ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР

Игра – математическая модель ситуации, некоторая упрощённая схема, где зафиксированы все участвующие стороны, правила развития данной ситуации, определённые выигрыши после каждого хода, правила окончания игры. Из этого следует, что основными в игровой модели являются следующие элементы:

- в игре могут быть две или более стороны, называемые игроками, которые преследуют различные интересы;
- в игре фиксируют правила игры: возможные действия игроков, ситуация выигрыша и его величина, правила остановки игры;
- игры бывают парные, когда есть только две стороны, и множественные, когда участие в игре принимают три и более сторон;
- игры бывают коалиционные, когда часть игроков соединяют свои интересы и действуют как один игрок.

Мы рассмотрим только парные игры как наиболее важные для моделирования реальных явлений. Результаты анализа таких моделей позволяют сформулировать принципы и подходы к выработке оптимальных решений в условиях конкуренции.

В парной игре два игрока: А – это «мы» и В – «противник». Игры называются антагонистическими, или с противоположными интересами, если игрок А выигрывает ровно столько, сколько проигрывает В. В сумме выигрыш равен 0, поэтому такую игру называют игрой с нулевой суммой. Но существуют также парные игры и с ненулевой суммой (неантагонистические).

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР

Ходы в игре могут быть личные и случайные. Личный ход зависит от сознательного решения стороны, а случайный ход - результат случайного механизма, который иногда применяется специально, а иногда случайно вовлекается в игру. В ходе проведения игры каждый игрок имеет какие-то альтернативы поведения, которые называют стратегиями игроков. В общем случае стратегия игрока – это совокупность правил, определяющих выбор вариантов действий при каждом личном ходе игрока в зависимости от сложившейся ситуации. Применение в каждой игре стратегии однозначно определяет исход игры. Если количество стратегий конечно - игра конечная, в противном случае - бесконечная игра. В теории игр считается, что игра повторяется многократно и игроков интересует средний выигрыш. Задачей теории игр является обоснование оптимальных стратегий обоих игроков.

ПЛАТЕЖНАЯ МАТРИЦА АНТОГОНИСТИЧЕСКОЙ ИГРЫ

Будем считать, что у игрока А всего *m* стратегий, а у игрока В – *n* стратегий.

$A_1 A_2 \ldots\ldots\ldots A_m$

$B_1 B_2 \ldots\ldots\ldots B_n$

Таблица 41

	B_1	B_2	.	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	.	a_{2n}
.	.	.		
A_m	a_{m1}	a_{11}	.	a_{mn}

Если игрок А применяет свою стратегию A_i, а В применяет B_j, то выигрыш в игре составляет a_{ij}. А старается увеличивать выигрыш, а В – уменьшить эту величину. Величины a_{ij} образуют матрицу, которая называется платежной матрицей .

Рассмотрим пример простейшей игры «Поиск».

Игрок А прячется в двух местах I и II. Игрок В ищет игрока А в местах I и II. Если В находит А, то А платит ему 1 рубль, если не находит, то В платит 1 рубль игроку А.

Платежная матрица – Таблица 42.

Таблица 42

	B_1	B_2
A_1	-1	1
A_2	1	-1

ПЛАТЕЖНАЯ МАТРИЦА АНТОГОНИСТИЧЕСКОЙ ИГРЫ

Основой для анализа игр является анализ платежной матрицы. Поэтому игры, для которых могут быть построены платежные матрицы, называются матричными играми.

Для игр с полной информацией, т. е. когда один игрок знает, как поступил второй, всегда можно построить платёжную матрицу.

Основным принципом, которым необходимо пользоваться для объективной оценки игровой ситуации, является следующий подход: противник настолько же разумен, как и мы, и делает все, чтобы использовать свои возможности против нас, т. е. активно противодействует в выборе оптимального решения. Задачей теории игр является обоснование оптимальных стратегий обоих игроков.

Если игрок А будет применять любое сколь угодно сложное правило чередования мест I и II, то В все равно разгадает этот закон чередования и будет выигрывать. Ниже мы обоснуем оптимальные стратегии игроков А и В. Рассмотрим другие простые примеры игр.

ПЛАТЕЖНАЯ МАТРИЦА АНТОГОНИСТИЧЕСКОЙ ИГРЫ

Игра «Три пальца».

Таблица 43

	B_1	B_2	B_3
A_1	2	-3	4
A_2	-3	4	-5
A_3	4	-5	6

Игрок А и игрок В одновременно показывают один, два или три пальца. Выигрыш равен сумме, причём выигрывает А, если сумма очков четная, и В, если сумма нечетная. Построим платёжную матрицу.

Игра «Конкуренты».

Таблица 44

	B_1	B_2	B_3
A_1	-2	-2	1
A_2	1	0	2
A_3	0	-1	1

Фирма А может поставить на рынок три товара A_1, A_2, A_3, а фирма В три своих конкурирующих товара B_1, B_2, B_3. Если фирма А поставит товар A_i, а фирма В - товар B_j, то в результате выигрыш в доходах фирм определяется приведенной платежной матрицей.

ПЛАТЕЖНАЯ МАТРИЦА АНТОГОНИСТИЧЕСКОЙ ИГРЫ

Возникает вопрос – как на основе анализа матрицы найти оптимальное решение игры, и что понимать под оптимальным решением игры?

Рассмотрим так называемый принцип минимакса при решении игры.

Ясно, что игроки должны действовать с разумной осторожностью, т. е. необходимо, чтобы мы больше всего реагировали на опасные для нас ходы со стороны противника. По отношению к игроку А рассуждаем так, что если он применит стратегию A_1, то можно зафиксировать самый плохой для него выигрыш: $a_1 = \min a_{ij}$.

ПЛАТЕЖНАЯ МАТРИЦА АНТОГОНИСТИЧЕСКОЙ ИГРЫ

Для стратегии A_2: $a_2 = \min a_{2j}$.,и так далее.

Для A_m: $a_m = \min a_{mj}$.

Тогда естественно, что игрок А выберет ту стратегию, для которой величина a_i будет максимальной (по строкам в платежной матрице).

Величина $a = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$ называется нижней ценой игры. Она показывает, меньше какой величины не будет выигрыш игрока А при осторожном подходе к игре. Аналогично рассуждая относительно игрока В, получаем величины:

$b_j = \max a_{ij}$ - максимальные величины в столбцах, и затем

$b = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$ - верхняя цена игры.

Эта величина показывает, больше какой величины не может быть выигрыш в игре.

ПЛАТЕЖНАЯ МАТРИЦА АНТОГОНИСТИЧЕСКОЙ ИГРЫ

Получим значения a и b для вышеприведенных игр.

Для игры «Поиск» $a = -1$; $b = 1$.

Для игры «Три пальца» $a = -3$; $b = 4$.

Для игры «Конкуренты» $a = b = 0$.

Эта игра обладает седловой точкой, так как в ней максимин совпадает с минимаксом. Принятие стратегий, соответствующих седловой точке, взаимоприемлемо для обоих игроков, поэтому их можно принять за оптимальное решение игры. Таким образом, пара стратегий (A_2, B_2) является оптимальным решением игры «Конкуренты». Оптимальный выигрыш в этой игре называется ценой игры и равен 0.

Если игра имеет седловую точку, то говорят, что игра решается в чистых стратегиях. Решение, соответствующее седловой точке, обладает свойством устойчивости: если один игрок примет оптимальную стратегию, то другому невыгодно отклоняться от своей оптимальной стратегии. (Проверьте это, рассмотрев строку A_2 и столбец B_2). Такое свойство устойчивости положено в основу понятия оптимального решения любой игры.

РЕШЕНИЕ ИГР В СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ

Если в игре верхняя и нижняя цена не совпадают (a не равно b), то значит, что седловой точки нет, но можно улучшить средний выигрыш игроков А и В путем смешивания их стратегий. Это значит, что игрок А, каждый раз играя игру, чередует свои чистые стратегии $A_1 A_2 .... A_m$. Вопрос состоит в том, какова должна быть доля случаев применения стратегий игроков.

Назовем <u>смешанной стратегией</u> игрока А вектор $S_A = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, в котором показаны вероятности применения соответствующих стратегий. Например: $S_A = (0{,}1; 0{,}2; 0{,}7; 0)$, $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$ - свойство полноты.

Аналогично для игрока В получаем: $S_B = (q_1, q_2, \ldots, q_m)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} q_j = 1$.

Заметим, что чистая стратегия – это частный случай смешанной стратегии. $A_3 = S_A = (0, 0, 1, 0)$.

Справедлива <u>основная теорема теории игр</u>: любая матричная игра имеет решение в виде пары смешанных стратегий игроков А и В $(S_A^*; S_B^*)$, дающих оптимальное значение цены игры V*. Это оптимальное решение обладает следующим свойством<u>: если один игрок придерживается своей оптимальной стратегии, то другому невыгодно отклоняться от своей оптимальной стратегии.</u>

УПРОЩЕНИЕ ИГР И АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГРЫ

Прежде чем решать игру, ее необходимо упростить, т. е. если для игры построена платежная матрица, можно вычеркнуть заведомо невыгодные стратегии для игроков А и В.

Таблица 45

	B_1	B_2	B_3
A_1	5	0	3
A_2	4	-1	2
$\mathbf{A_3}$	2	2	1

→

	$\mathbf{B_2}$	$\mathbf{B_3}$
$\mathbf{A_1}$	0	3
$\mathbf{A_3}$	2	1

Здесь A_2 уступает по всем компонентам A_1, а B_1 уступает и B_2, и B_3. Заметим, что строки лучше, если элементы больше, а столбцы лучше, если элементы меньше.

Если по каждой компоненте стратегии одна строка хуже другой, то ее можно вычеркнуть. При этом решение игры упрощается.

В результате остаются такие строки и столбцы, которые нельзя сравнить. Если число оставшихся стратегий хотя бы одного игрока равно двум, то игру можно решить аналитически или геометрически.

УПРОЩЕНИЕ ИГР И АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГРЫ

Рассмотрим игры, в которых у каждого игрока лишь две стратегии. Если в такой игре нет седловой точки, то значит, что все стратегии активны, т. е. они войдут в решение с какой-то вероятностью, не равной нулю.

Справедлива теорема об активных стратегиях: если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остается неизменным и равен цене игры V независимо от того, что делает другой игрок, если только тот не выходит за пределы своих активных стратегий.

Таблица 46

		q_1	q_2
		B_1	B_2
p_1	A_1	a_{11}	a_{12}
p_2	A_2	a_{21}	a_{22}

УПРОЩЕНИЕ ИГР И АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГРЫ

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

$$q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

$$V = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

Например, для платежной матрицы

Таблица 47

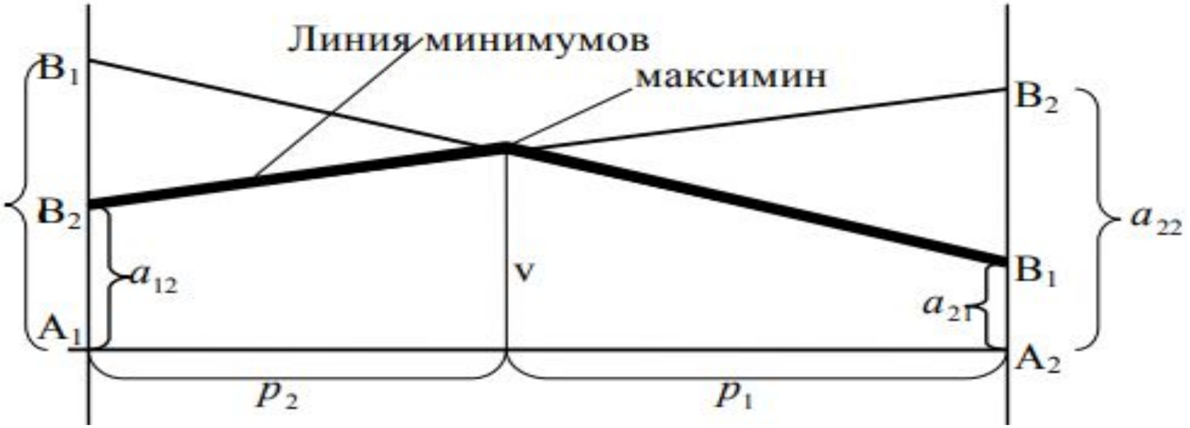
	B_1	B_2
A_1	0	3
A_2	2	1

$$p_1 = \frac{1-2}{0+1-2-3} = \frac{1}{4}; \quad q_1 = \frac{1}{2};$$

$$p_2 = {}^3\!/_4; \quad q_2 = {}^1\!/_2; \quad v = {}^1\!/_4;$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

Рассмотрим игру 2x2 . Отложим по оси абсцисс единичный отрезок. Левый конец будет соответствовать чистой стратегии A_1, а правый – стратегии A_2. Любая точка внутри отрезка обозначает смешанную стратегию $S(p_1, p_2)$. На оси ординат будем откладывать выигрыши. На левой вертикали будут выигрыши, полученные при применении чистых стратегий A_1B_1 и A_1B_2, а на правой – A_2B_1 и A_2B_2. Если A применяет смешанные стратегии, а B - чистые, то выигрыши будут ординатами соответствующих прямых. Решим игру для игрока A: для этого найдем сначала самые маленькие выигрыши при различных смешанных стратегиях – это будет <u>линия минимумов</u>. Затем на этой линии найдем наивысшую точку. Получим <u>максимин.</u>



ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

Аналогично задача решается для игрока B: находим линию максимумов и минимакс.

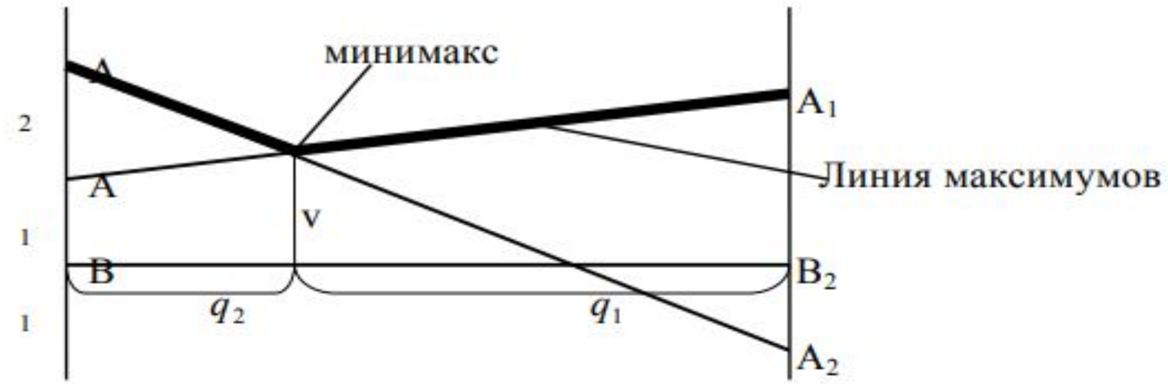


Рис. 62

По принципу максимина игрок A сначала фиксирует свои минимальные выигрыши, а затем выбирает максимальный выигрыш. Так получаются величины p_1 и p_2, q_1 и q_2 на единичном отрезке и величина цены игры v.

Примечания:

- решение не обязательно находится на пересечении прямых;
- если у одного игрока две стратегии, а у другого три и более стратегий, то игра также может быть решена геометрически.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

Пример:

Таблица 48

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	0	-1	2
A_2	1	-1	-2	0
A_3	-1	-2	4	-3

Все элементы строки A_2 меньше элементов строки A_1, поэтому A_2 можно отбросить как заведомо невыгодную. Все элементы столбца B_1 больше соответствующих элементов столбца B_2, поэтому стратегию B_1 отбрасываем как заведомо невыгодную.

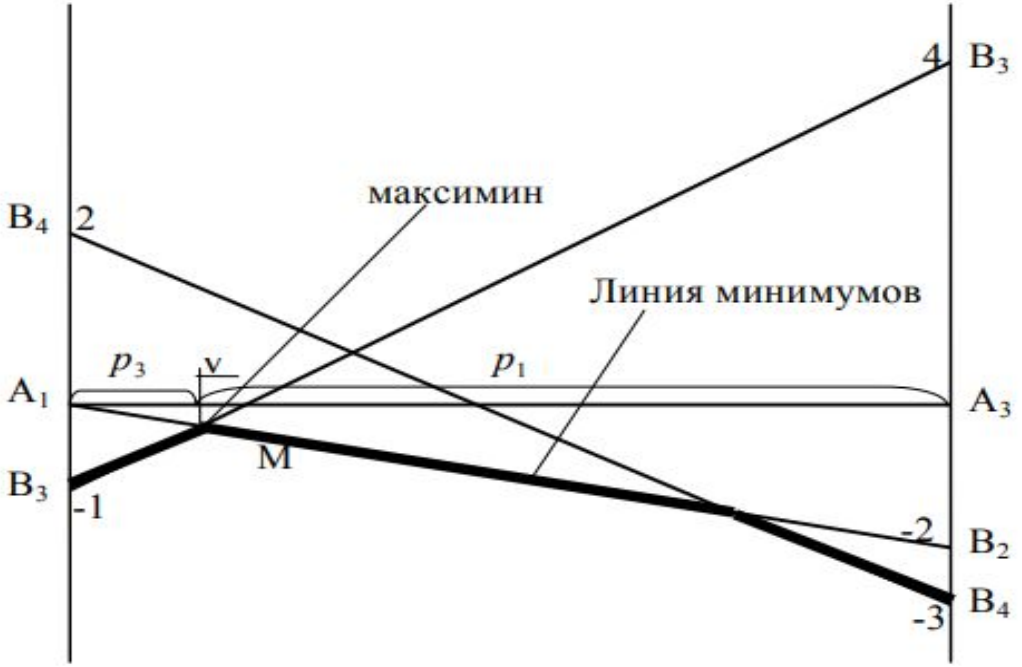
Таблица 49

	B_2	B_3	B_4
A_1	0	-1	2
A_3	-2	4	-3

После вычеркивания столбца B_1 и строки A_2 игра упрощается. Тогда останутся B_2, B_3, B_4 и A_1 и A_3.

Строим график решения со стороны игрока А.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР



Находим линию минимумов (на рисунке выделено жирной линией) и определяем на ней максимум, точку M.

Найдем точное решение, для чего определим координаты точки M.

С этой целью зададим уравнения прямых B_2 и B_3 в виде $v = f(p_3)$.

Уравнение прямой построим в виде уравнения с угловым коэффициентом $(y = kx + b)$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

Уравнение прямой построим в виде уравнения с угловым коэффициентом $(y = kx + b)$.

$v = kp_3 + b$, где k – тангенс угла наклона прямой; b – смещение по оси ординат (если прямая возрастает – k>0, если убывает, то k<0).

Построим прямую $\begin{cases} B_3 : v = 5p_3 - 1; \\ B_2 : v = -2p_3 + 0. \end{cases}$;

$p = 1/7;\ p = 6/7;\ v = -2/7$.

Таблица 50

	B_2	B_3
A_1	0	-1
A_4	-2	4

Решим игру со стороны игрока В. Из графика видно, что стратегия B_4 не формирует оптимальное решение – точку М, т. е. не является активной, следовательно, ее отбрасываем (она в согласованном решении не участвует).

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГР

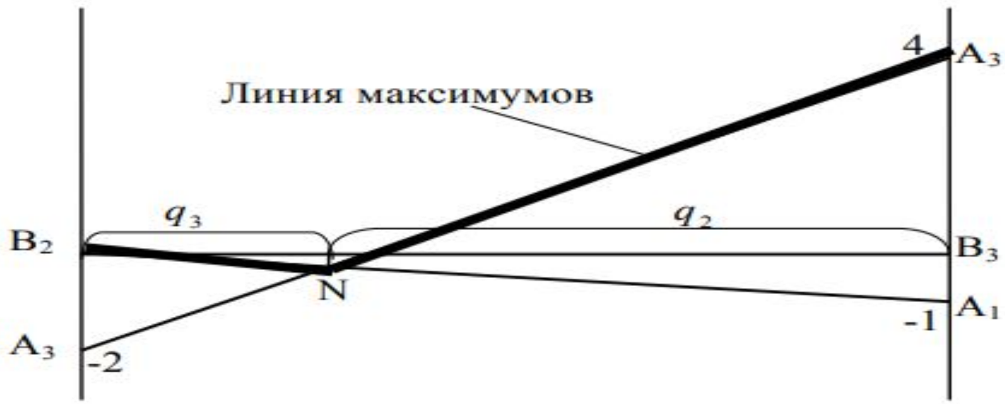


Рис. 64

Находим линию максимумов и определяем на ней минимум – т. N.
Запишем уравнения прямых B_1 и A_3.

$A_3 : v = 6q_3 - 2;$

$A_1 : v = -q_3; \quad q_3 = 2/7; \quad q_2 = 5/7.$

Ответ: Игрок A должен чередовать стратегии A_1 с вероятностью 6/7 и A_3 с вероятностью 1/7. Игрок B должен чередовать стратегии B_2 с вероятностью 5/7 и B_3 с вероятностью 2/7. При этом цена игры v=-2/7.