

Задание №15: побитовые операции

Время выполнения: 5 минут

Побитовая конъюнкция &

Чтобы определить, чему равна побитовая конъюнкция двух чисел, нужно перевести эти числа в двоичную систему счисления, выполнить конъюнкцию поразрядно (побитово), результат перевести обратно в десятичную систему счисления.

$$107 \& 30 = 10$$

$$107_{10} = 1101011_2$$

$$30_{10} = 11110_2$$

107	0	1	1	0	1	0	1	1
30	0	0	0	1	1	1	1	0
107 & 30	0	0	0	0	1	0	1	0

$$0001010_2 = 1010_2 = 10_{10}$$

Обратите внимание: недостающие разряды заполняются нулями.

Сравнение с нулём

Пример 1:

$107 \& 30 = 10$ – в результате побитовой конъюнкции получилось число 10. Также будет верно, что:

$107 \& 30 \neq 0$

и

$107 \& 30 \neq 11$ (или любому другому числу кроме 10)

Пример 2:

$107 \& 20 = 0$ – в результате побитовой конъюнкции получился 0

107	1	1	1	0	1	0	1	1
20	0	0	0	1	0	1	0	0
$107 \& 20$	0	0	0	0	0	0	0	0

Также будет верно, что $107 \& 20 \neq 1$ (или любому другому числу кроме 0).

Задача 1

Задача 1

Введём выражение $M \& K$, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наименьшее натуральное число a , такое что выражение

$$(x \& 125 = 1) \rightarrow ((x \& 34 = 2) \rightarrow (x \& a = 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение задачи 1

1) упростим:

$$(x \& 125 = 1) \rightarrow ((x \& 34 = 2) \rightarrow (x \& a = 0))$$

$$(x \& 125 \neq 1) \vee ((x \& 34 = 2) \rightarrow (x \& a = 0))$$

$$(x \& 125 \neq 1) \vee (x \& 34 \neq 2) \vee (x \& a = 0)$$

2) разобьём выражение на две части: в первой части содержится буква a , во второй – нет:

первая часть: $(x \& a = 0)$

вторая часть: $(x \& 125 \neq 1) \vee (x \& 34 \neq 2)$

Решение задачи 1

Т.к. мы знаем результат конъюнкции, некоторые биты x восстановить можно.

x	?	?	?	?	?	?	?	?
125	0	1	1	1	1	1	0	1
$x \& 125$	0	0	0	0	0	0	0	1

x	?	0	0	0	0	0	?	1
125	0	1	1	1	1	1	0	1
$x \& 125$	0	0	0	0	0	0	0	1

Чему равны выделенные жёлтым биты x – неизвестно, т.к. подойдёт и 0, и 1.

Решение задачи 1

Проделаем то же самое со вторым выражением:

$$(x \& 34 = 2)$$

$$34_{10} = 100010_2$$

x	?	?	0	?	?	?	1	?
34	0	0	1	0	0	0	1	0
x & 34	0	0	0	0	0	0	1	0

Отрицание второй части выглядит как $(x \& 125 = 1) \wedge (x \& 34 = 2)$

Т.е. для "проблемного" x должны выполняться оба условия (стоит \wedge). Определим, как выглядит "проблемный" x:

x из первого условия	?	0	0	0	0	0	?	1
x из второго условия	?	?	0	?	?	?	1	?
ИТОГОВЫЙ x	?	0	0	0	0	0	1	1

Решение задачи 1

Т.к. a должно быть натуральным, придётся хотя бы один бит сделать равным 1. Чтобы a было минимальным, бит должен быть как можно меньшим, остальные биты сделаем равными 0.

x	?	0	0	0	0	0	1	1
a	0	0	0	0	0	1	0	0
$x \& a$	0	0	0	0	0	0	0	0

$$a = 00000100_2 = 100_2 = 4_{10}$$

Ответ: 4

Самостоятельно

Самостоятельно

1.1) $(X \& 35 \neq 0) \rightarrow ((X \& 31 = 0) \rightarrow (X \& A \neq 0))$ – наим. натур. A , тождественно истинно

1.2) $(x \& 21 = 0) \vee ((x \& 11 = 0) \rightarrow (x \& A \neq 0))$ – наим. натур. A , тождественно истинно

1.3) $(X \& 102 \neq 0) \rightarrow ((X \& 36 = 0) \rightarrow (X \& A \neq 0))$ – наим. натур. A , тождественно истинно

1.4) Определите **наименьшее** натуральное число A **из интервала [50, 120]** такое, что выражение $(x \& A = 0) \rightarrow ((x \& 31 \neq 0) \rightarrow (x \& 35 \neq 0))$ тождественно истинно.

Подсказка: вначале решаем задачу обычным способом, при подборе A следим, чтобы число лежало в интервале [50; 120] – как сказано в условии

ОТВЕТЫ

1.1) 32

1.2) 20

1.3) 66

1.4) 60

Задача 2

Задача 2

Введём выражение $M \& K$, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наименьшее натуральное число a , такое что выражение

$$((x \& 28 = 0) \rightarrow (x \& 45 \neq 0)) \rightarrow ((x \& 48 = 0) \rightarrow (x \& a \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение задачи 2

1) упростим:

$$((x \& 28 = 0) \rightarrow (x \& 45 \neq 0)) \rightarrow ((x \& 48 = 0) \rightarrow (x \& a \neq 0))$$

$$((\mathbf{x \& 28 \neq 0}) \vee (x \& 45 \neq 0)) \rightarrow ((x \& 48 = 0) \rightarrow (x \& a \neq 0))$$

$$\neg((\mathbf{x \& 28 \neq 0}) \vee (\mathbf{x \& 45 \neq 0})) \vee ((x \& 48 = 0) \rightarrow (x \& a \neq 0))$$

$$\neg((x \& 28 \neq 0) \vee (x \& 45 \neq 0)) \vee ((\mathbf{x \& 48 \neq 0}) \vee (\mathbf{x \& a \neq 0}))$$

$$(\neg(x \& 28 \neq 0) \wedge \neg(x \& 45 \neq 0)) \vee (x \& 48 \neq 0) \vee (x \& a \neq 0)$$

$$((\mathbf{x \& 28 = 0}) \wedge (\mathbf{x \& 45 = 0})) \vee (x \& 48 \neq 0) \vee (x \& a \neq 0)$$

2) разобьём выражение на две части: в первой части содержится буква a, во второй – нет:

первая часть: $(x \& a \neq 0)$

вторая часть: $((x \& 28 = 0) \wedge (x \& 45 = 0)) \vee (x \& 48 \neq 0)$

Решение задачи 2

3) определим, как выглядит "проблемный" x : добавим отрицание ко второй части

$$\neg(((x \& 28 = 0) \wedge (x \& 45 = 0)) \vee (x \& 48 \neq 0))$$

$$\neg((x \& 28 = 0) \wedge (x \& 45 = 0)) \wedge \neg(x \& 48 \neq 0)$$

$$(\neg(x \& 28 = 0) \vee \neg(x \& 45 = 0)) \wedge (x \& 48 = 0)$$

$$((x \& 28 \neq 0) \vee (x \& 45 \neq 0)) \wedge (x \& 48 = 0)$$

4) Определим, как выглядит "проблемный" x в двоичной системе счисления:

$$(x \& 28 \neq 0)$$

$$28_{10} = 11100_2$$

x	?	?	?	?	?	?	?	?
28	0	0	0	1	1	1	0	0
$x \& 28$	0	0	0	?	?	?	0	0

Решение задачи 2

Мы не знаем результат конъюнкции, но знаем, что он не равен 0, значит хотя бы 1 из выделенных жёлтым битов числа x должен быть равен 1.

x	?	?	?	?	?	?	?	?
28	0	0	0	1	1	1	0	0
$x \& 28$	0	0	0	?	?	?	0	0

x	?	?	?	?	?	?	?	?
28	0	0	0	1	1	1	0	0
$x \& 28$	0	0	0	?	?	?	0	0

Решение задачи 2

$$((x \& 28 \neq 0) \vee (x \& 45 \neq 0)) \wedge (x \& 48 = 0)$$

Обратите внимание: между выражениями стоит конъюнкция.

$x \& 28 \neq 0 \vee (x \& 45 \neq 0)$?	?	?	?	?	?	?	?
$x \& 48 = 0$?	?	0	0	?	?	?	?
ИТОГОВЫЙ x	?	?	0	0	?	?	?	?

В итоговом x в любом выделенном жёлтом бите может стоять 1 (и хотя бы одна такая единица есть).

Нужно найти минимальное натуральное a, которое не даст 0 при побитовой конъюнкции с x.

ИТОГОВЫЙ x	?	?	0	0	?	?	?	?
подходящее a	?	?	0	0	1	1	?	1

В таблице показан вид любого a, которое не даст 0 при конъюнкции с x, не только минимального.

Решение задачи 2

а будет минимальным, если все биты, помеченные ?, равны 0.

итоговый x	?	?	0	0	?	?	?	?
минимальное a	0	0	0	0	1	1	0	1

Ответ: 13

Задача 3

Задача 3

Введём выражение $M \& K$, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наибольшее натуральное число a , такое что выражение

$((x \& a \neq 0) \wedge (x \& 12 = 0)) \rightarrow ((x \& a = 0) \wedge (x \& 21 \neq 0)) \vee ((x \& 21 = 0) \wedge (x \& 12 = 0))$
тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной X)?

Решение задачи 3

1) упростим:

$$\begin{aligned} & ((x \& a \neq 0) \wedge (x \& 12 = 0)) \rightarrow ((x \& a = 0) \wedge (x \& 21 \neq 0)) \vee ((x \& 21 = 0) \wedge (x \& 12 = 0)) \\ & (\neg((x \& a \neq 0) \wedge (x \& 12 = 0)) \vee ((x \& a = 0) \wedge (x \& 21 \neq 0))) \vee ((x \& 21 = 0) \wedge (x \& 12 = 0)) \\ & ((\neg(x \& a \neq 0) \vee \neg(x \& 12 = 0)) \vee ((x \& a = 0) \wedge (x \& 21 \neq 0))) \vee ((x \& 21 = 0) \wedge (x \& 12 = 0)) \\ & ((x \& a = 0) \vee (x \& 12 \neq 0)) \vee ((x \& a = 0) \wedge (x \& 21 \neq 0)) \vee ((x \& 21 = 0) \wedge (x \& 12 = 0)) \end{aligned}$$

удалим $(x \& a = 0) \wedge (x \& 21 \neq 0)$, т.к. уже есть $(x \& a = 0)$ по правилу $X \vee XY = X$

$$(x \& a = 0) \vee (x \& 12 \neq 0) \vee ((x \& 21 = 0) \wedge (x \& 12 = 0))$$

2) разобьём выражение на две части: в первой части содержится буква a , во второй – нет:

первая часть: $(x \& a = 0)$

вторая часть: $(x \& 12 \neq 0) \vee ((x \& 21 = 0) \wedge (x \& 12 = 0))$

Решение задачи 3

x	?	?	?	?	0	0	0	?
12	0	0	0	0	1	1	0	0
x & 12	0	0	0	0	0	0	0	0

$(x \& 21 \neq 0)$

$21 = 10101_2$

x	?	?	?	?	?	?	?	?
21	0	0	0	1	0	1	0	1
x & 21	0	0	0	?	0	?	0	?

На месте хотя бы одного из выделенных жёлтым битов должна стоять единица.

Решение задачи 3

$$(x \& 12 \neq 0)$$

$$12 = 1100_2$$

x	?	?	?	?	?	?	?	?
12	0	0	0	0	1	1	0	0
x & 12	0	0	0	0	0	?	0	0

На месте хотя бы одного из выделенных жёлтым битов должна стоять единица.

x & 21 ≠ 0	0) V (x & 12 ≠ 0)	?	?	?	?	?	?
x & 12 ≠ 0	?	?	?	?	?	?	?
((x & 21 ≠ 0) V (x & 12 ≠ 0))	?	?	?	?	?	?	?

Решение задачи 3

$$(x \& 12 = 0) \wedge ((x \& 21 \neq 0) \vee (x \& 12 \neq 0))$$

$((x \& 21 \neq 0) \vee (x \& 12 \neq 0))$?	?	?	?	?	?	?	?
$(x \& 12 = 0)$?	?	?	?	0	0	?	?
ИТОВОГОЙ x	?	?	?	?	0	0	?	?

Требуется найти такое наибольшее натуральное a , что $(x \& a = 0)$.

Решение задачи 3

Требуется найти такое наибольшее натуральное a , что $(x \& a = 0)$.

ИТОВОКИЙ x	?	?	?	?	0	0	?	?
a	?	?	?	?	?	?	?	?
результат	0	0	0	0	0	0	0	0

ИТОВОКИЙ x	?	?	?	?	0	0	?	?
a	0	0	0	0	1	1	0	0
результат	0	0	0	0	0	0	0	0

$$a = 000001100_2 = 1100_2 = 12_{10}$$

Ответ: 12

Самостоятельно

Самостоятельно

4) $(x \& 10 \neq 0) \vee (x \& 39 = 0) \wedge (x \& 149 = 0) \vee (x \& A = 0)$ – **наим.** натур. A , тождественно **истинно**

5) $(x \& 51 \neq 0) \rightarrow (x \& A \neq 0) \vee \neg ((x \& 11 \neq 0) \vee (x \& A \neq 0))$ – **наим.** натур. A , тождественно **истинно**

6) $((x \& 28 = 0) \vee (x \& 22 = 0)) \rightarrow ((x \& 56 \neq 0) \rightarrow (x \& A = 0))$ – **наиб.** натур. A , тождественно **истинно**

7) $((x \& 38 = 0) \vee (x \& 57 = 0)) \rightarrow ((x \& 11 \neq 0) \rightarrow (x \& A = 0))$ – **наиб.** натур. A , тождественно **истинно**

8) Определите **наибольшее** натуральное число A из интервала **[50, 120]** такое, что выражение $(x \& A = 0) \rightarrow ((x \& 31 \neq 0) \rightarrow (x \& 35 \neq 0))$ тождественно **истинно**?

9) $(x \& A \neq 0) \wedge (x \& 58 = 0) \wedge (x \& 22 = 0)$ – **наим.** натур. A , тождественно **ложно**

Подсказка: если выражение тождественно ложно, то его отрицание – тождественно истинно

10) $(x \& A = 0) \wedge (x \& 58 \neq 0) \wedge (x \& 22 = 0)$ – **наиб.** натур. A , тождественно **ложно**

11) $((x \& A \neq 0) \rightarrow (x \& 62 \neq 0)) \rightarrow ((x \& 24 = 0) \wedge (x \& A \neq 0))$ – **наим.** натур. A , тождественно **ложно**

ОТВЕТЫ

4) 2

5) 11

6) 20

7) 32

8) 95

9) 40

10) 62

11) 8

Краткая шпаргалка

В таблице ниже перечислены самые стандартные задания на ЕГЭ.

x_z – такое x , для которого верно либо выражение $x \& Z = 0$, либо $x \& Z \neq 0$ (в соответствии со вторым столбцом таблицы ниже).

x_T – такое x , для которого верно либо выражение $x \& T = 0$, либо $x \& T \neq 0$ (в соответствии со вторым столбцом таблицы ниже).

Первая часть	<u>Отрицание</u> второй части	Результат
$x \& A = 0$	$(x \& Z = 0) \vee (x \& T = 0)$	Биты для A нужно выбирать из <u>общих</u> нулевых бит x_z и x_T
$x \& A = 0$	$(x \& Z = 0) \wedge (x \& T = 0)$	Биты для A нужно выбирать из <u>всех</u> нулевых бит x_z и x_T (т.е. подойдёт любой бит, который является нулём в x_z или x_T)
$x \& A = 0$	$(x \& Z \neq 0) \wedge (x \& T = 0)$	Биты для A нужно выбирать из нулевых бит x_T
$x \& A \neq 0$	$(x \& Z \neq 0) \vee (x \& T \neq 0)$	Биты для A нужно выбирать из <u>всех</u> ненулевых бит x_z и x_T (т.е. подойдёт любой бит, который <u>не</u> является нулём в x_z или x_T)
$x \& A \neq 0$	$(x \& Z \neq 0) \wedge (x \& T \neq 0)$	Биты для A нужно выбирать из <u>всех</u> ненулевых бит x_z и x_T (т.е. подойдёт любой бит, который <u>не</u> является нулём в x_z или x_T)
$x \& A \neq 0$	$(x \& Z \neq 0) \wedge (x \& T = 0)$	Биты для A нужно выбирать из <u>ненулевых</u> бит x_z таких, что в x_T эти биты <u>не</u> являются нулевыми.

Наибольшее A ($x \& A = 0$) – все выбранные биты заполняем единицами.

Наименьшее A ($x \& A = 0$) – делаем единицей самый правый выбранный бит, остальные биты – нули.

Наименьшее A ($x \& A \neq 0$) – все выбранные биты заполняем единицами.

Наибольшее A ($x \& A \neq 0$) – некорректная задача.

Если вместо $x \& Z \neq 0$ стоит $x \& Z = R$ (R здесь обозначает любое конкретное число), делаем ненулевыми только те биты в x_z , которые дадут в сумме R .