку М, т. е. не является активной, следовательно, ее отбрасываем (она в согласованном решении не участвует).

# ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

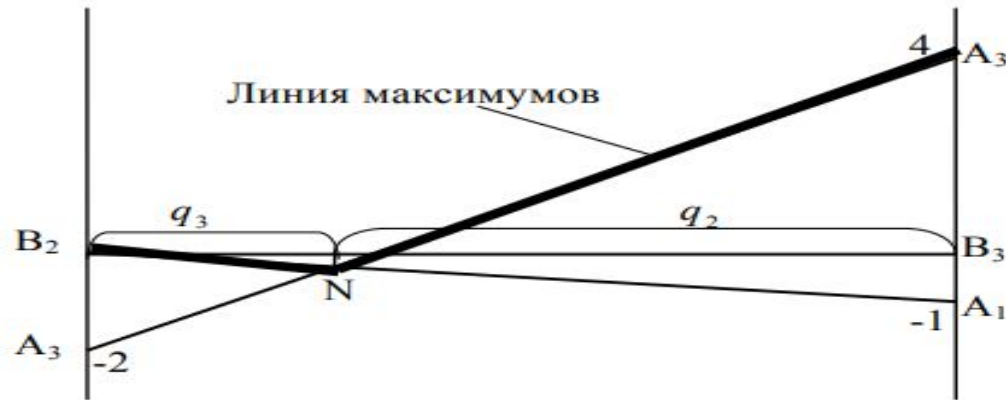


Рис. 64

Находим линию максимумов и определяем на ней минимум – т. N.  
Запишем уравнения прямых  $B_1$  и  $A_3$ .

$$A_3 : v = 6q_3 - 2;$$

$$A_1 : v = -q_3; \quad q_3 = \frac{2}{7}; \quad q_2 = \frac{5}{7}.$$

Ответ: Игрок А должен чередовать стратегии  $A_1$  с вероятностью  $6/7$  и  $A_3$  с вероятностью  $1/7$ . Игрок В должен чередовать стратегии  $B_2$  с вероятностью  $5/7$  и  $B_3$  с вероятностью  $2/7$ . При этом цена игры  $v = -2/7$ .