



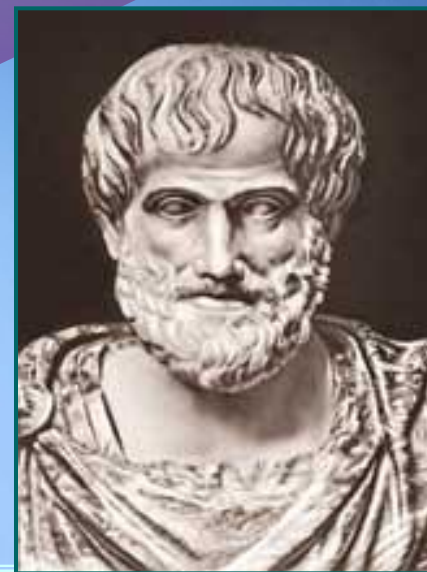
# Алгебра высказываний

*«Память становится мыслящей»*

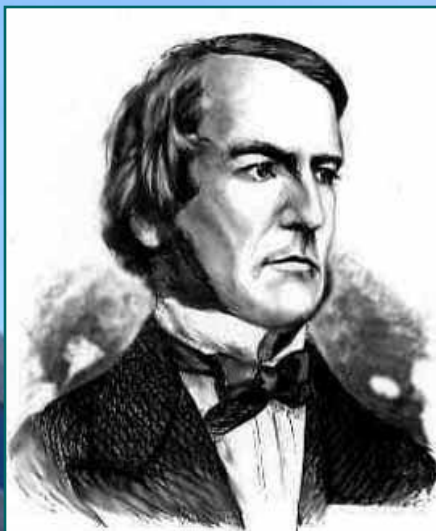
(Д.Б.Эльконин)

# Формы мышления и история развития алгебры логики

История логики насчитывает около двух с половиной тысячелетий. Первые учения о формах и способах мышления возникли в Древнем Китае и Индии. Основателем формальной логики является **Аристотель** (384-322 гг. до н.э.) – древнегреческий философ, который впервые отделил логические формы мышления от его содержания.



**Алгебра логики – наука об операциях, аналогичных математическим, над высказываниями или над объектами, которые могут принимать только два значения – «ИСТИНА» или «ЛОЖЬ».**



В 1842 году английский математик **Джорж Буль** разработал *математическую логику* или *алгебру логики*, которую впоследствии стали называть *«булевой алгеброй»*.

Спустя 100 лет алгебра логики стала основой теории цифровых вычислительных машин, ее используют в компьютерной логике, электронике, в основе всех микропроцессорных операций.

# Формы мышления и история развития алгебры логики



Готфрид Вильгельм  
Лейбниц

Многие философы и математики развивали отдельные положения логики и иногда даже намечали контуры современного исчисления высказываний, но ближе всех к созданию математической логики подошел уже во второй половине XVII века выдающийся немецкий ученый **Готфрид Вильгельм Лейбниц** (1646— 1716), указавший пути для перевода логики “из словесного царства, полного неопределенностей, в царство математики, где отношения между объектами или высказываниями определяются совершенно точно”. Лейбниц надеялся даже, что в будущем философы, вместо того чтобы бесплодно спорить, станут брать бумагу и вычислять, кто из них прав. При этом в своих работах Лейбниц затрагивал и двоичную систему счисления.

Уже в XIX веке стало понятно, что система Буля хорошо подходит для описания **электрических переключательных схем**. Ток в цепи может либо протекать, либо отсутствовать, подобно тому, как утверждение может быть либо истинным, либо ложным. А еще несколько десятилетий спустя, уже в XX столетии, ученые объединили созданный Джорджем Булем математический аппарат с двоичной системой счисления, заложив тем самым основы для разработки цифрового электронного компьютера.



- Логика, как наука развивается с IV в. до н. э. начиная с трудов Аристотеля. Именно он подверг анализу человеческое мышление, такие его формы, как *понятие*, *суждение*, *умозаключение*.
- **Логика** (от греч. “логос”, означающего “слово” и “смысл”) – **наука о законах, формах и операциях правильного мышления.**
- Ее основная задача заключается в нахождении и систематизации правильных способов рассуждения.



# Основные формы абстрактного

Логика

Понятия

содержание

объем

Суждения

■

И

Л

Умозаключение

дедукция

индукция

аналогия

***Понятие – это форма мышления, в которой отражаются существенные признаки отдельного предмета или класса однородных предметов. Всякое понятие имеет содержание и объем***

- Например, понятие “Черное море” – отражает единичный предмет, “Сиамская кошка” – отражает класс сиамских кошек.

***Содержание понятия – совокупность существенных признаков множества, отраженных в этом понятии.***

- Например, понятие “квадрат” – прямоугольник, который имеет равные стороны.

***Объем понятия – множество предметов, которые мыслятся в понятии.***

- Например, под объемом понятия “лев” подразумевается множество всех львов, которые существовали, существуют и будут существовать.

Высказывание (суждение) – повествовательное предложение, о котором можно сказать истинно оно или ложно.

**Бывают простые и сложные (объединяют несколько простых).**

<b>Высказывания</b>		
<b>Общие</b>	<b>Частные</b>	<b>Единичные</b>
<u>Начинаются</u> <u>со слов:</u> все, всякий, каждый, ни один, любой...	<u>Начинаются со</u> <u>слов:</u> некоторые, большинство, многие...	Например, А – первая буква алфавита.



# Примеры высказываний

Истинное высказывание: «Буква «А» - гласная».

Ложное высказывание: «Компьютер был изобретен в середине XIX века».

**Какие из предложений являются высказываниями?  
Какие из высказываний истинные?**



1. Какой длины эта лента? *Не высказывание*
2. Прослушайте сообщение. *Не высказывание*
3. Делайте утреннюю зарядку! *Не высказывание*
4. Назовите устройства ввода информации. *Не высказывание*
5. Кто отсутствует? *Не высказывание*
6. Париж – столица Англии. *Ложное высказывание*
7. Число 11 является простым. *Истинное высказывание*
8.  $4+5=10$  *Ложное высказывание*
9. Без труда не вытащишь и рыбку из пруда. *Истинное высказывание*
10. Сложите числа 2 и 5. *Не высказывание*
11. Некоторые медведи живут на Севере. *Истинное высказывание*
12. Все медведи – бурые. *Ложное высказывание*
13. Чему равно расстояние от Москвы до Ленинграда? *Не высказывание*
14. Сумма углов треугольника – 180 градусов. *Истинное высказывание*

# №1. Какие предложения являются высказываниями?

1. Москва – столица РФ.
2. Алуштинский дворец (Ласточкино гнездо) находится в Крыму.
3.  $5 - 9 + 8$ .
4.  $5 - 9 + 8 = 4$ .
5. На юге Африки живут пингвины.

№2. Определите, какие из следующих предложений являются высказываниями, а какие нет. Какие из высказываний истинные, а какие нет?

1. Учить второй иностранный язык легче, чем первый.
2. Обязательно займись каким-либо видом спорта.
3. Переводчик должен знать хотя бы два языка.
4. Ты играешь в хоккей?
5. Отними от неизвестного числа 5 – и получишь 2.
6. К концу 11 класса хорошо выучу русский язык.

**Умозаключение** – это такая форма мышления посредством которой из одного или нескольких суждений с необходимостью выводится новое заключение о предметах реального мира.

**Умозаключения** бывают:

**Дедуктивные (от общего к частному)** – Все ученики ходят в школу. Вася – ученик. Вася ходит в школу.

**Индуктивные (от частного к общему)** – Банан и персик – сладкие. Значит, все фрукты сладкие на вкус.

**Аналогия** – Наши коровы едят траву и дают молоко. В Австралии есть поля, коровы едят эту траву. Следовательно, австралийские коровы тоже дают молоко.

1. ВСЕ АНТИЛОПЫ СТРОЙНЫЕ.

2. СТРОЙНЫЕ ЖИВОТНЫЕ РАДУЮТ ГЛАЗ.

ВСЕ \_\_\_\_\_ РАДУЮТ ГЛАЗ.

1. ВСЕ АНТИЛОПЫ СТРОЙНЫЕ.

2. СТРОЙНЫЕ ЖИВОТНЫЕ РАДУЮТ ГЛАЗ.

ВСЕ АНТИЛОПЫ РАДУЮТ ГЛАЗ.



- *Логические величины – это понятия выражаемые словами Истина или Ложь.*
- *Логическая переменная – это символически выраженная логическая величина.*
- *Логическое выражение – это простое или сложное высказывание о котором можно сказать Истинно оно или Ложно.*



# Формы мышления

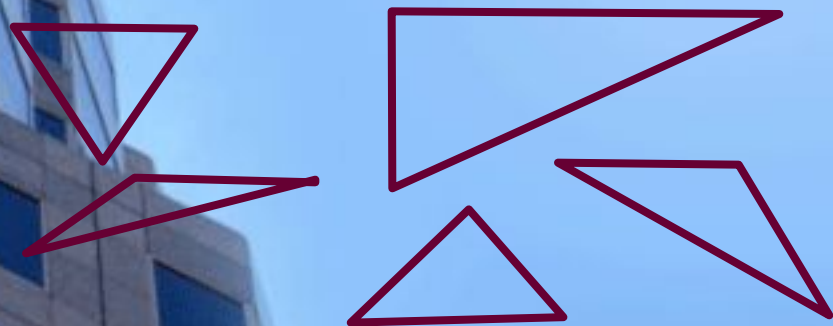
# Понятие

Содержание

это все существенные  
признаки, отраженные в  
этом понятии

*Например:*

*ТРЕУГОЛЬНИК*



Объем

множество предметов,  
определяемых этим  
понятием

*ВСЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ*

*ВСЕХ ВИДОВ И*

*РАЗМЕРОВ*



Объем уменьшается

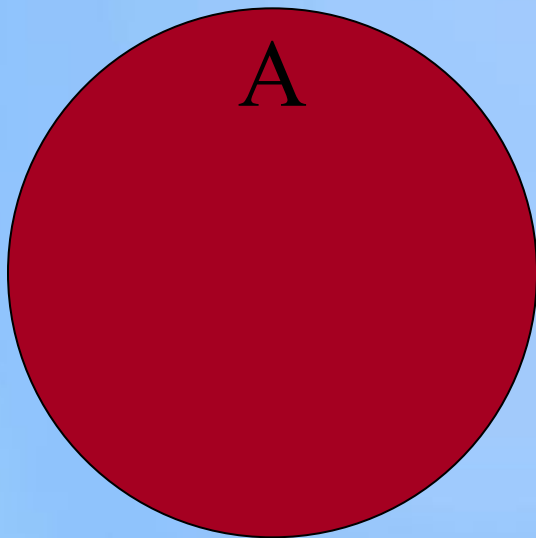
Объем растет

Содержание растет

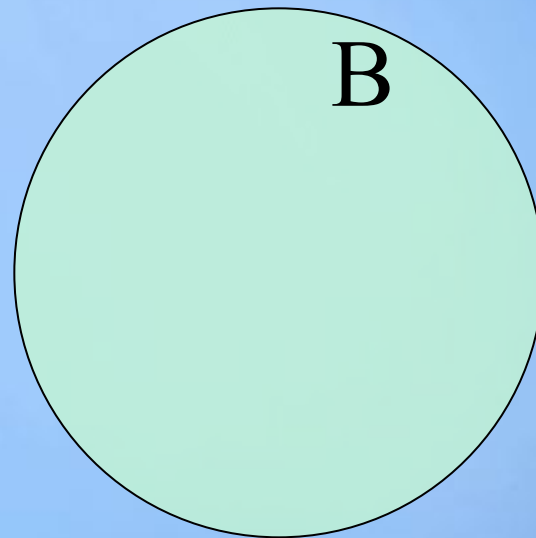
# Круги Эйлера

Отношения между понятиями по объему:

1. Тождество или совпадение объемов.

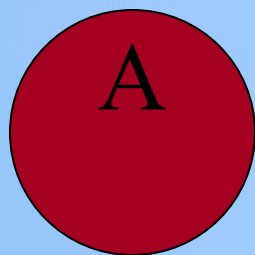


А – столица России

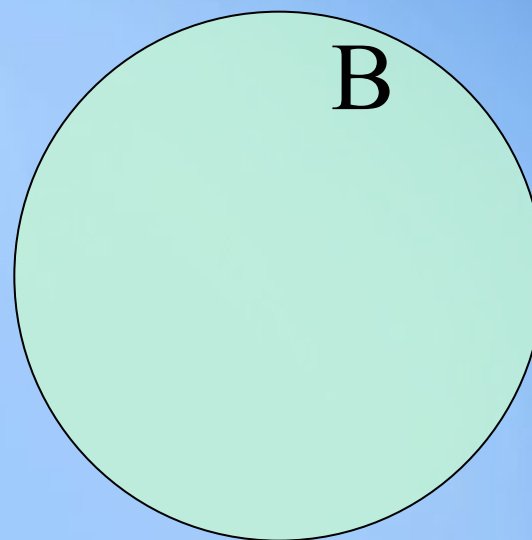


В – город Москва

## 2. Подчинение или включение объемов.



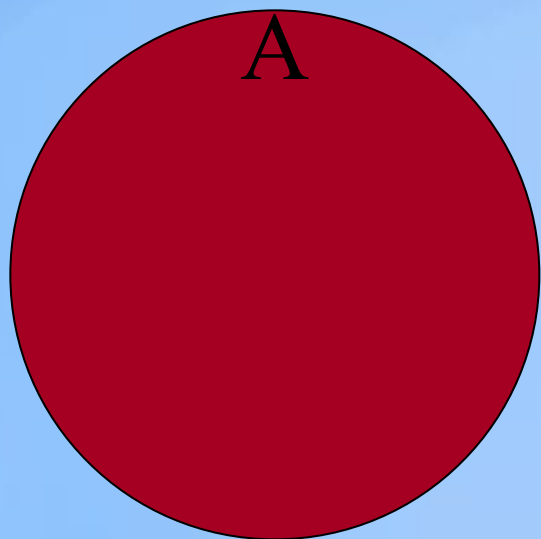
A – кошка



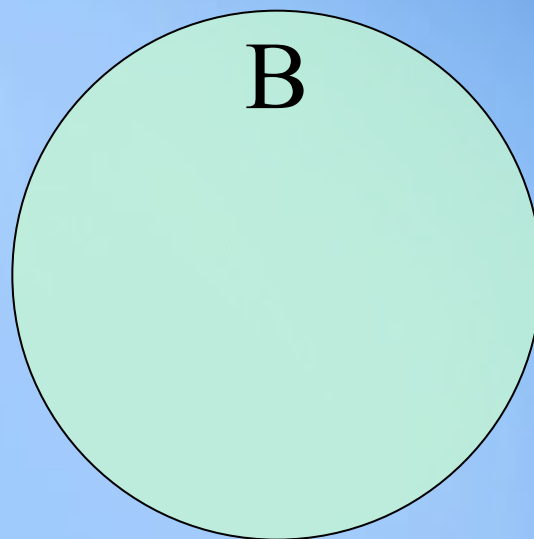
B – живое существо



### 3. Исключение объемов.

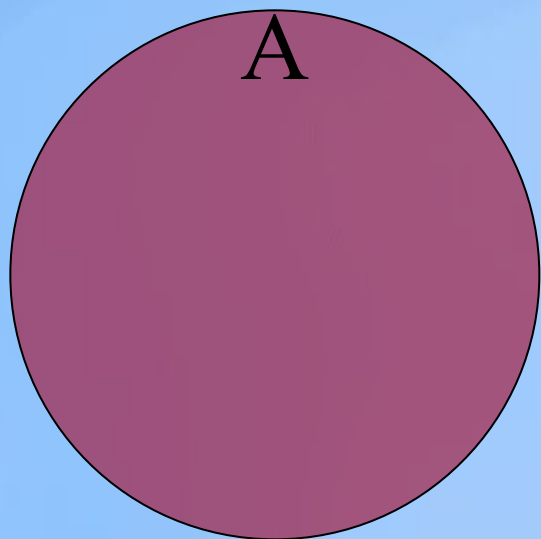


A – стол

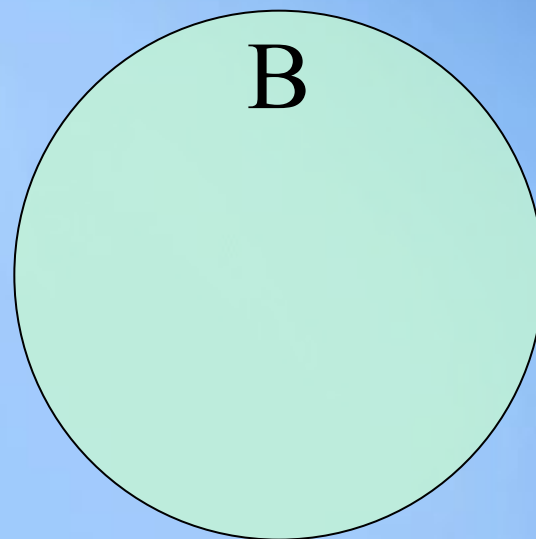


B – дружба

## 4. Пересечение или частичное совпадение объемов.



А – школьник



В – отличник



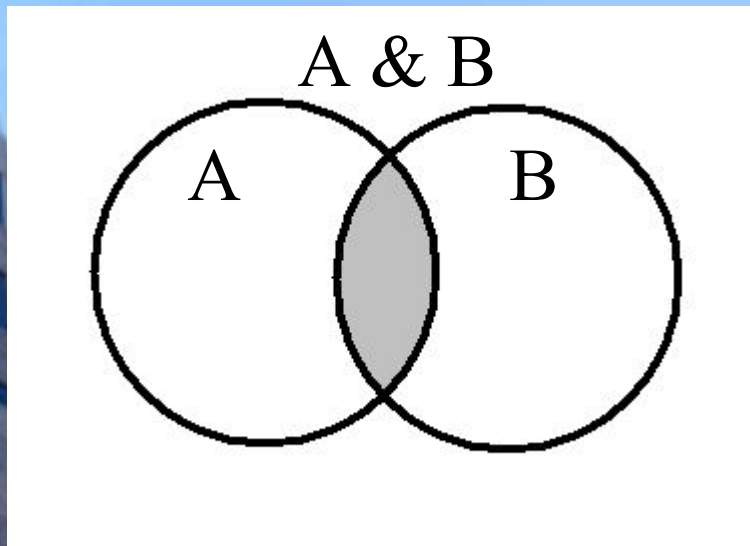
# Логические операции

# КОНЪЮНКЦИЯ

## Логическое умножение

Обозначение: И, & ,  $\wedge$

Таблица истинности:



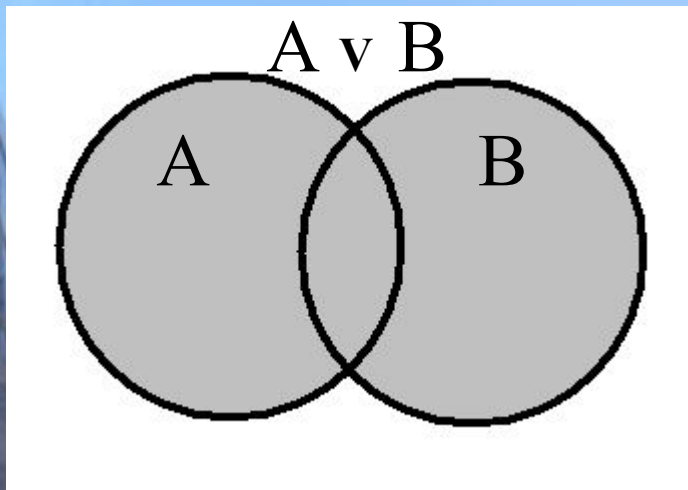
A	B	A & B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

# Дизъюнкция

## Логическое сложение

Обозначение: ИЛИ,  $\vee$ , +

Таблица истинности



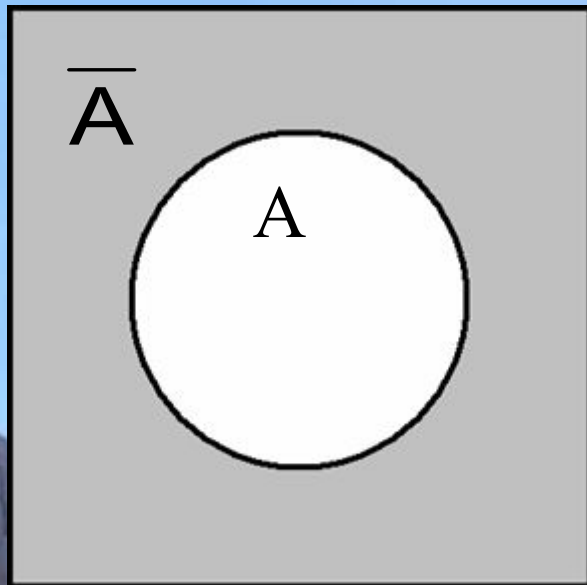
A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

# Инверсия

## Логическое отрицание

Обозначение: НЕ,  $\neg$ , -

Таблица истинности



$A$	$\neg A$
0	1
1	0



# Постройте отрицания приведенных ниже высказываний:

Вася купил мороженое.

(Вася не купил мороженое.)

Существует шестое чувство.

(Не существует шестого чувства.)

На улице идет дождь.

Сегодня рабочий день.

Денис сегодня был готов к уроку.

В школу привезли новые компьютеры.

Являются ли отрицанием  
следующие высказывания:

1. Он – мой друг. Он – мой враг.
2. Большой дом. Небольшой дом.
3. Большой дом. Маленький дом.
4.  $X < 2$ .  $X > 2$ .

# Логическая операция ИМПЛИКАЦИЯ (логическое следование):

- в естественном языке соответствует обороту **если ..., то ...**;
- обозначение  $\rightarrow$ .

Импликация - это логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда условие (первое высказывание) истинно, а следствие (второе высказывание) ложно.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

# Логическая операция ЭКВИВАЛЕНЦИЯ (равнозначность):

- в естественном языке соответствует оборотам речи **тогда и только тогда; в том и только в том случае;**
- обозначения  $\Leftrightarrow$  ,  $\sim$  .






Эквиваленция – это логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания одновременно истинны или одновременно ложны.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

# Порядок выполнения логических операций:

1. Операции **в скобках**
2. Инверсия – **НЕ**
3. Конъюнкция – **И**
4. Дизъюнкция – **ИЛИ**
5. Импликация – **ЕСЛИ..., ТО**
6. Эквивалентность – **ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА**

# Логические операции

НЕ, 	Инверсия, <b>логическое отрицание</b>
И,  , and, &, *, ·	Конъюнкция, <b>логическое умножение</b>
ИЛИ,  , or, +	Дизъюнкция, <b>логическое сложение</b>
	Импликация, <b>логическое следование</b>
=, 	Эквивалентность, <b>логическое равенство</b>



**ИСТИНА – 1**

**ЛОЖЬ - 0**

*Таблица истинности определяет значение сложного высказывания при всех возможных значениях простых высказываний*

*Каждое составное высказывание можно выразить в виде формулы (логического выражения), в которую войдут логические переменные, обозначающие высказывания, и знаки логических операций, обозначающие логические функции.*





# Инверсия - логическое отрицание



Логическое отрицание делает истинное высказывание ложным и, наоборот, ложное – истинным.

*От лат. **inversio** -  
переворачиваю*

Таблица истинности функции  
логического отрицания

A	$F=A$
0	1
1	0

**ИСТИНА – 1**

**ЛОЖЬ - 0**

*В переводе на естественный язык  
«**Не А**»  
«**Неверно, что А**»*

Пример: Даны высказывания

**А** – «Число 10 – четное» = **ИСТИНА**

**В** – «Число 10 – отрицательное» = **ЛОЖЬ**

**С** – «Луна – спутник Земли» = **ИСТИНА**

**Не А** – «Неверно, что число 10 – четное» = **ЛОЖЬ**

**Не В** – «Неверно, что число 10 – отрицательное» =  
**ИСТИНА**

**Не С** – «Неверно, что Луна – спутник Земли» =  
**ЛОЖЬ**

# Конъюнкция - логическое умножение



Результат логического умножения является истинным тогда и только тогда, когда истинны все входящие в него простые высказывания.

*От лат. conjunctio - связываю*

Таблица истинности функции логического умножения

A	B	F=A*B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

*В переводе на естественный язык*

«и A, и B»                      «как A, так и B»  
«A вместе с B»                «A несмотря на B»  
«A, в то время как B»

Пример: Даны высказывания

**A** – «Число 10 – четное» = **ИСТИНА**

**B** – «Число 10 – отрицательное» = **ЛОЖЬ**

**C** – «Число 10 кратно 2» = **ИСТИНА**

**A и B** – «Число 10 – четное и отрицательное» - **ЛОЖЬ**

**A и C** – «Число 10 как четное, так и кратно 2» - **ИСТИНА**

И,  $\wedge$ , and, &, \*, ·



# Дизъюнкция - логическое сложение



Результат логического сложения является истинным тогда, когда истинно хотя бы одно из входящих в него простых высказываний.

*От лат. disjunctio – различаю*

Таблица истинности функции логического сложения

A	B	F=A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

**В переводе на естественный язык  
«А или В»**

Пример: Даны высказывания

**A** – «Число 10 – четное» = **ИСТИНА**

**B** – «Число 10 – отрицательное» = **ЛОЖЬ**

**C** – «Число 10 - простое» = **ЛОЖЬ**

**A или B** – «Число 10 – четное или отрицательное» - **ИСТИНА**

**A или C** – «Число 10 четное или простое» - **ИСТИНА**

**B или C** – «Число 10 отрицательное или простое» - **ЛОЖЬ**

ИЛИ,  $\vee$ , or, +



# Импликация - логическое следование



Результат логического следования является ложным тогда и только тогда, когда из истины следует ложь.

*От лат. implicatio – тесно связывать*

Таблица истинности функции логического следования

A	B	$F=A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A – условие, B - следствие

*В переводе на естественный язык*  
**«если A, то B»**                      **«B, если A»**  
**«Когда A, тогда B»**  
**«A достаточно для B»**  
**«A только тогда, когда B»**

Пример: Даны высказывания

**A** – «Число 10 – четное» = **ИСТИНА**

**B** – «Число 10 – отрицательное» = **ЛОЖЬ**

**C** – «Число 10 - простое» = **ЛОЖЬ**

**A**  $\rightarrow$  **B** – «Если число 10 – четное, то оно - отрицательное» - **ЛОЖЬ**

**A**  $\rightarrow$  **C** – «Число 10 простое, если четное» - **ЛОЖЬ**  
«Если число делится на 10, то оно делится на 5»  
**ИСТИНА**



# Эквивалентность - логическое равенство



Результат логического равенства является истинным тогда и только тогда, когда оба высказывания одновременно либо истинны, либо ложны.

*От лат. **aeguivalens**  
– равноценное*

Таблица истинности функции логического равенства

A	B	$F=A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

**В переводе на естественный язык**  
**«А эквивалентно В»**  
**«А тогда и только тогда, когда В»**

Пример: Даны высказывания

**A** – «Число 10 – четное» = **ИСТИНА**

**B** – «Число 10 – отрицательное» = **ЛОЖЬ**

**C** – «Число 10 - простое» = **ЛОЖЬ**

**A**  $\leftrightarrow$  **B** – «Число 10 – четное, тогда и только тогда, когда оно - отрицательное» - **ЛОЖЬ**

**B**  $\leftrightarrow$  **C** – «Число 10 такое же простое, как и отрицательное» **ИСТИНА**

=,



# Значение логической функции определяется с помощью таблиц истинности

умножения:

A	B	F=A&B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

сложения:

A	B	F=A ∨ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

отрицания:

A	F= $\bar{A}$
0	1
1	0

импликации:

A	B	F=A ⊃ B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

эквивалентности:

A	B	F=A ↔ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1