

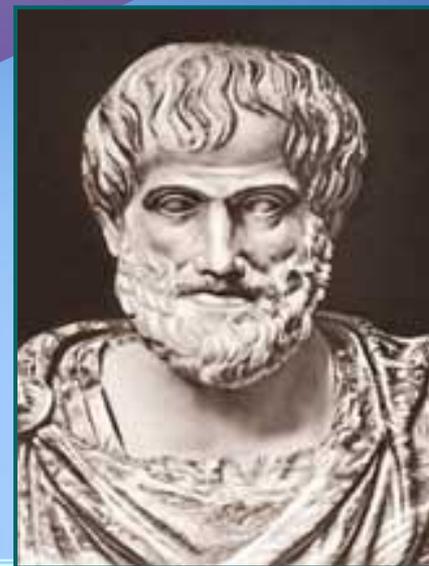
Алгебра высказываний

«Память становится мыслящей»

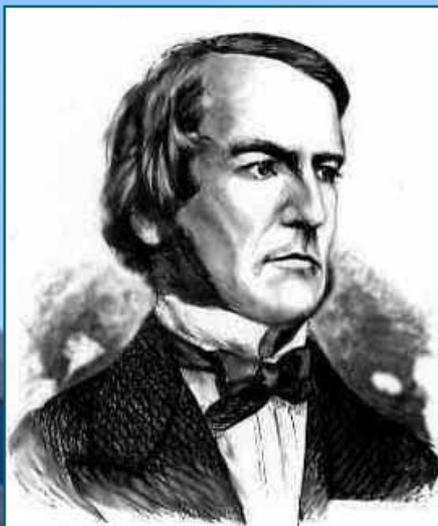
(Д.Б.Эльконин)

Формы мышления и история развития алгебры логики

История логики насчитывает около двух с половиной тысячелетий. Первые учения о формах и способах мышления возникли в Древнем Китае и Индии. Основателем формальной логики является **Аристотель** (384-322 гг. до н.э.) – древнегреческий философ, который впервые отделил логические формы мышления от его содержания.



Алгебра логики – наука об операциях, аналогичных математическим, над высказываниями или над объектами, которые могут принимать только два значения – «ИСТИНА» или «ЛОЖЬ».



В 1842 году английский математик **Джорж Буль** разработал *математическую логику* или *алгебру логики*, которую впоследствии стали называть *«булевой алгеброй»*.

Спустя 100 лет алгебра логики стала основой теории цифровых вычислительных машин, ее используют в компьютерной логике, электронике, в основе всех микропроцессорных операций.

Формы мышления и история развития алгебры логики



Готфрид Вильгельм
Лейбниц

Многие философы и математики развивали отдельные положения логики и иногда даже намечали контуры современного исчисления высказываний, но ближе всех к созданию математической логики подошел уже во второй половине XVII века выдающийся немецкий ученый **Готфрид Вильгельм Лейбниц** (1646— 1716), указавший пути для перевода логики “из словесного царства, полного неопределенностей, в царство математики, где отношения между объектами или высказываниями определяются совершенно точно”. Лейбниц надеялся даже, что в будущем философы, вместо того чтобы бесплодно спорить, станут брать бумагу и вычислять, кто из них прав. При этом в своих работах Лейбниц затрагивал и двоичную систему счисления.

Уже в XIX веке стало понятно, что система Буля хорошо подходит для описания **электрических переключательных схем**. Ток в цепи может либо протекать, либо отсутствовать, подобно тому, как утверждение может быть либо истинным, либо ложным. А еще несколько десятилетий спустя, уже в XX столетии, ученые объединили созданный Джорджем Булем математический аппарат с двоичной системой счисления, заложив тем самым основы для разработки цифрового электронного компьютера.



- Логика, как наука развивается с IV в. до н. э. начиная с трудов Аристотеля. Именно он подверг анализу человеческое мышление, такие его формы, как *понятие*, *суждение*, *умозаключение*.
- **Логика** (от греч. “логос”, означающего “слово” и “смысл”) – **наука о законах, формах и операциях правильного мышления.**
- Ее основная задача заключается в нахождении и систематизации правильных способов рассуждения.

Основные формы абстрактного

Логика

Понятия

содержание

объем

Суждения

■

И

Л

Умозаключение

дедукция

индукция

аналогия

Понятие – это форма мышления, в которой отражаются существенные признаки отдельного предмета или класса однородных предметов. Всякое понятие имеет содержание и объем

- Например, понятие “Черное море” – отражает единичный предмет, “Сиамская кошка” – отражает класс сиамских кошек.

Содержание понятия – совокупность существенных признаков множества, отраженных в этом понятии.

- Например, понятие “квадрат” – прямоугольник, который имеет равные стороны.

Объем понятия – множество предметов, которые мыслятся в понятии.

- Например, под объемом понятия “лев” подразумевается множество всех львов, которые существовали, существуют и будут существовать.

Высказывание (суждение) – повествовательное предложение, о котором можно сказать истинно оно или ложно.

Бывают простые и сложные (объединяют несколько простых).

Высказывания		
Общие	Частные	Единичные
<u>Начинаются</u> <u>со слов:</u> все, всякий, каждый, ни один, любой...	<u>Начинаются со</u> <u>слов:</u> некоторые, большинство, многие...	Например, А – первая буква алфавита.

Примеры высказываний

Истинное высказывание: «Буква «А» - гласная».

Ложное высказывание: «Компьютер был изобретен в середине XIX века».

**Какие из предложений являются высказываниями?
Какие из высказываний истинные?**



1. Какой длины эта лента? *Не высказывание*
2. Прослушайте сообщение. *Не высказывание*
3. Делайте утреннюю зарядку! *Не высказывание*
4. Назовите устройства ввода информации. *Не высказывание*
5. Кто отсутствует? *Не высказывание*
6. Париж – столица Англии. *Ложное высказывание*
7. Число 11 является простым. *Истинное высказывание*
8. $4+5=10$ *Ложное высказывание*
9. Без труда не вытащишь и рыбку из пруда. *Истинное высказывание*
10. Сложите числа 2 и 5. *Не высказывание*
11. Некоторые медведи живут на Севере. *Истинное высказывание*
12. Все медведи – бурые. *Ложное высказывание*
13. Чему равно расстояние от Москвы до Ленинграда? *Не высказывание*
14. Сумма углов треугольника – 180 градусов. *Истинное высказывание*

№1. Какие предложения являются высказываниями?

1. Москва – столица РФ.
2. Алуштинский дворец (Ласточкино гнездо) находится в Крыму.
3. $5 - 9 + 8$.
4. $5 - 9 + 8 = 4$.
5. На юге Африки живут пингвины.

№2. Определите, какие из следующих предложений являются высказываниями, а какие нет. Какие из высказываний истинные, а какие нет?

1. Учить второй иностранный язык легче, чем первый.
2. Обязательно займись каким-либо видом спорта.
3. Переводчик должен знать хотя бы два языка.
4. Ты играешь в хоккей?
5. Отними от неизвестного числа 5 – и получишь 2.
6. К концу 11 класса хорошо выучу русский язык.

Умозаключение – это такая форма мышления посредством которой из одного или нескольких суждений с необходимостью выводится новое заключение о предметах реального мира.

Умозаключения бывают:

Дедуктивные (от общего к частному) – Все ученики ходят в школу. Вася – ученик. Вася ходит в школу.

Индуктивные (от частного к общему) – Банан и персик – сладкие. Значит, все фрукты сладкие на вкус.

Аналогия – Наши коровы едят траву и дают молоко. В Австралии есть поля, коровы едят эту траву. Следовательно, австралийские коровы тоже дают молоко.

1. ВСЕ АНТИЛОПЫ СТРОЙНЫЕ.

2. СТРОЙНЫЕ ЖИВОТНЫЕ РАДУЮТ ГЛАЗ.

ВСЕ _____ РАДУЮТ ГЛАЗ.

1. ВСЕ АНТИЛОПЫ СТРОЙНЫЕ.

2. СТРОЙНЫЕ ЖИВОТНЫЕ РАДУЮТ ГЛАЗ.

ВСЕ АНТИЛОПЫ РАДУЮТ ГЛАЗ.

- *Логические величины – это понятия выражаемые словами Истина или Ложь.*
- *Логическая переменная – это символически выраженная логическая величина.*
- *Логическое выражение – это простое или сложное высказывание о котором можно сказать Истинно оно или Ложно.*



Формы мышления

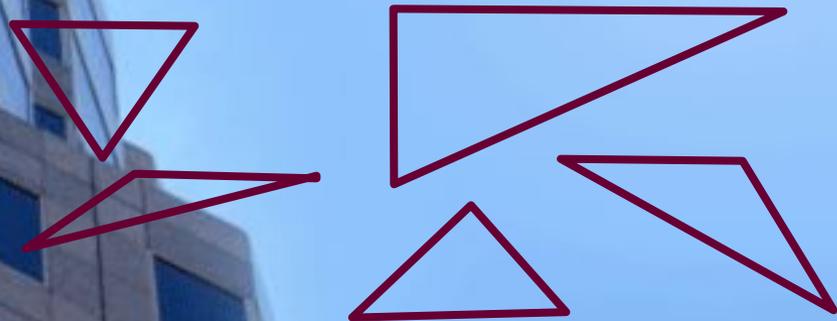
Понятие

Содержание

это все существенные
признаки, отраженные в
этом понятии

Например:

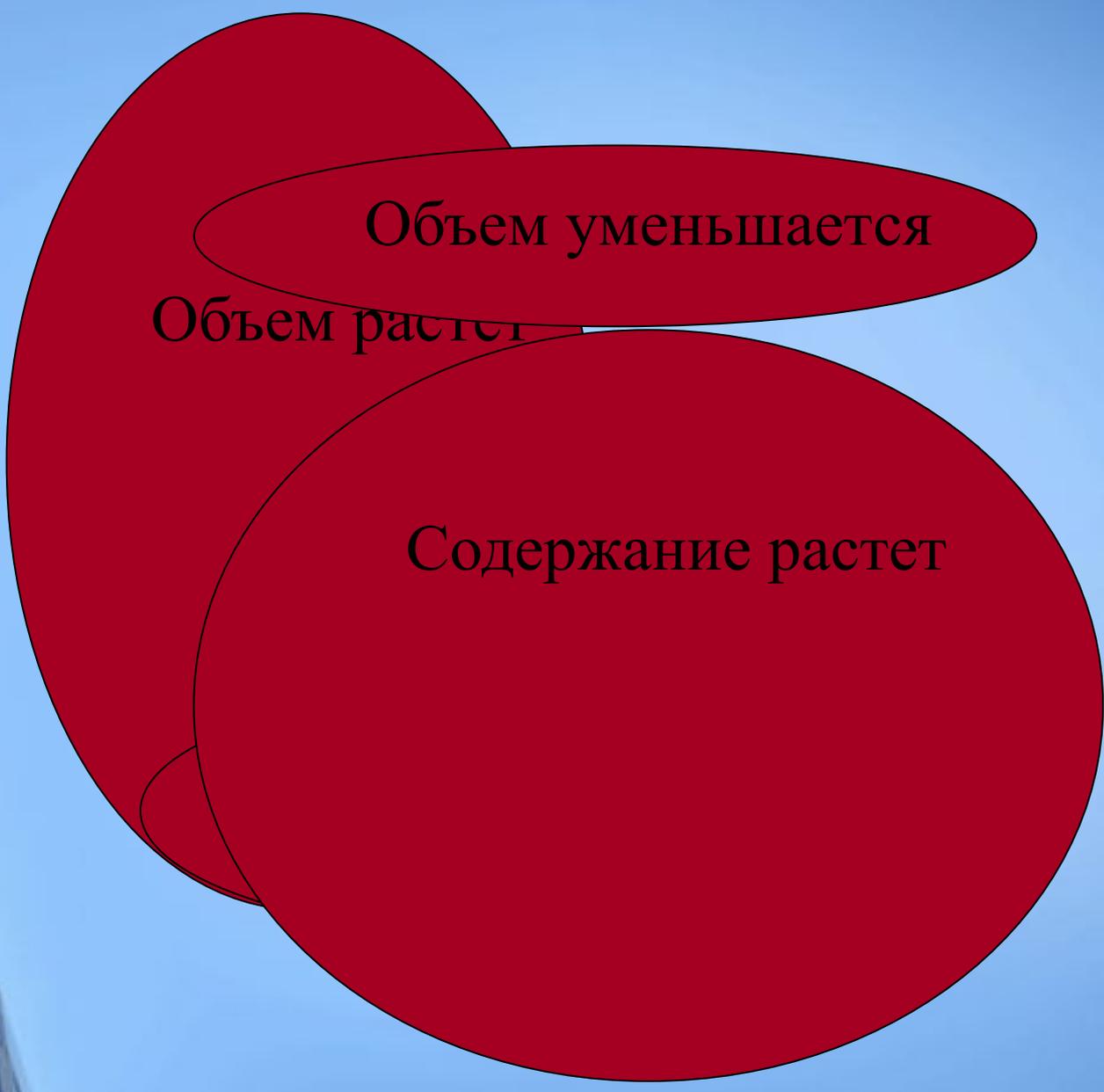
ТРЕУГОЛЬНИК



Объем

множество предметов,
определяемых этим
понятием

*ВСЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ
ВСЕХ ВИДОВ И
РАЗМЕРОВ*



Объем уменьшается

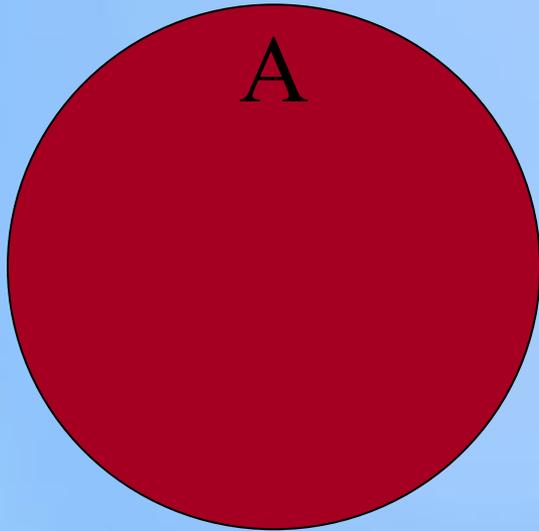
Объем растет

Содержание растет

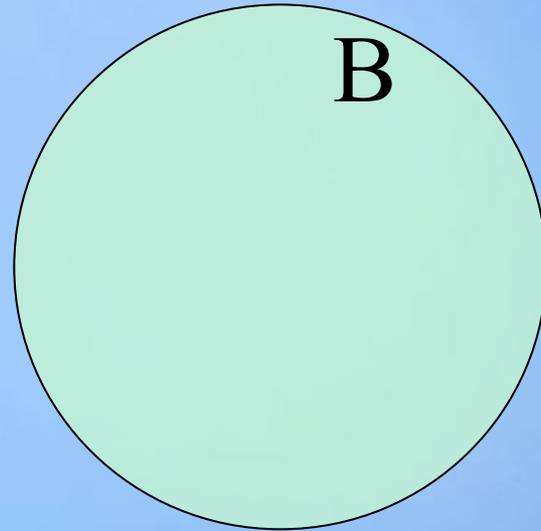
Круги Эйлера

Отношения между понятиями по объему:

1. Тождество или совпадение объемов.

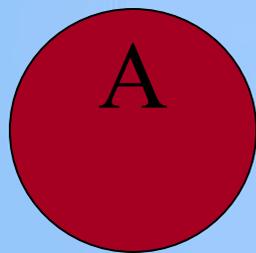


А – столица России

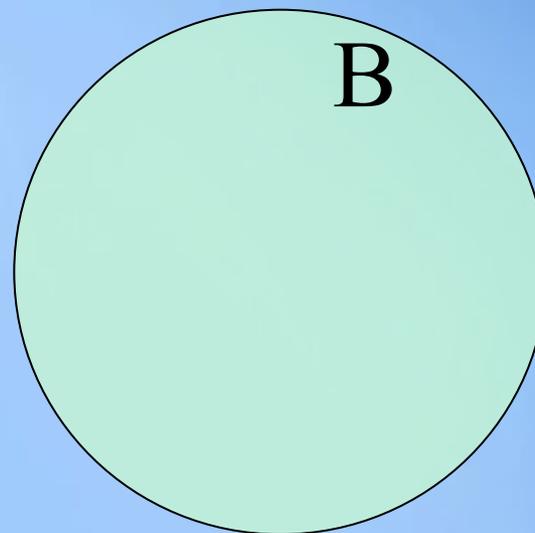


В – город Москва

2. Подчинение или включение объемов.

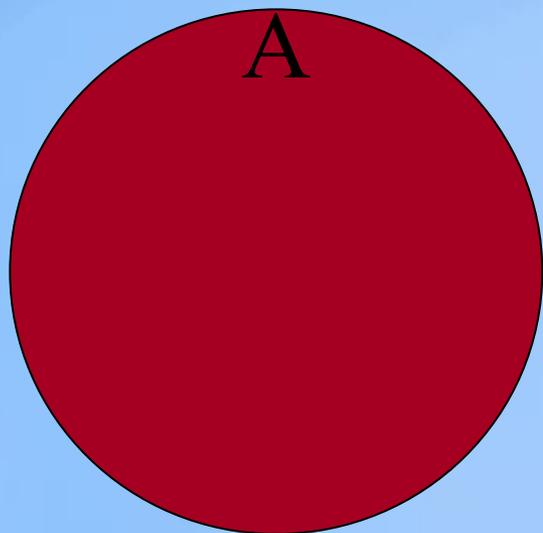


A – кошка

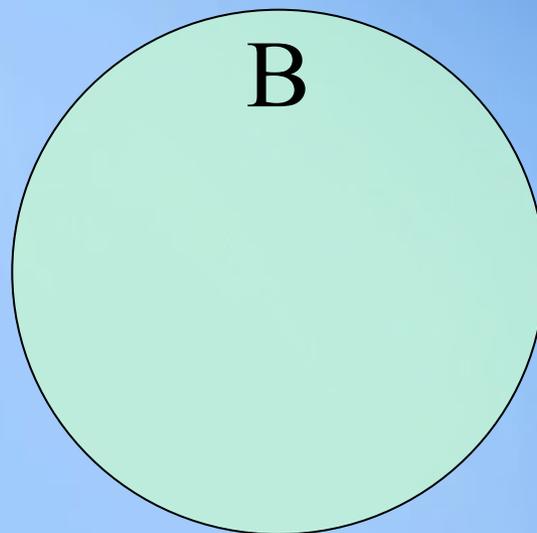


B – живое существо

3. Исключение объемов.

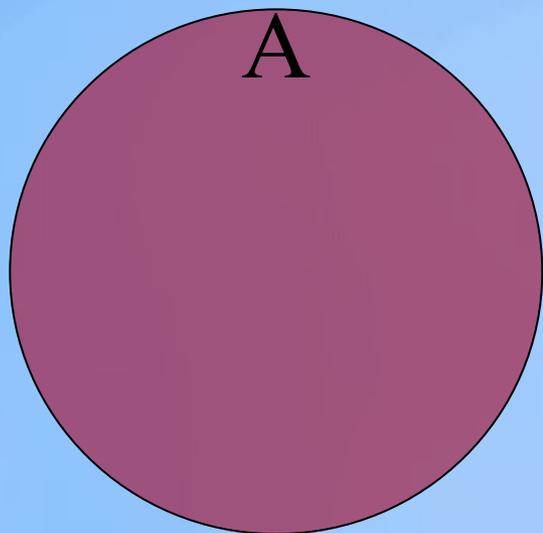


A – стол

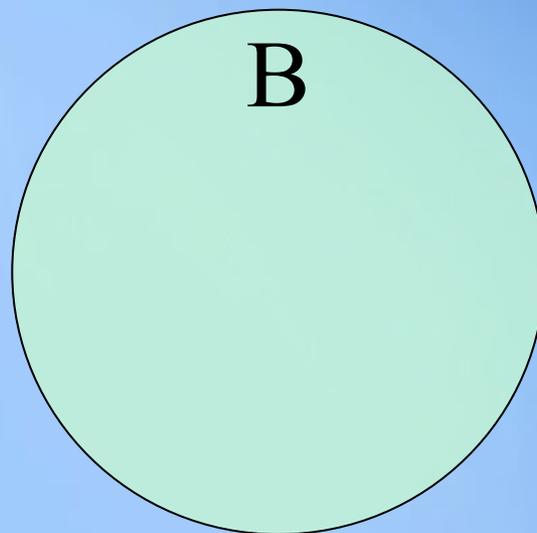


B – дружба

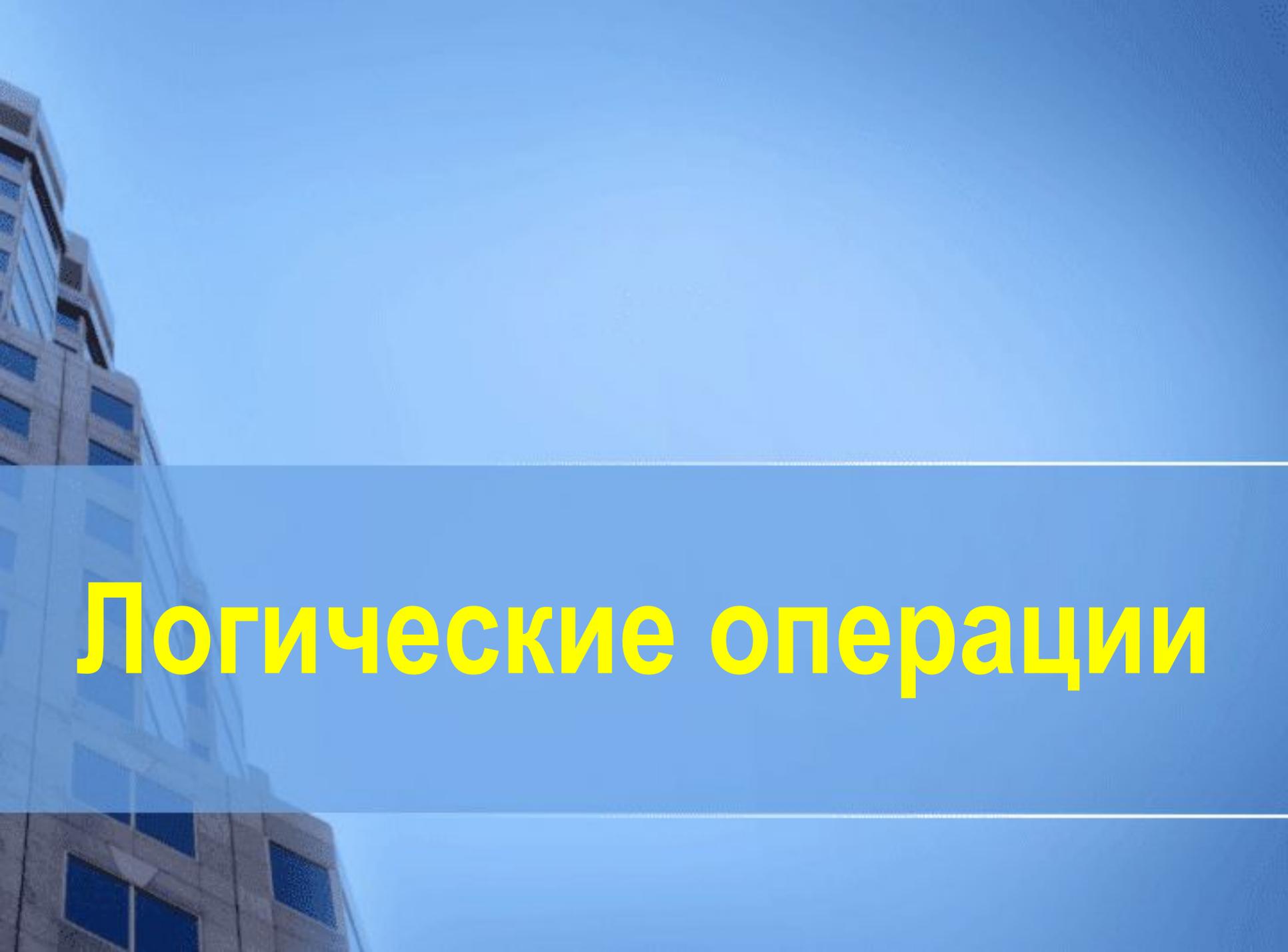
4. Пересечение или частичное совпадение объемов.



А – школьник



В – отличник



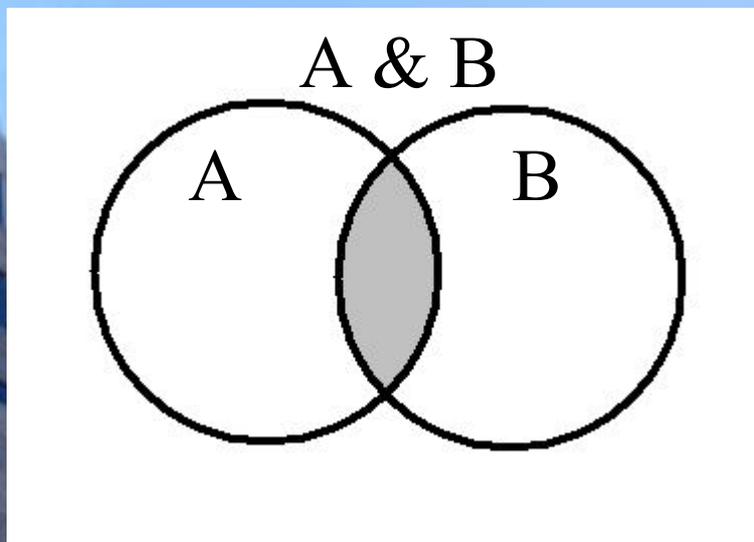
Логические операции

КОНЪЮНКЦИЯ

Логическое умножение

Обозначение: И, & , \wedge

Таблица истинности:



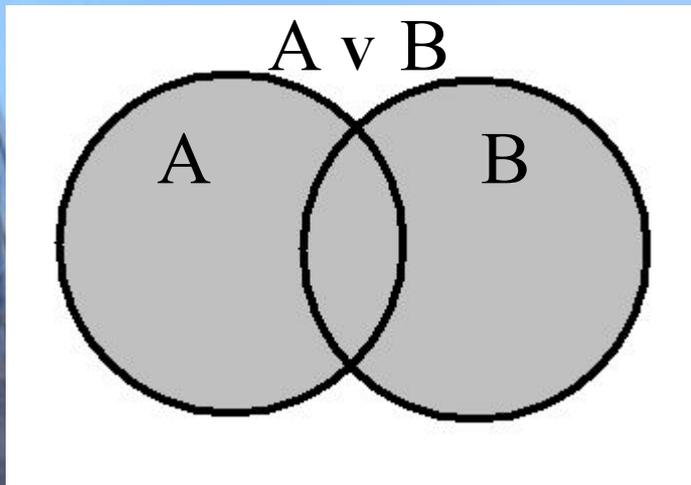
A	B	A & B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дизъюнкция

Логическое сложение

Обозначение: ИЛИ, \vee , +

Таблица истинности



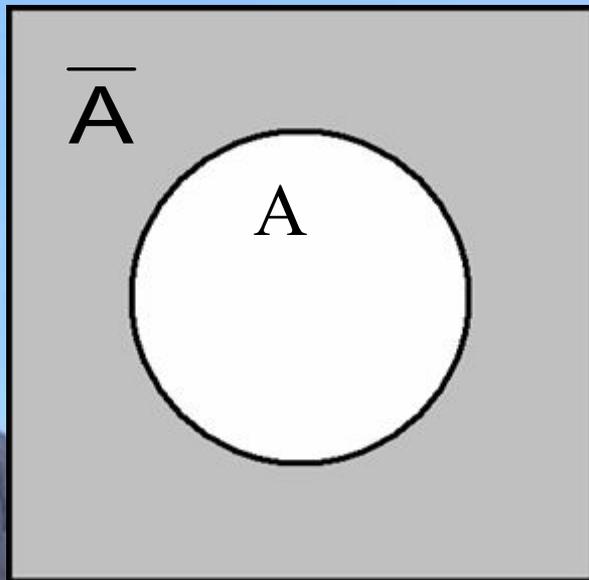
A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Инверсия

Логическое отрицание

Обозначение: НЕ, \neg , -

Таблица истинности



A	$\neg A$
0	1
1	0

Постройте отрицания приведенных ниже высказываний:

Вася купил мороженое.

(Вася не купил мороженое.)

Существует шестое чувство.

(Не существует шестого чувства.)

На улице идет дождь.

Сегодня рабочий день.

Денис сегодня был готов к уроку.

В школу привезли новые компьютеры.

Являются ли отрицанием
следующие высказывания:

1. Он – мой друг. Он – мой враг.
2. Большой дом. Небольшой дом.
3. Большой дом. Маленький дом.
4. $X < 2$. $X > 2$.

Логическая операция ИМПЛИКАЦИЯ (логическое следование):

- в естественном языке соответствует обороту **если ..., то ...**;
- обозначение \rightarrow .

Импликация - это логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда условие (первое высказывание) истинно, а следствие (второе высказывание) ложно.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Логическая операция ЭКВИВАЛЕНЦИЯ (равнозначность):

- в естественном языке соответствует оборотам речи **тогда и только тогда; в том и только в том случае;**
- обозначения \Leftrightarrow , \sim .

Эквиваленция – это логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания одновременно истинны или одновременно ложны.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Порядок выполнения логических операций:

1. Операции **в скобках**
2. Инверсия – **НЕ**
3. Конъюнкция – **И**
4. Дизъюнкция – **ИЛИ**
5. Импликация – **ЕСЛИ..., ТО**
6. Эквивалентность – **ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА**

Логические операции

НЕ, \neg , $\bar{\quad}$	Инверсия, логическое отрицание
И, \wedge , and, &, *, \cdot	Конъюнкция, логическое умножение
ИЛИ, \vee , or, +	Дизъюнкция, логическое сложение
\rightarrow	Импликация, логическое следование
=, \leftrightarrow	Эквивалентность, логическое равенство



ИСТИНА – 1

ЛОЖЬ - 0

Таблица истинности определяет значение сложного высказывания при всех возможных значениях простых высказываний

Каждое составное высказывание можно выразить в виде формулы (логического выражения), в которую войдут логические переменные, обозначающие высказывания, и знаки логических операций, обозначающие логические функции.



Инверсия - логическое отрицание



Логическое отрицание делает истинное высказывание ложным и, наоборот, ложное – истинным.

*От лат. **inversio** -
переворачиваю*

Таблица истинности функции
логического отрицания

A	$F=A$
0	1
1	0

ИСТИНА – 1

ЛОЖЬ - 0

*В переводе на естественный язык
«**Не А**»
«**Неверно, что А**»*

Пример: Даны высказывания

А – «Число 10 – четное» = **ИСТИНА**

В – «Число 10 – отрицательное» = **ЛОЖЬ**

С – «Луна – спутник Земли» = **ИСТИНА**

Не А – «Неверно, что число 10 – четное» = **ЛОЖЬ**

Не В – «Неверно, что число 10 – отрицательное» =
ИСТИНА

Не С – «Неверно, что Луна – спутник Земли» =
ЛОЖЬ

Конъюнкция - логическое умножение



Результат логического умножения является истинным тогда и только тогда, когда истинны все входящие в него простые высказывания.

От лат. conjunctio - связываю

Таблица истинности функции логического умножения

A	B	F=A*B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

В переводе на естественный язык

«и A, и B» «как A, так и B»
«A вместе с B» «A несмотря на B»
«A, в то время как B»

Пример: Даны высказывания

A – «Число 10 – четное» = **ИСТИНА**

B – «Число 10 – отрицательное» = **ЛОЖЬ**

C – «Число 10 кратно 2» = **ИСТИНА**

A и B – «Число 10 – четное и отрицательное» - **ЛОЖЬ**

A и C – «Число 10 как четное, так и кратно 2» - **ИСТИНА**

И, \wedge , and, &, *, ·



Дизъюнкция - логическое сложение



Результат логического сложения является истинным тогда, когда истинно хотя бы одно из входящих в него простых высказываний.

От лат. disjunctio – различаю

Таблица истинности функции логического сложения

A	B	F=A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

**В переводе на естественный язык
«А или В»**

Пример: Даны высказывания

A – «Число 10 – четное» = **ИСТИНА**

B – «Число 10 – отрицательное» = **ЛОЖЬ**

C – «Число 10 - простое» = **ЛОЖЬ**

A или B – «Число 10 – четное или отрицательное» - **ИСТИНА**

A или C – «Число 10 четное или простое» - **ИСТИНА**

B или C – «Число 10 отрицательное или простое» - **ЛОЖЬ**

ИЛИ, \vee , or, +



Импликация - логическое следование



Результат логического следования является ложным тогда и только тогда, когда из истины следует ложь.

От лат. implicatio – тесно связывать

Таблица истинности функции логического следования

A	B	$F=A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A – условие, B - следствие

В переводе на естественный язык
«если A, то B» **«B, если A»**
«Когда A, тогда B»
«A достаточно для B»
«A только тогда, когда B»

Пример: Даны высказывания

A – «Число 10 – четное» = **ИСТИНА**

B – «Число 10 – отрицательное» = **ЛОЖЬ**

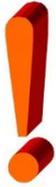
C – «Число 10 - простое» = **ЛОЖЬ**

A \rightarrow **B** – «Если число 10 – четное, то оно - отрицательное» - **ЛОЖЬ**

A \rightarrow **C** – «Число 10 простое, если четное» - **ЛОЖЬ**
«Если число делится на 10, то оно делится на 5»
ИСТИНА



Эквивалентность - логическое равенство



Результат логического равенства является истинным тогда и только тогда, когда оба высказывания одновременно либо истинны, либо ложны.

*От лат. aequivalens
– равноценное*

Таблица истинности функции логического равенства

A	B	$F=A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

В переводе на естественный язык
«A эквивалентно B»
«A тогда и только тогда, когда B»

Пример: Даны высказывания

A – «Число 10 – четное» = **ИСТИНА**

B – «Число 10 – отрицательное» = **ЛОЖЬ**

C – «Число 10 - простое» = **ЛОЖЬ**

A \leftrightarrow **B** – «Число 10 – четное, тогда и только тогда, когда оно - отрицательное» - **ЛОЖЬ**

B \leftrightarrow **C** – «Число 10 такое же простое, как и отрицательное» **ИСТИНА**

=,



Значение логической функции определяется с помощью таблиц истинности

умножения:

A	B	$F=A \& B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

сложения:

A	B	$F=A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

отрицания:

A	$F=\bar{A}$
0	1
1	0

импликации:

A	B	$F=A \supset B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

эквивалентности:

A	B	$F=A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1