Неизвестные величины принято обозначать последними буквами латинского алфавита (x, y, z,…), параметры – первыми буквами (a, b, c, …).

Уравнением с параметром a называют уравнение вида $f(x, a) = 0$, которое надо решить относительно x и в котором буквой a обозначено произвольное действительное число.

Решить уравнение с параметром – значит для каждого значения параметра найти множество всех корней данного уравнения или доказать, что корней нет.

Пример 1. Решить уравнение $ax = 1$.

Решение.

1. если $a \neq 0$: $x = \dfrac{1}{a}$;

2. если $a = 0$: $0 \cdot x = 1$ – не имеет решений;

$$x = \frac{1}{a};$$

Пример 2. Решить уравнение $a^2x - 1 = x + a$.

Решение.

$a^2x - 1 = x + a$;

$a^2x - x = a + 1$;

$x(a^2 - 1) = a + 1$;

1. если $a^2 - 1 \neq 0$, то есть $a \neq \pm 1$: $x = \frac{1}{a}$; $x = \frac{1}{a}$;

2. если $a = 1$, то есть $0 \cdot x = 2$: уравнение не имеет решений;

3. если $a = -1$, то есть $0 \cdot x = 0$: $x = \frac{1}{a}$;

$$x = \frac{1}{a};$$

$$x = \frac{1}{a};$$

Решение.

ОДЗ:

$x - 4 \neq 0;$

$x \neq 4;$

$x - 2a = 0;$

$x = 2a;$

$x \neq 4:$

$2a \neq 4;$

$a \neq 2;$

$a \neq 2:$ $x = 2a;$

$a = 2:$ уравнение не имеет решений;

Ответ: если $a \neq 2$, то уравнение имеет единственное решение $x = 2a$;
если $a = 2$, то уравнение не имеет решений.

Пример 4. Решить уравнение $|x - a| = 2$.

Решение.

$$x = \frac{1}{a}; \quad x = \frac{1}{a}; \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{a}; \\ x = \frac{1}{a}; \end{array}\right. \quad x = \frac{1}{a}; \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{a}; \\ x = \frac{1}{a}; \end{array}\right.$$

$x_1 = a + 2,\ x_2 = a - 2;$

Ответ: $x_1 = a + 2, x_2 = a - 2$.

Пример 5. Решить уравнение $|x| + |x - a| = 0$.

Решение.

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{a}; \\ x = \frac{1}{a}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{a}; \\ x = \frac{1}{a}; \end{array}\right.$$

$$x = \frac{1}{a};$$

$$x = \frac{1}{a};$$

$$x = \frac{1}{a};$$

Пример 6. При всех значениях параметра a определим число корней кубического уравнения $x^3 - 3x + 2 - a = 0$.

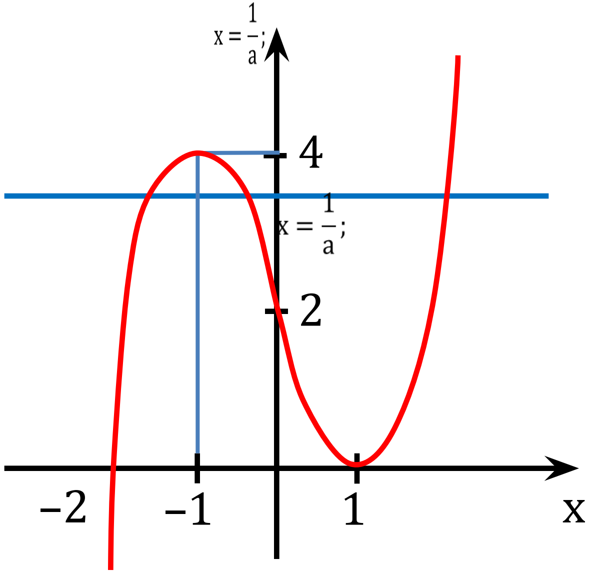
Решение.

$a = x^3 - 3x + 2$;

$a < 0$ и $a > 4$: уравнение имеет один корень;

$a = 0$ и $a = 4$: уравнение имеет два корня;

$0 < a < 4$: уравнение имеет три корня;



Ответ: если a < 0 и a > 4, то данное уравнение имеет один корень один корень; если a = 0 и a = 4 – два корня; если 0 < a < 4 – три корня.

Пример 7. Решить уравнение $mx^2 + 3mx - (m+2) = 0$.

Решение.

$$x = \frac{1}{a};$$

$D = m(13m + 8);$

$D = m(13m + 8) \geq 0;$

$$x = \frac{1}{a};$$

$$x = \frac{1}{a};$$

$$x = \frac{1}{a};$$

Пример 8. При каких значениях параметра a уравнение $-2\sin^2 x = (a^2 + 5a + 2)\sin x$ имеет ровно четыре корня на отрезке $[0;\ 2\pi]$?

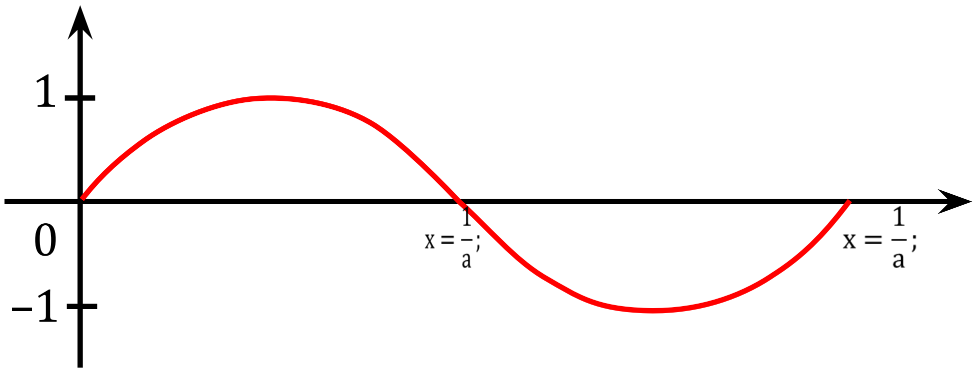
Решение.

$$x = \frac{1}{a};$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0; \\ x = \frac{1}{a}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{a}; \\ x = \frac{1}{a}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{a}; \\ x = \frac{1}{a}; \end{array}\right.$$



Ответ: $a = -1$, $a = -4$, $a = 0$, $a = -5$.