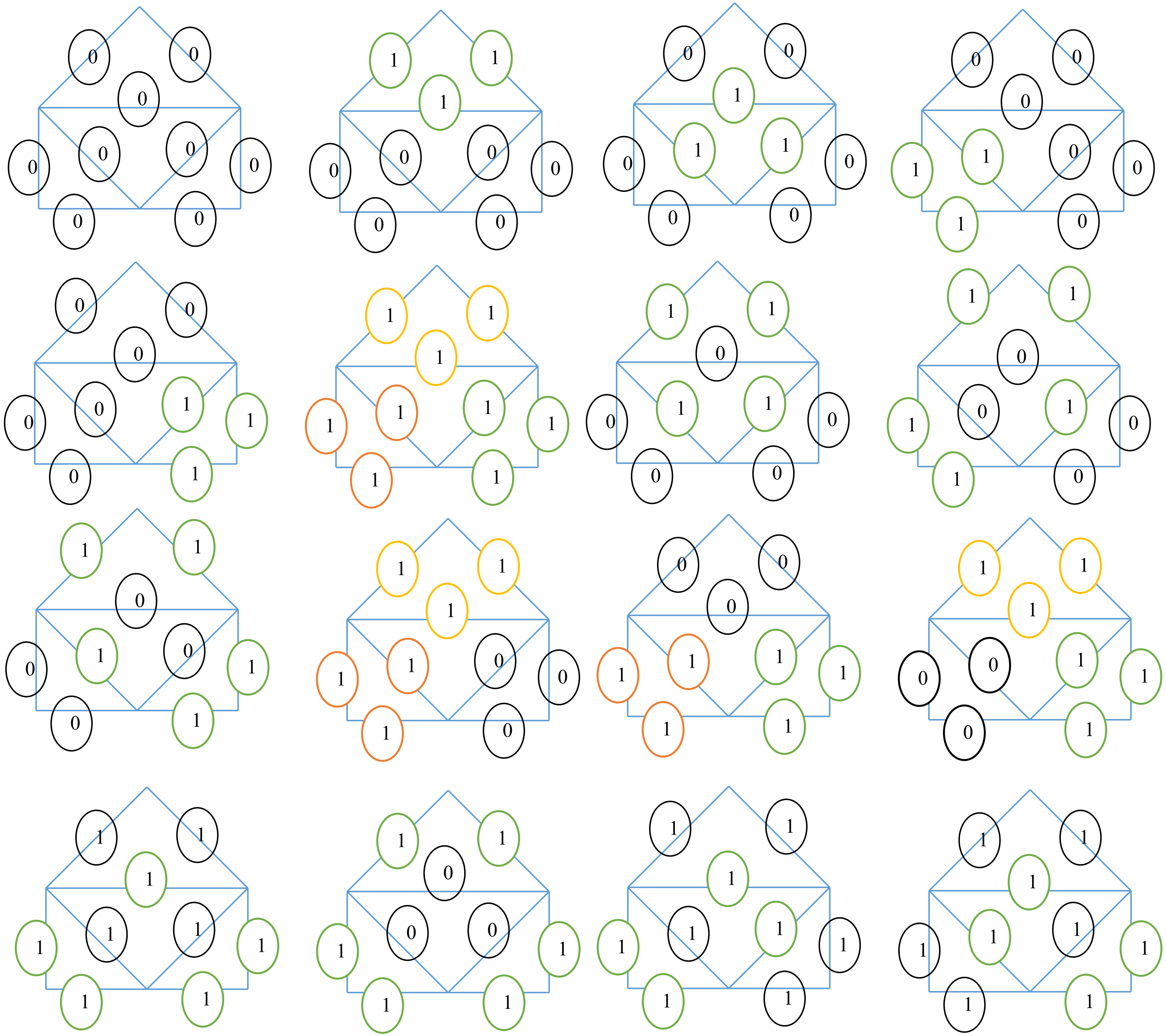
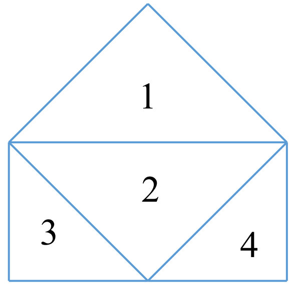


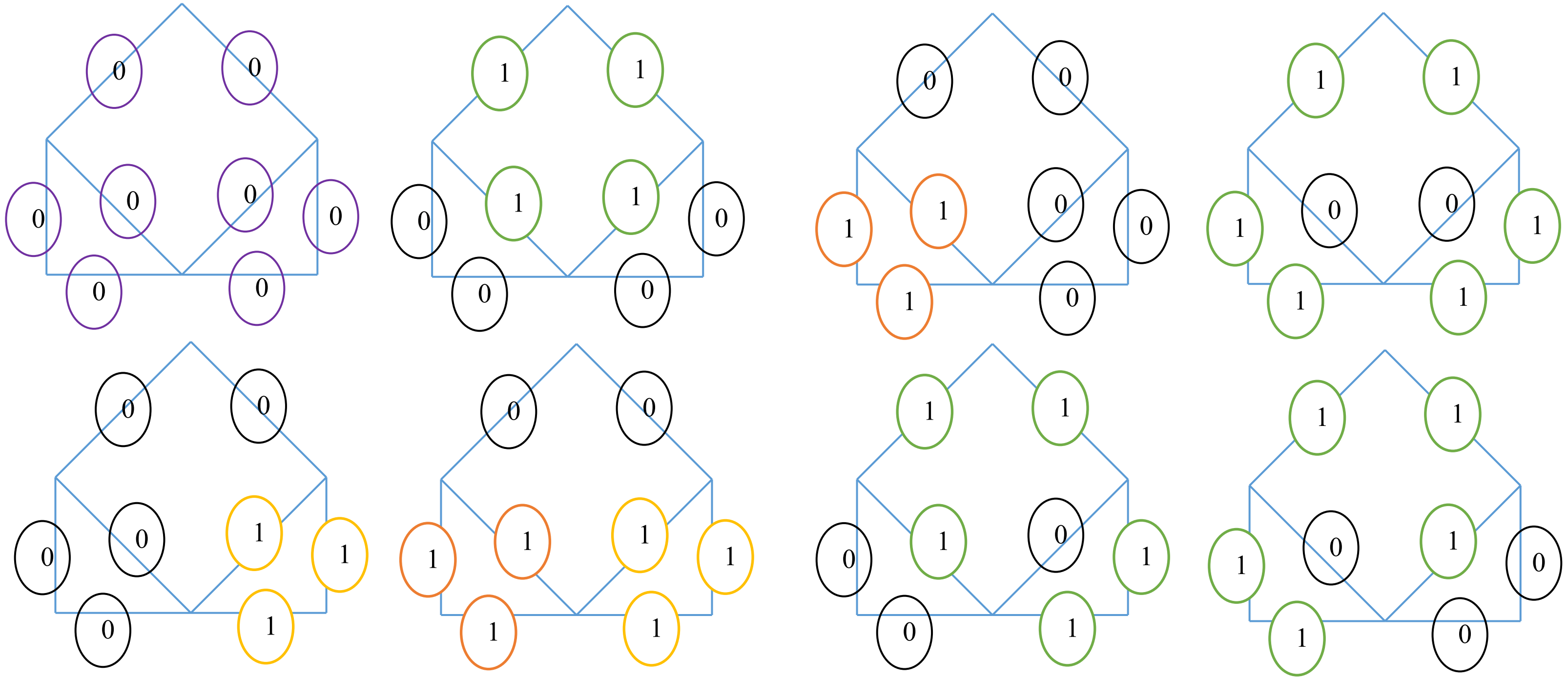


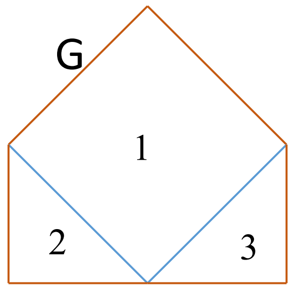
n = 4

$z_P = z_2 = \{0,1\}$

N- число потоков на графе.

N = $p^n = 2^4 = 16$



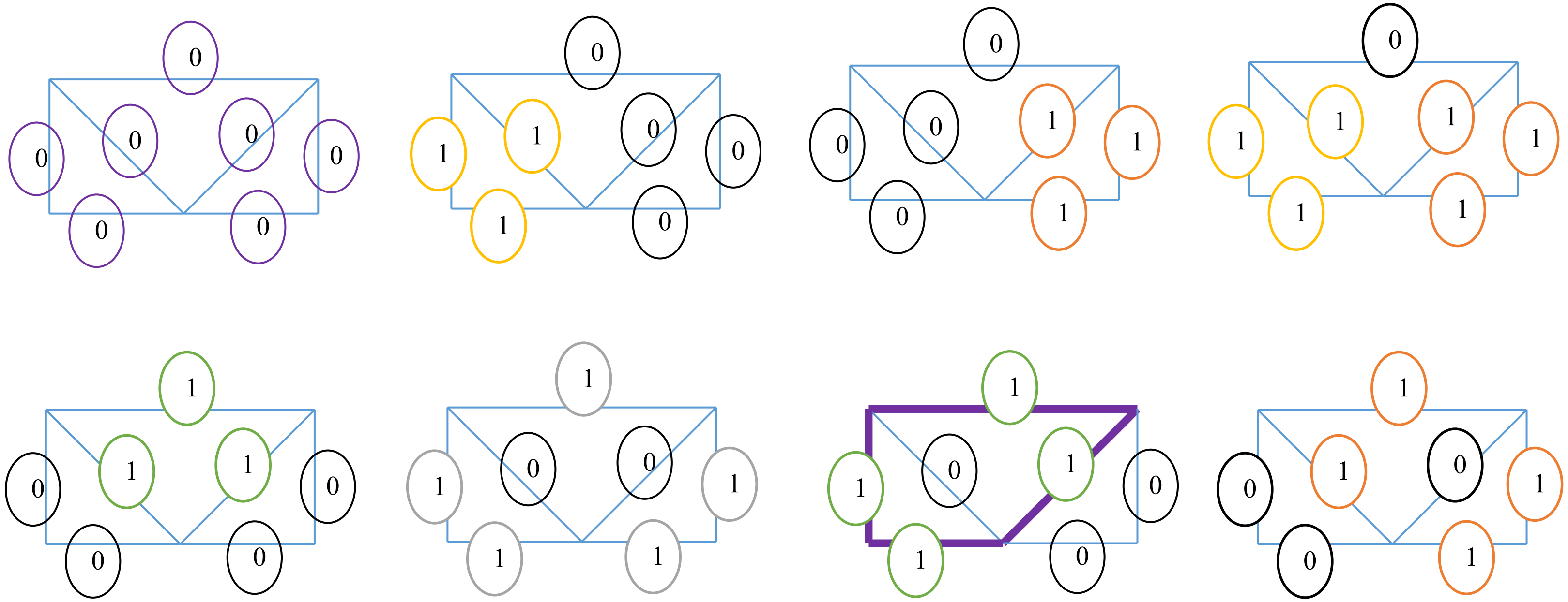


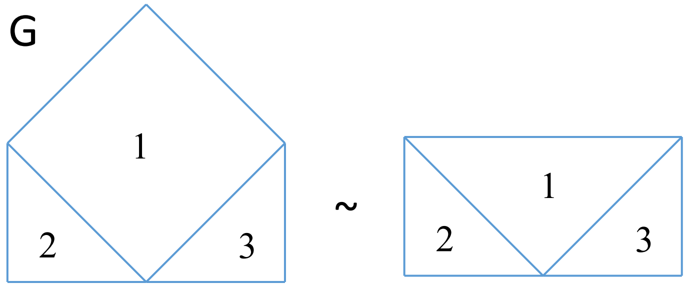
n = 3

$$z_P = z_2 = \{0, 1(-1)\}$$

N- число потоков на графе G.

N = $p^n = 2^3 = 8$



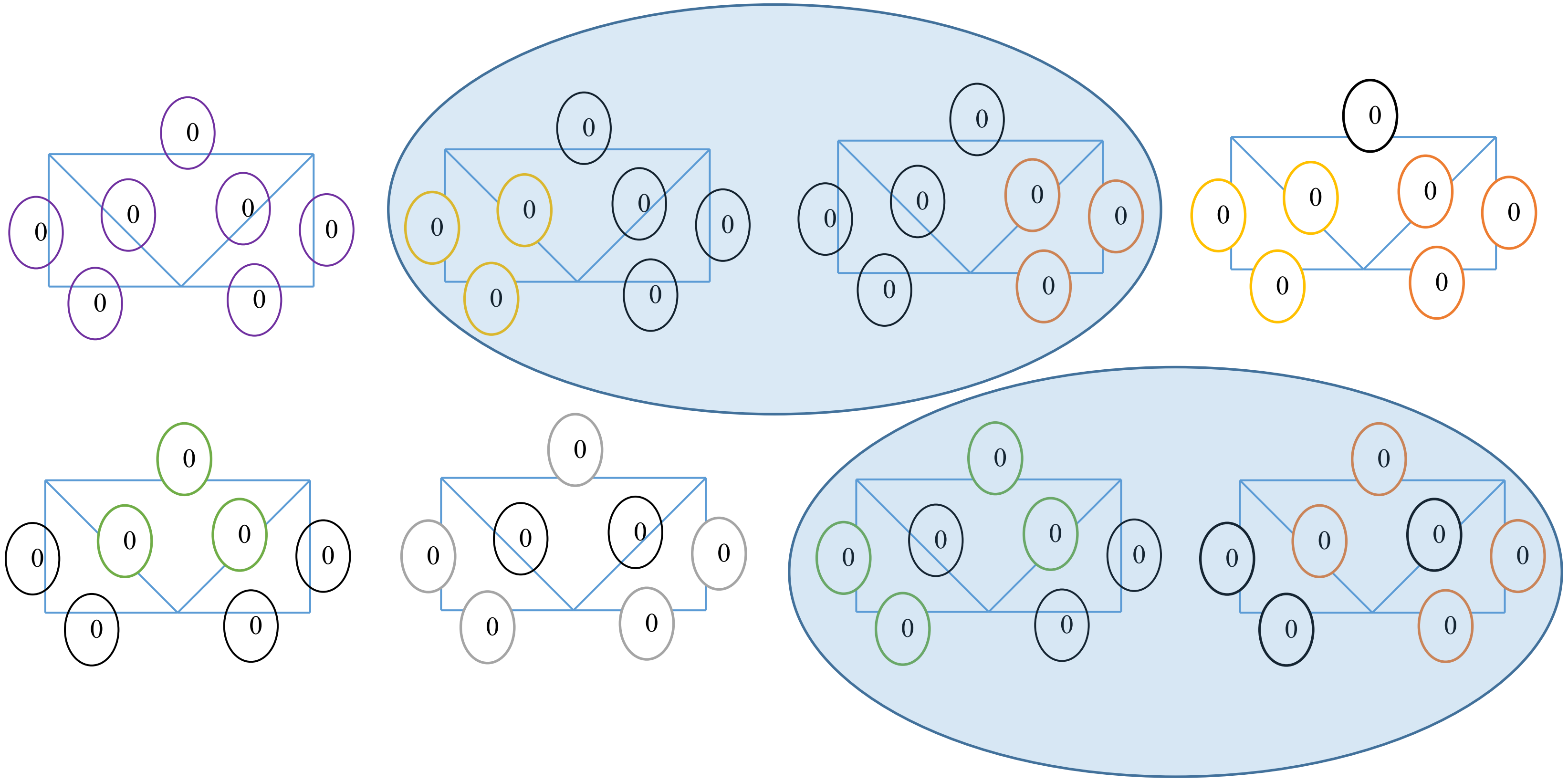


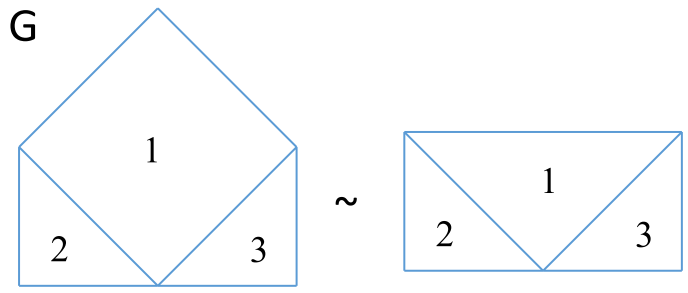
n = 3

$$z_P = z_2 = \{0,1\}$$

N- число потоков на графе G.

$$N = p^n = 2^3 = 8$$



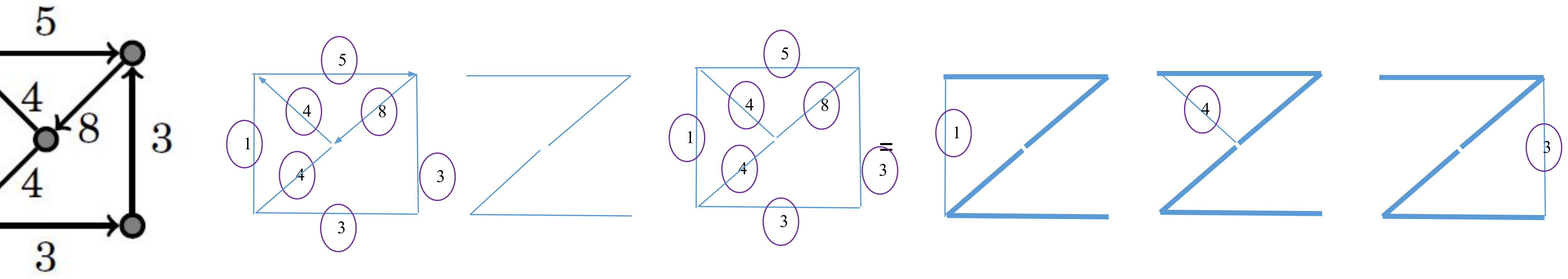


n = 3

$z_P = z_2 = \{0,1\}$

N- число потоков на графе G.

N = $p^n = 2^3 = 8$



5
4
8
3
4
3
5
1
4
8
4
3
3
5
1
4
8
4
3
3
=
1
4
3

1. На каком наименьшем количестве ребер графа G достаточно задать значение потока так, чтобы поток был определен однозначно? $G = V_7$

1) g – циклическое число графа G, показывающее ,то сколько ребер нужно удалить из графа G, чтобы он перестал иметь циклы в своей структуре.

g = R – V + 1, где R – число ребер в графе всего.

V – число вершин в графе.

2)

Число вершин в графе K_n: $V(K_n) = n$;

Число ребер в графе $K_n = V_n$ равняется: $R(K_n) = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$;

Число вершин в графе $K_{n,m}$: $V(K_{n,m}) = n + m$;

Число ребер в графе $K_{n,m}$: $R(K_{n,m}) = n * m$;

3)

Число вершин в графе $K_7 = V_7$: $V(K_7) = 7$;

Число ребер в графе $K_7 = V_7$ равняется: $R(K_7) = C_7^2 = \frac{7(7-1)}{2} = 21$;

$g(K_7) = R(K_7) – V(K_7) + 1 = 21 – 7 + 1 = 15$ $\qquad$ $g(K_7) = 15$

При удалении из графа $g(K_7) = 15$ ребер, граф не будет иметь циклов и следовательно нельзя будет задать потоки.

Из графа K_7 можно удалить $g(K_7) – 1$ ребро и тогда он будет иметь циклы, на которых можно задать поток, который будет определен однозначно.

$R_{min}(K_7) = R(K_7) - [g(K_7) – 1] = 21 – [15 - 1] = 7$ $\qquad$ $R_{min}(K_7) = 7$

13. Найдите все корни многочлена $P(x) = x^3 + x^2 + 2$, принадлежащие $GL(3, \mathbf{F}_3)$, $\mathbf{F}_3=\{0,1,$
$2\}$;

Решение:

1) Составим нормальную форму Фробениуса (НФФ) .

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & -a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$x^3 + x^2 + 2 = x^3 + (a_2 = 1)\, x^2 + (a_1 = 0)\, x + (a_0 = 2)$$

$$P(M) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \dots + a_0 = 0$$

2) Будем рассматривать P(M) как минимальный многочлен для M.

$$x^3 + x^2 + 2 = 0 \quad x^3 + (a_2 = 1)\, x^2 + (a_1 = 0)\, x + (a_0 = 2) = 0$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \{\mathbf{F}_3\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P(M) = 0$$

12. Найдите все корни многочлена $x^3 + x^2 + 2$, принадлежащие $GL(3, \mathbf{F}_3)$.

Продолжение:

3) Проверим,что P(M)= 0: $P(M) = M^3 + M^2 + 2E =?\ 0$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad P(M) = M^3 + M^2 + 2E = 0$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \{\mathbf{F}_3\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$x_1 = M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M^3 = M^2 \bullet M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \{\mathbf{F}_3\} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$x_2 = M^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P(M) = M^3 + M^2 + 2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \{\mathbf{F}_3\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$P(M) = 0$ ч. т. д.

$$x^3 + x^2 + 2 = (x - M)(x - x_2)(x - x_3) = (x - x_1)(x - x_1{}^p)(x - (x_1)^{p^2}) = (x - x_1)(x - (x_2 = x_1{}^p)(x - (x_3 = x_1{}^{p^2}) = 0$$

12. Найдите все корни многочлена $x^3 + x^2 + 2\bullet 1$, принадлежащие $GL(3, \mathbf{F}_3)$.

Продолжение:

3) Проверим,что P(M)= 0: $P(M) = M^3 + M^2 + 2E =?\ 0$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P(x_2) = x_2^{\ 3} + x_2^{\ 2} + 2E = 0$$

$$x_2^{\ 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$x_2^{\ 3} = x_2^{\ 2} \bullet x_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$P(M) = M^3 + M^2 + 2E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \{\mathbf{F}_3\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$P(M) = 0$ ч. т. д.

$$x^3 + x^2 + 2 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = (x - x_1)(x - x_1^{\ p})(x - (x_1)^{p^2}) = (x - x_1)(x - (x_2 = x_1^{\ p})(x - (x_3 = x_1^{\ p^2}) = 0$$

12. *Найдите все корни многочлена* $x^3 + x^2 + 2\cdot 1$, принадлежащие $GL(3, \mathbf{F}_3)$.

Продолжение:

$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 = -b(x^2)}$

3) *Проверим, что* $P(M) = 0$: $\quad P(M) = M^3 + M^2 + 2E = ?\ 0$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P(x_2) = x_2^{\,3} + x_2^{\,2} + 2E = 0 \qquad x_2^{\,2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$x_2^{\,3} = x_2^{\,2} \bullet x_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P(M) = M^3 + M^2 + 2E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \{\mathbf{F}_3\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$P(M) = 0$ ч. т. д.

$$x^3 + x^2 + 2 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = (x - x_1)(x - x_1^{\,p})(x - (x_1)^{p^2}) = (x - x_1)(x - (x_2 = x_1^{\,p})(x - (x_3 = x_1^{\,p^2}) = 0$$

$x_1 + x_2 + x_3 = -1 = 2 \qquad x_3 = 2 - x_1 - x_2$

$$x_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad x_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

12. Найдите все корни многочлена $x^3 + x^2 + 2 \cdot 1$, принадлежащие $GL(3, \mathbf{F}_3)$.

Продолжение:

3) Проверим,что P(M)= 0: $P(M) = M^3 + M^2 + 2E =?\ 0$

$$x_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P(x_2) = x_3^3 + x_3^2 + 2E = 0$$

$$x_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix};$$

$$x_3^3 = x_3^2 \bullet x_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$P(M) = M^3 + M^2 + 2E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} = \{\mathbf{F}_3\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$P(M) = 0$ ч. т. д.

$$x^3 + x^2 + 2 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = (x - x_1)(x - x_1^{\,p})(x - (x_1)^{p^2}) = (x - x_1)(x - (x_2 = x_1^{\,p})(x - (x_3 = x_1^{\,p^2}) = 0$$

$$x_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad x_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad x_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

12. Найдите все корни многочлена $x^3 + x^2 + 2$, принадлежащие $GL(3, \mathbf{F}_3)$.

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Продолжение:

$$x^3 + x^2 + 2 = (x - M)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$

4) Воспользуемся схемой Горнера для определения остаточного многочлена:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

x^3	x^2		
1	1	0	2
1			0

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^3 + x^2 + 2 = (x - M)(x - x_2)(x - x_3) = (x - M)(x^2 + A_1\, x^{\mathbf{1}} + A_2\, x^{\mathbf{0}}) = (x - M)(x^2 + A_1 x + A_2) = 0$$

$$x_2 + x_3 = -A_1$$

$$x_2 \bullet x_3 = A_2$$

$$x_2 + x_3 = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad x_2 + x_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^2 + A_1 x + A_2 = x^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$x_2 \bullet x_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad x_2 \bullet x_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Найдите все корни многочлена $x^2 + 3x + 1$, принадлежащие $GL(2, \mathbf{F}_7)$.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix};$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \{\mathbf{F}_7\} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + x_2 = -3 = 4$$

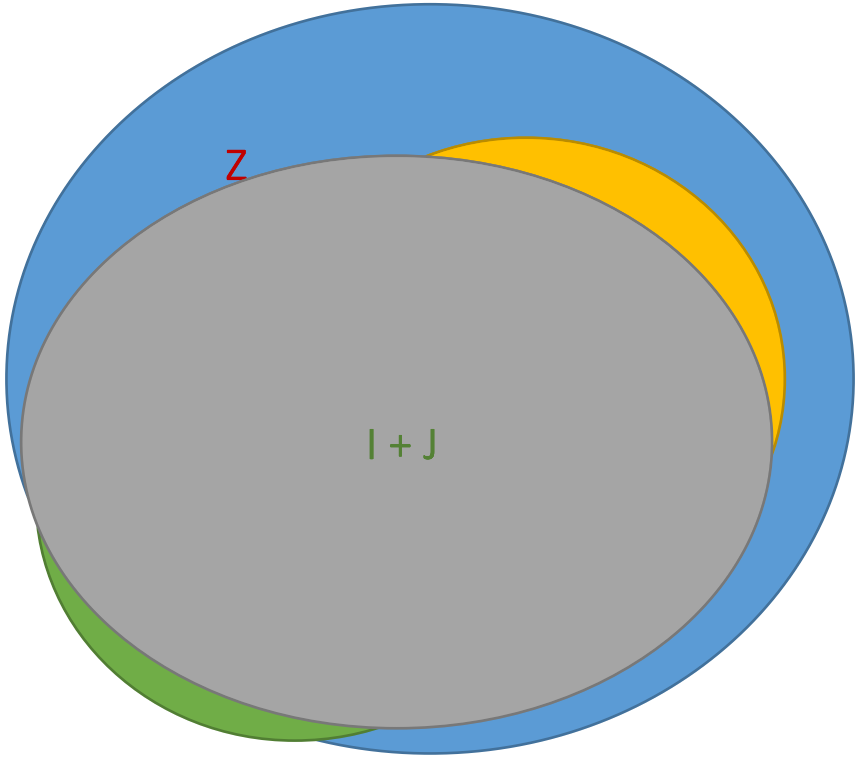
$$x_2 = 4 - x_1 = 4 - \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 4 + \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad x_1 = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad x_1^2 + 3x_1 + 1 = 0 \qquad x_1 = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad x_2^2 + 3x_2 + 1 = 0 \qquad x_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Пусть I = (18), J = (24) — идеалы в Z . Найдите а) I ∩ J, б) I + J.



I (18) ∩ J (24) = {18k, k ∈ Z} ∩ J {24k, k ∈ Z} = { 72k, k ∈ Z} = S(72)

I (18) + J (24) = {18k, k ∈ Z} + J {24k, k ∈ Z} = {18k + 24k, k ∈ Z}

Z

$24 = 3 \bullet 2^3$

$18 = 2 \bullet 3^2$

$72 = 8 \bullet 9 = 2^3 \bullet 3^2$

$I = (18) = (j_k = 18k, k \in Z)$,

$j_1 = 18$

I ∩ J

$j_k :\ j_k Z = j_k Z,\ j_k Z \in I,\ j_k Z$

$36 \bullet 8 = 288 = 18 \bullet 16$

I (18) + J (24) = {18k, k ∈ Z} + J {24k, k ∈ Z} = {b = 18n + 24m = 6L= 6(3n + 4m), n, m , L ∈ Z} = S(6)

$18 + 48 = 66 = 6 \bullet 11$

$18 \bullet 2 + 24 \bullet 2 = 36 + 48 = 84 = 6 \bullet 7 \bullet 2$

Ответ: I(18) ∩ J(24) = S(72), I(18) + J(24) = S(6)

0	1		
1	**0**		

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1) = (x+1)(x^2+x+1)$

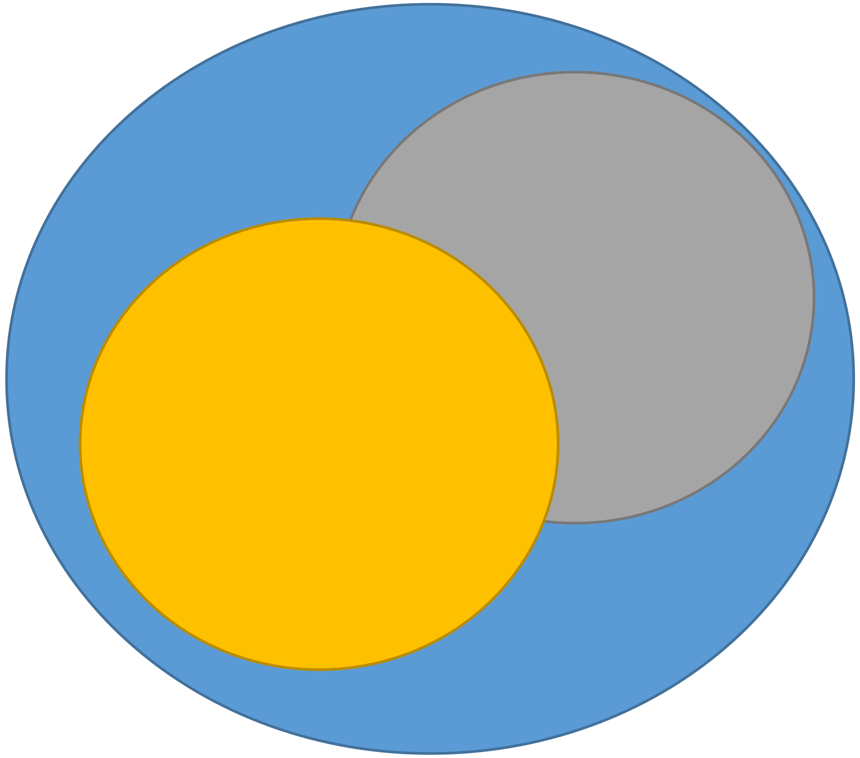
Фактор-кольцо изоморфно($\approx$) прямому произведению колец $F_2[x]/(x+1)$ X $F_2[x]/(x^2+x+1)$.

I$(x+1)$, J(x^2+x+1)

p^q – число элементов в поле, которое имеет подполе F_p

Это поля из 2 и 4 элементов.

У прямого произведения полей K x L идеалов четыре: нулевой(0), единичный(1), K x {0}, {0} x L.
Это следует из определения идеала и того факта, что у поля идеалов два -- нулевой и единичный.



α	β
−β	a + 3β

α	1
−β	a

1	0
0	β

Перечислите все идеалы кольца $\mathbf{F}_2[x]/(x^3 + 1) = \{A_2x^2 + A_1x^1 + A_0\}$, 8, 1, 2.