Задание №15: побитовые операции

Время выполнения: 5 минут

Побитовая конъюнкция &

Чтобы определить, чему равна побитовая конъюнкция двух чисел, нужно перевести эти числа в двоичную систему счисления, выполнить конъюнкцию поразрядно (побитово), результат перевести обратно в десятичную систему счисления.

107 & 30 = 10

$107_{10} = 1101011_2$
$30_{10} = 11110_2$

107	0	1	1	0	1	0	1	1
30	0	0	0	1	1	1	1	0
107 & 30	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**

$0001010_2 = 1010_2 = 10_{10}$

Обратите внимание: недостающие разряды заполняются нулями.

Сравнение с нулём

Пример 1:
107 & 30 = 10 – в результате побитовой конъюнкции получилось число 10. Также будет верно, что:
107 & 30 ≠ 0
и
107 & 30 ≠ 11 (или любому другому числу кроме 10)

Пример 2:
107 & 20 = 0 – в результате побитовой конъюнкции получился 0

107	1	1	1	0	1	0	1	1
20	0	0	0	1	0	1	0	0
107 & 20	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Также будет верно, что 107 & 20 ≠ 1 (или любому другому числу кроме 0).

Задача 1

Задача 1

Введём выражение M & K, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наименьшее натуральное число a, такое что выражение

$$(x \& 125 = 1) \to ((x \& 34 = 2) \to (x \& a = 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение задачи 1

1) упростим:

$(x \,\&\, 125 = 1) \rightarrow ((x \,\&\, 34 = 2) \rightarrow (x \,\&\, a = 0))$

$(x \,\&\, 125 \neq 1) \vee ((x \,\&\, 34 = 2) \rightarrow (x \,\&\, a = 0))$

$(x \,\&\, 125 \neq 1) \vee (x \,\&\, 34 \neq 2) \vee (x \,\&\, a = 0)$

2) разобьём выражение на две части: в первой части содержится буква a, во второй – нет:

первая часть: $(x \,\&\, a = 0)$

вторая часть: $(x \,\&\, 125 \neq 1) \vee (x \,\&\, 34 \neq 2)$

Решение задачи 1

3) определим, как выглядит проблемный x: добавим отрицание ко второй части

$\neg((x \,\&\, 125 \neq 1) \lor (x \,\&\, 34 \neq 2))$

$\neg(x \,\&\, 125 \neq 1) \land \neg(x \,\&\, 34 \neq 2))$

$(x \,\&\, 125 = 1) \land (x \,\&\, 34 = 2)$

4) Определим, как выглядит x в двоичной системе счисления:

$(x \,\&\, 125 = 1)$

$125_{10} = 1111101_2$

x	?	?	?	?	?	?	?	?
125	0	1	1	1	1	1	0	1
x & 125	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**

Решение задачи 1

Т.к. мы знаем результат конъюнкции, некоторые биты x восстановить можно.

x	?	?	?	?	?	?	?	?
125	0	1	1	1	1	1	0	1
x & 125	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**

x	?	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	?	**1**
125	0	1	1	1	1	1	0	1
x & 125	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**

Чему равны выделенные жёлтым биты x – неизвестно, т.к. подойдёт и 0, и 1.

Решение задачи 1

Проделаем то же самое со вторым выражением:
(x & 34 = 2)
$34_{10} = 100010_2$

x	?	?	0	?	?	?	1	?
34	0	0	1	0	0	0	1	0
x & 34	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**

Отрицание второй части выглядит как (x & 125 = 1) $\wedge$ (x & 34 = 2)
Т.е. для "проблемного" x должны выполняться оба условия (стоит $\wedge$). Определим, как выглядит "проблемный" x:

x из первого условия	**?**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	?	**1**
x из второго условия	?	?	**0**	?	?	?	**1**	?
итоговый x	**?**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**

Решение задачи 1

$x = 00000011_2 = 11_2 = 3_{10}$

В условии требовалось найти <u>минимальное натуральное</u> a, при котором исходная формула всегда истинна. Переформулируем: требуется найти минимальное натуральное a, при котором x & a = 0 для "проблемного" x.

x	?	0	0	0	0	0	**1**	**1**
a	?	?	?	?	?	?	?	?
x & a	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

x	?	0	0	0	0	0	**1**	**1**
a	**0**	**?**	**?**	**?**	**?**	**?**	**0**	**0**
x & a	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Решение задачи 1

Т.к. a должно быть натуральным, придётся хотя бы один бит сделать равным 1. Чтобы a было минимальным, бит должен быть как можно меньшим, остальные биты сделаем равными 0.

x	?	0	0	0	0	0	**1**	**1**
a	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
x & a	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

$a = 00000100_2 = 100_2 = 4_{10}$

Ответ: 4

Самостоятельно

Самостоятельно

1.1) (X & 35 ≠ 0) → ((X & 31 = 0) → (X & A ≠ 0)) – наим. натур. A, тождественно истинно

1.2) (*x* & 21 = 0) ∨ ((*x* & 11 = 0) → (*x & A* ≠ 0)) – наим. натур. A, тождественно истинно

1.3) (*X* & 102 ≠ 0) → ((*X* & 36 = 0) → (*X* & *A* ≠ 0)) – наим. натур. A, тождественно истинно

1.4) Определите **наименьшее** натуральное число *A* ***из интервала [50, 120]*** такое, что выражение (*x & A* = 0) → ((*x* & 31 ≠ 0) → (*x* & 35 ≠ 0)) тождественно истинно.
Подсказка: вначале решаем задачу обычным способом, при подборе A следим, чтобы число лежало в интервале [50; 120] – как сказано в условии

Ответы

1.1) 32
1.2) 20
1.3) 66
1.4) 60

Задача 2

Задача 2

Введём выражение M & K, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наименьшее натуральное число a, такое что выражение

$$((x \,\&\, 28 = 0) \rightarrow (x \,\&\, 45 \neq 0)) \rightarrow ((x \,\&\, 48 = 0) \rightarrow (x \,\&\, a \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение задачи 2

1) упростим:

$((x \,\&\, 28 = 0) \rightarrow (x \,\&\, 45 \neq 0)) \rightarrow ((x \,\&\, 48 = 0) \rightarrow (x \,\&\, a \neq 0))$

$(\mathbf{(x \,\&\, 28 \neq 0) \vee} (x \,\&\, 45 \neq 0)) \rightarrow ((x \,\&\, 48 = 0) \rightarrow (x \,\&\, a \neq 0))$

$\mathbf{\neg((x \,\&\, 28 \neq 0) \vee (x \,\&\, 45 \neq 0)) \vee} ((x \,\&\, 48 = 0) \rightarrow (x \,\&\, a \neq 0))$

$\neg((x \,\&\, 28 \neq 0) \vee (x \,\&\, 45 \neq 0)) \vee \mathbf{((x \,\&\, 48 \neq 0) \vee (x \,\&\, a \neq 0))}$

$\mathbf{(\neg(x \,\&\, 28 \neq 0) \wedge \neg(x \,\&\, 45 \neq 0))} \vee (x \,\&\, 48 \neq 0) \vee (x \,\&\, a \neq 0)$

$\mathbf{((x \,\&\, 28 = 0) \wedge (x \,\&\, 45 = 0))} \vee (x \,\&\, 48 \neq 0) \vee (x \,\&\, a \neq 0)$

2) разобъём выражение на две части: в первой части содержится буква а, во второй – нет:

первая часть: $(x \,\&\, a \neq 0)$

вторая часть: $((x \,\&\, 28 = 0) \wedge (x \,\&\, 45 = 0)) \vee (x \,\&\, 48 \neq 0)$

Решение задачи 2

3) определим, как выглядит "проблемный" x: добавим отрицание ко второй части

$\neg(((x \,\&\, 28 = 0) \land (x \,\&\, 45 = 0)) \lor (x \,\&\, 48 \neq 0))$

$\neg((x \,\&\, 28 = 0) \land (x \,\&\, 45 = 0)) \land \neg(x \,\&\, 48 \neq 0)$

$(\neg(x \,\&\, 28 = 0) \lor \neg(x \,\&\, 45 = 0)) \land (x \,\&\, 48 = 0)$

$((x \,\&\, 28 \neq 0) \lor (x \,\&\, 45 \neq 0)) \land (x \,\&\, 48 = 0)$

4) Определим, как выглядит "проблемный" x в двоичной системе счисления:

$(x \,\&\, 28 \neq 0)$

$28_{10} = 11100_2$

x	?	?	?	?	?	?	?	?
28	0	0	0	1	1	1	0	0
x & 28	0	0	0	**?**	**?**	**?**	0	0

Решение задачи 2

Мы не знаем результат конъюнкции, но знаем, что он не равен 0, значит хотя бы 1 из выделенных жёлтым битов числа x должен быть равен 1.

x	?	?	?	?	?	?	?	?
28	0	0	0	1	1	1	0	0
x & 28	0	0	0	**?**	**?**	**?**	0	0

x	?	?	?	?	?	?	?	?
28	0	0	0	1	1	1	0	0
x & 28	0	0	0	**?**	**?**	**?**	0	0

Решение задачи 2

Проделаем то же самое со вторым выражением:
(x & 45 ≠ 0))
$45_{10} = 101101_2$

x	?	?	?	?	?	?	?	?
45	0	0	1	0	1	1	0	1
x & 45	**0**	**0**	**?**	**0**	**?**	**?**	**0**	**?**

Объединим: (x & 28 ≠ 0) V (x & 45 ≠ 0)

x & 28 ≠ 0	?	?	?	?	?	?	?	?
x & 45 ≠ 0	?	?	?	?	?	?	?	?
(x & 28 ≠ 0) V (x & 45 ≠ 0)	?	?	?	?	?	?	?	?

Решение задачи 2

(x & 48 = 0)
$48 = 110000_2$

x	?	?	?	?	?	?	?	?
48	0	0	1	1	0	0	0	0
x & 48	0	0	0	0	0	0	0	0

x	?	?	**0**	**0**	?	?	?	?
48	0	0	1	1	0	0	0	0
x & 48	0	0	**0**	**0**	0	0	0	0

Решение задачи 2

((x & 28 ≠ 0) V (x & 45 ≠ 0)) ∧ (x & 48 = 0)
Обратите внимание: между выражениями стоит конъюнкция.

x & 28 ≠ 0 V (x & 45 ≠ 0))	?	?	?	?	?	?	?	?
x & 48 = 0	?	?	**0**	**0**	?	?	?	?
итоговый x	**?**	**?**	**0**	**0**	**?**	**?**	**?**	**?**

В итоговом x в любом выделенным жёлтом бите может стоять 1 (и хотя бы одна такая единица есть).
Нужно найти минимальное натуральное а, которое не даст 0 при побитовой конъюнкции с x.

итоговый x	?	?	0	0	?	?	?	?
подходящее а	?	?	**0**	**0**	**1**	**1**	?	**1**

В таблице показан вид любого а, которое не даст 0 при конъюнкции с x, не только минимального.

Решение задачи 2

а будет минимальным, если все биты, помеченные ?, равны 0.

итоговый x	?	?	0	0	?	?	?	?
минимальное а	0	0	**0**	**0**	**1**	**1**	0	**1**

Ответ: 13

Задача 3

Задача 3

Введём выражение M & K, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наибольшее натуральное число a, такое что выражение

$((x \& a \neq 0) \land (x \& 12 = 0)) \rightarrow ((x \& a = 0) \land (x \& 21 \neq 0))) \lor ((x \& 21 = 0) \land (x \& 12 = 0))$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной X)?

Решение задачи 3

1) упростим:

$(((x \,\&\, a \neq 0) \land (x \,\&\, 12 = 0)) \rightarrow ((x \,\&\, a = 0) \land (x \,\&\, 21 \neq 0))) \lor ((x \,\&\, 21 = 0) \land (x \,\&\, 12 = 0))$

$(\boldsymbol{\neg((x \,\&\, a \neq 0) \land (x \,\&\, 12 = 0)}) \lor ((x \,\&\, a = 0) \land (x \,\&\, 21 \neq 0))) \lor ((x \,\&\, 21 = 0) \land (x \,\&\, 12 = 0))$

$(\boldsymbol{(\neg(x \,\&\, a \neq 0) \lor \neg(x \,\&\, 12 = 0)}) \lor ((x \,\&\, a = 0) \land (x \,\&\, 21 \neq 0))) \lor ((x \,\&\, 21 = 0) \land (x \,\&\, 12 = 0))$

$\boldsymbol{((x \,\&\, a = 0) \lor (x \,\&\, 12 \neq 0)}) \lor ((x \,\&\, a = 0) \land (x \,\&\, 21 \neq 0)) \lor ((x \,\&\, 21 = 0) \land (x \,\&\, 12 = 0))$

удалим $(x \,\&\, a = 0) \land (x \,\&\, 21 \neq 0))$, т.к. уже есть $(x \,\&\, a = 0)$ по правилу $X \lor XY = X$

$(x \,\&\, a = 0) \lor (x \,\&\, 12 \neq 0) \lor ((x \,\&\, 21 = 0) \land (x \,\&\, 12 = 0))$

2) разобъём выражение на две части: в первой части содержится буква а, во второй – нет:

первая часть: $(x \,\&\, a = 0)$

вторая часть: $(x \,\&\, 12 \neq 0) \lor ((x \,\&\, 21 = 0) \land (x \,\&\, 12 = 0))$

Решение задачи 3

3) определим, как выглядит "проблемный" x: добавим отрицание ко второй части
$\neg((x \& 12 \neq 0) \lor ((x \& 21 = 0) \land (x \& 12 = 0)))$
$(\neg(x \& 12 \neq 0) \land \neg((x \& 21 = 0) \land (x \& 12 = 0)))$
$((x \& 12 = 0) \land (\neg(x \& 21 = 0) \lor \neg(x \& 12 = 0)))$
$((x \& 12 = 0) \land ((x \& 21 \neq 0) \lor (x \& 12 \neq 0)))$

4) Определим, как выглядит "проблемный" x в двоичной системе счисления:
$(x \& 12 = 0)$
$12_{10} = 1100_2$

x	?	?	?	?	?	?	?	?
12	0	0	0	0	1	1	0	0
x & 12	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Решение задачи 3

x	?	?	?	?	0	0	0	?
12	0	0	0	0	1	1	0	0
x & 12	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

$(x \ \& \ 21 \neq 0)$

$21 = 10101_2$

x	?	?	?	?	?	?	?	?
21	0	0	0	1	0	1	0	1
x & 21	**0**	**0**	**0**	**?**	**0**	**?**	**0**	**?**

На месте хотя бы одного из выделенных жёлтым битов должна стоять единица.

Решение задачи 3

(x & 12 ≠ 0)

$12 = 1100_2$

x	?	?	?	?	?	?	?	?
12	0	0	0	0	1	1	0	0
x & 12	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**?**	**0**	**0**

На месте хотя бы одного из выделенных жёлтым битов должна стоять единица.

x & 21 ≠ 0	?	?	?	?	?	?	?	?
x & 12 ≠ 0	?	?	?	?	?	?	?	?
((x & 21 ≠ 0) V (x & 12 ≠ 0))	?	?	?	?	?	?	?	?

Решение задачи 3

(x & 12 = 0) ∧ ((x & 21 ≠ 0) V (x & 12 ≠ 0))

((x & 21 ≠ 0) V (x & 12 ≠ 0))	?	?	?	?	?	?	?	?
(x & 12 = 0)	?	?	?	?	**0**	**0**	?	?
итоговый x	?	?	?	?	**0**	**0**	?	?

Требуется найти такое наибольшее натуральное a, что (x & a = 0).

Решение задачи 3

Требуется найти такое наибольшее натуральное a, что (x & a = 0).

итоговый x	?	?	?	?	**0**	**0**	?	?
a	?	?	?	?	?	?	?	?
результат	0	0	0	0	0	0	0	0

итоговый x	?	?	?	?	**0**	**0**	?	?
a	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
результат	0	0	0	0	0	0	0	0

$a = 000001100_2 = 1100_2 = 12_{10}$

Ответ: 12

Самостоятельно

Самостоятельно

4) $(x \mathbin{\&} 10 \neq 0) \lor (x \mathbin{\&} 39 = 0) \land (x \mathbin{\&} 149 = 0) \lor (x \mathbin{\&} A = 0)$ – **наим**. натур. А, тождественно **истинно**

5) $(x \mathbin{\&} 51 \neq 0) \rightarrow (x \mathbin{\&} A \neq 0) \lor \neg((x \mathbin{\&} 11 \neq 0) \lor (x \mathbin{\&} A \neq 0))$ – **наим**. натур. А, тождественно **истинно**

6) $((x \mathbin{\&} 28 = 0) \lor (x \mathbin{\&} 22 = 0)) \rightarrow ((x \mathbin{\&} 56 \neq 0) \rightarrow (x \mathbin{\&} A = 0))$ – **наиб**. натур. А, тождественно **истинно**

7) $((x \mathbin{\&} 38 = 0) \lor (x \mathbin{\&} 57 = 0)) \rightarrow ((x \mathbin{\&} 11 \neq 0) \rightarrow (x \mathbin{\&} A = 0))$ – **наиб**. натур. А, тождественно **истинно**

8) Определите **наибольшее** натуральное число *A* **из интервала [50, 120]** такое, что выражение
$(x \mathbin{\&} A = 0) \rightarrow ((x \mathbin{\&} 31 \neq 0) \rightarrow (x \mathbin{\&} 35 \neq 0))$ тождественно **истинно**?

9) $(x \mathbin{\&} A \neq 0) \land (x \mathbin{\&} 58 = 0) \land (x \mathbin{\&} 22 = 0)$ – **наим**. натур. А, тождественно **ложно**
Подсказка: если выражение тождественно ложно, то его отрицание – тождественно истинно

10) $(x \mathbin{\&} A = 0) \land (x \mathbin{\&} 58 \neq 0) \land (x \mathbin{\&} 22 = 0)$ – **наиб**. натур. А, тождественно **ложно**

11) $((x \mathbin{\&} A \neq 0) \rightarrow (x \mathbin{\&} 62 \neq 0)) \rightarrow ((x \mathbin{\&} 24 = 0) \land (x \mathbin{\&} A \neq 0))$ – **наим**. натур. А, тождественно **ложно**

Ответы

4) 2
5) 11
6) 20
7) 32
8) 95
9) 40
10) 62
11) 8

Краткая шпаргалка

В таблице ниже перечислены самые стандартные задания на ЕГЭ.

x_Z – такое x, для которого верно либо выражение $x \& Z = 0$, либо $x \& Z \neq 0$ (в соответствии со вторым столбцом таблицы ниже).
x_T – такое x, для которого верно либо выражение $x \& T = 0$, либо $x \& T \neq 0$ (в соответствии со вторым столбцом таблицы ниже).

Первая часть	**Отрицание** второй части	Результат
$x \& A = 0$	$(x \& Z = 0) \vee (x \& T = 0)$	Биты для A нужно выбирать из общих нулевых бит x_Z и x_T
$x \& A = 0$	$(x \& Z = 0) \wedge (x \& T = 0)$	Биты для A нужно выбирать из всех нулевых бит x_Z и x_T (т.е. подойдёт любой бит, который является нулём в x_Z или x_T)
$x \& A = 0$	$(x \& Z \neq 0) \wedge (x \& T = 0)$	Биты для A нужно выбирать из нулевых бит x_T
$x \& A \neq 0$	$(x \& Z \neq 0) \vee (x \& T \neq 0)$	Биты для A нужно выбирать из всех ненулевых бит x_Z и x_T (т.е. подойдёт любой бит, который не является нулём в x_Z или x_T)
$x \& A \neq 0$	$(x \& Z \neq 0) \wedge (x \& T \neq 0)$	Биты для A нужно выбирать из всех ненулевых бит x_Z и x_T (т.е. подойдёт любой бит, который не является нулём в x_Z или x_T)
$x \& A \neq 0$	$(x \& Z \neq 0) \wedge (x \& T = 0)$	Биты для A нужно выбирать из ненулевых бит x_Z таких, что в x_T эти биты не являются нулевыми.

Наибольшее A ($x \& A = 0$) – все выбранные биты заполняем единицами.
Наименьшее A ($x \& A = 0$) – делаем единицей самый правый выбранный бит, остальные биты – нули.
Наименьшее A ($x \& A \neq 0$) – все выбранные биты заполняем единицами.
Наибольшее A ($x \& A \neq 0$) – некорректная задача.

Если вместо $x \& Z \neq 0$ стоит $x \& Z = R$ (R здесь обозначает любое конкретное число), делаем ненулевыми только те биты в x_Z, которые дадут в сумме R.