Дифференциальные уравнения

Тема: ***Однородные уравнения. Уравнения, приводящиеся к однородным***

Лектор Пахомова Е.Г.

2011 г.

§5. Однородные уравнения

Функция $M(x\,,y)$ называется ***однородной степени m*** (или ***измерения m***), если $\forall\, t \neq 0$ справедливо равенство

$$M(tx\,,ty) = t^m \cdot M(x\,,y)\,.$$

ПРИМЕРЫ однородных функций:

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2 y\,, \qquad f(x,y) = \sqrt[4]{x^8 + y^8}\,,$$

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2}\,, \qquad f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}\,,$$

$$f(x,y) = \sin\frac{x}{y} + \ln y - \ln x\,.$$

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y)$$

называется ***однородным*** *относительно* x *и* y*, если функция* $f(x, y)$ *является однородной нулевой степени.*

Дифференциальное уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

является однородным относительно x и y, если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ – *однородные функции одного и того же измерения.*

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой

$$z(x) = \frac{y}{x}$$

Замечание. Некоторые однородные уравнения проще интегрируются с помощью замены

$$\frac{x}{y} = z(y)$$

§6. Уравнения, приводящиеся к однородным

1. Уравнения вида $$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$$

Рассмотрим уравнение (7) $$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$$

Если $c_1 = c_2 = 0$, то уравнение (7) будет однородным, т.к.

$$f\left(\frac{a_1 x + b_1 y}{a_2 x + b_2 y}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Пусть $c_1 \neq 0$ или $c_2 \neq 0$. Тогда уравнение (7) заменой переменных приводится либо к уравнению с разделяющимися переменными, либо к однородному.

Это зависит от определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

а) ***Если*** $\mathbf{\Delta \neq 0}$, ***то*** (7) ***приводится к однородному уравнению***.

Действительно, если $\Delta \neq 0$, то система уравнений

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение $x = \alpha$, $y = \beta$.

Сделаем в (7) замену переменных: $x = t + \alpha$, $y = z + \beta$.

Тогда:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dt};$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = f\left(\frac{a_1(t+\alpha) + b_1(z+\beta) + c_1}{a_2(t+\alpha) + b_2(z+\beta) + c_2} \right),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = f\left(\frac{a_1 t + b_1 z + (a_1\alpha + b_1\beta + c_1)}{a_2 t + b_2 z + (a_2\alpha + b_2\beta + c_2)} \right),$$

$$\underbrace{\frac{dz}{dt} = f\left(\frac{a_1 t + b_1 z}{a_2 t + b_2 z} \right)}_{\text{однородное уравнение}}.$$

б) ***Если*** $\mathbf{\Delta = 0}$, ***то уравнение*** (7) ***приводится к уравнению с разделяющимися переменными***.

Действительно, если $\mathbf{\Delta = 0}$, то строки определителя $\mathbf{\Delta}$ пропорциональны (см. упражнение в курсе «Линейная алгебра»), т.е. $a_2 = \lambda a_1$, $b_2 = \lambda b_1$.

Тогда
$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\lambda(a_1 x + b_1 y) + c_2}\right)$$
$$\Rightarrow \quad y' = \phi(a_1 x + b_1 y) .$$

Это уравнение (6) (см. §4). Оно приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены
$$z(x) = a_1 x + b_1 y .$$

2. Обобщенно однородные уравнения

Уравнение 1-*го порядка называется* ***обобщённо однородным***, *если существует такое рациональное число* α, *что каждое слагаемое уравнения – однородная функция степени* α *относительно* x, y, y' (относительно x, y, dx, dy), *если считать* x – *величиной измерения* 1, y – *величиной измерения* α, $y'(dy)$ – *величиной измерения* $\alpha - 1$, dx – *величиной измерения* 0.

Иначе говоря, уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ – обобщенно однородное, если $\exists\, \alpha \in \mathbb{Q}$ такое, что

$$P(tx, t^{\alpha}y)dx + Q(tx, t^{\alpha}y) \cdot (t^{\alpha-1}dy) = t^{m} \cdot [\, P(x, y)dx + Q(x, y)dy \,].$$

Обобщенно однородное уравнение приводится к однородному уравнению заменой $y = z^{\alpha}$.

Обобщенно однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $y = zx^{\alpha}$.