



Неизвестные величины принято обозначать последними буквами латинского алфавита (x, y, z, \dots), параметры – первыми буквами (a, b, c, \dots).



Уравнением с параметром **a** называют **уравнение вида $f(x, a) = 0$** , которое надо решить относительно **x** и в котором буквой **a** обозначено **произвольное действительное число**.



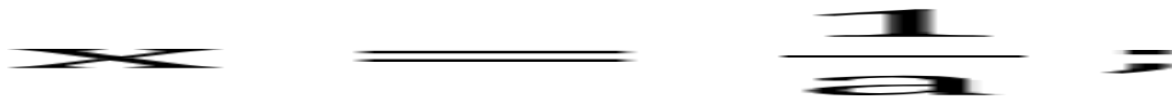
Решить уравнение с параметром – значит для каждого значения параметра **найти множество всех корней** данного уравнения или доказать, что корней нет.

Пример 1. Решить уравнение $ax = 1$.

Решение.

1. если $a \neq 0$: $x = \frac{1}{a}$;

2. если $a = 0$: $0 \cdot x = 1$ – не имеет решений;



Пример 2. Решить уравнение $a^2x - 1 = x + a$.

Решение.

$$a^2x - 1 = x + a;$$

$$a^2x - x = a + 1;$$

$$x(a^2 - 1) = a + 1;$$

1. если $a^2 - 1 \neq 0$, то есть $a \neq \pm 1$: $x = \frac{1}{a}; \quad x = \frac{1}{a};$

2. если $a = 1$, то есть $0 \cdot x = 2$: уравнение не имеет решений;

3. если $a = -1$, то есть $0 \cdot x = 0$: $x = \frac{1}{a};$

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{a};}}$$

$$x = \frac{1}{a};$$

Решение.

ОДЗ:

$a \neq 2$: $x = 2a$;

$x - 4 \neq 0$;

$a = 2$: уравнение не имеет решений;

$x \neq 4$;

$x - 2a = 0$;

$x = 2a$;

$x \neq 4$:

$2a \neq 4$;

$a \neq 2$;

Ответ: если $a \neq 2$, то уравнение имеет единственное решение $x = 2a$;

если $a = 2$, то уравнение не имеет решений.

Пример 4. Решить уравнение $|x - a| = 2$.

Решение.

$$x = \frac{1}{a}; \quad \begin{matrix} \xrightarrow{x=\frac{1}{a}} \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{a}; \\ x = \frac{1}{2} \end{array} \right. \end{matrix} \quad \begin{matrix} \xrightarrow{x=\frac{1}{a}} \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{a}; \\ x = \frac{1}{2} \end{array} \right. \end{matrix}$$

$$x_1 = a + 2, \quad x_2 = a - 2;$$

Ответ: $x_1 = a + 2, x_2 = a - 2$.

Пример 5. Решить уравнение $|x| + |x - a| = 0$.

Решение.

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{a}; \\ x = \frac{1}{a}; \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{a}; \\ x = \frac{1}{a}; \end{array} \right.$$

$$x = \frac{1}{a};$$

$$x = \frac{1}{a};$$

$$x = \frac{1}{a};$$

Пример 6. При всех значениях параметра **a** определим число корней кубического уравнения $x^3 - 3x + 2 - a = 0$.

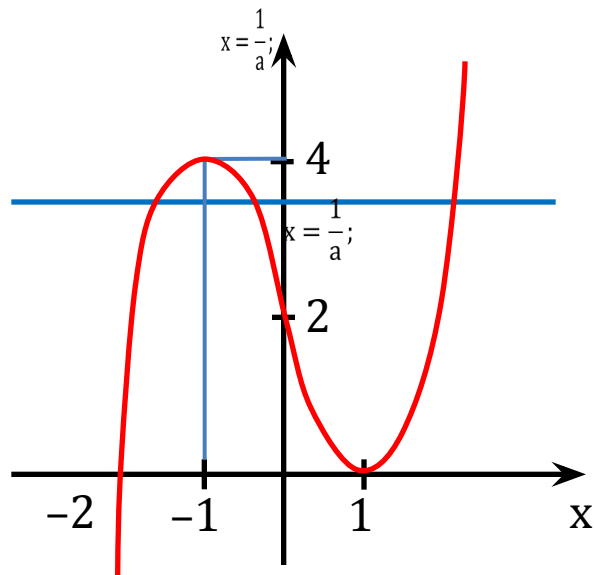
Решение.

$$a = x^3 - 3x + 2;$$

$a < 0$ и $a > 4$: уравнение имеет один корень;

$a = 0$ и $a = 4$: уравнение имеет два корня;

$0 < a < 4$: уравнение имеет три корня;



Ответ: если $a < 0$ и $a > 4$, то данное уравнение имеет один корень; если $a = 0$ и $a = 4$ – два корня; если $0 < a < 4$ – три корня.

Пример 7. Решить уравнение $mx^2 + 3mx - (m+2) = 0$.

Решение.

$$x = \frac{1}{a};$$

$$D = m(13m + 8);$$

$$D = m(13m + 8) \geq 0;$$

$$x = \frac{1}{a};$$

$$x = \frac{1}{a};$$

$$x = \frac{1}{a};$$

Пример 8. При каких значениях параметра a уравнение $-2\sin^2x = (a^2 + 5a + 2)\sin x$ имеет ровно четыре корня на отрезке $[0; 2\pi]$?

Решение.

$$x = \frac{1}{a};$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0; \end{array} \right.$$

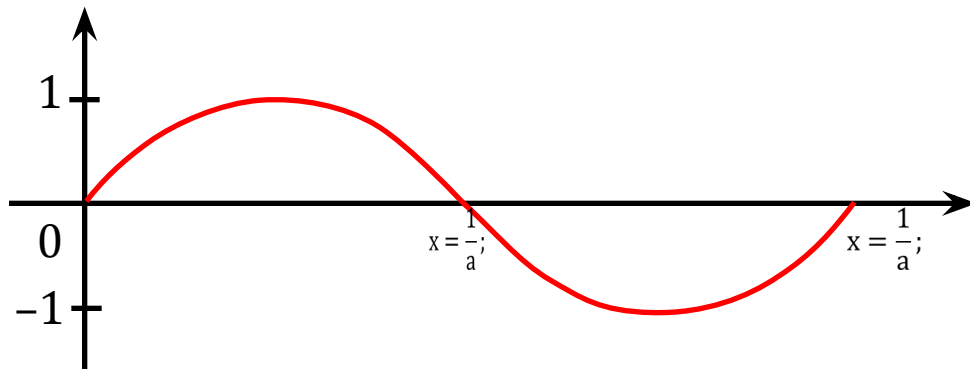
$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{a}; \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{a}; \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{a}; \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{a}; \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{a}; \end{array} \right.$$



Ответ: $a = -1, a = -4, a = 0, a = -5.$