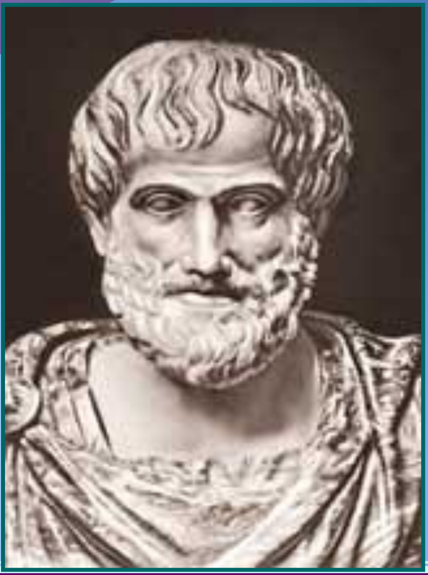
Алгебра высказываний

«*Память становится мыслящей*»

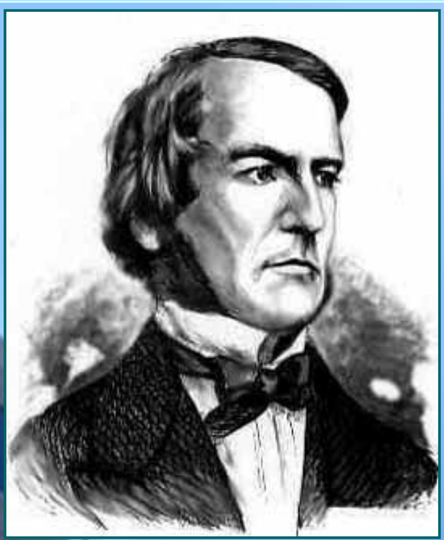
(Д.Б.Эльконин)

мы мышления и история развития
бры логики

История логики насчитывает около двух с половиной тысячелетий. Первые учения о формах и способах мышления возникли в Древнем Китае и Индии. Основоположником формальной логики является **Аристотель** (384-322 гг. до н.э.) – древнегреческий философ, который впервые отделил логические формы мышления от его содержания.



Алгебра логики – наука об операциях, аналогичных математическим, над высказываниями или над объектами, которые могут принимать только два значения – «ИСТИНА» или «ЛОЖЬ».



В 1842 году английский математик **Джорж Буль** разработал *математическую логику* или *алгебру логики*, которую впоследствии стали называть *«булевой алгеброй».*

Спустя 100 лет алгебра логики стала основой теории цифровых вычислительных машин, ее используют в компьютерной логике, электронике, в основе всех микропроцессорных операций.

Формы мышления и история развития алгебры логики

Готфрид Вильгельм Лейбниц

Многие философы и математики развивали отдельные положения логики и иногда даже намечали контуры современного исчисления высказываний, но ближе всех к созданию математической логики подошел уже во второй половине XVII века выдающийся немецкий ученый **Готфрид Вильгельм Лейбниц** (1646— 1716), указавший пути для перевода логики “из словесного царства, полного неопределенностей, в царство математики, где отношения между объектами или высказываниями определяются совершенно точно”. Лейбниц надеялся даже, что в будущем философы, вместо того чтобы бесплодно спорить, станут брать бумагу и вычислять, кто из них прав. При этом в своих работах Лейбниц затрагивал и двоичную систему счисления.

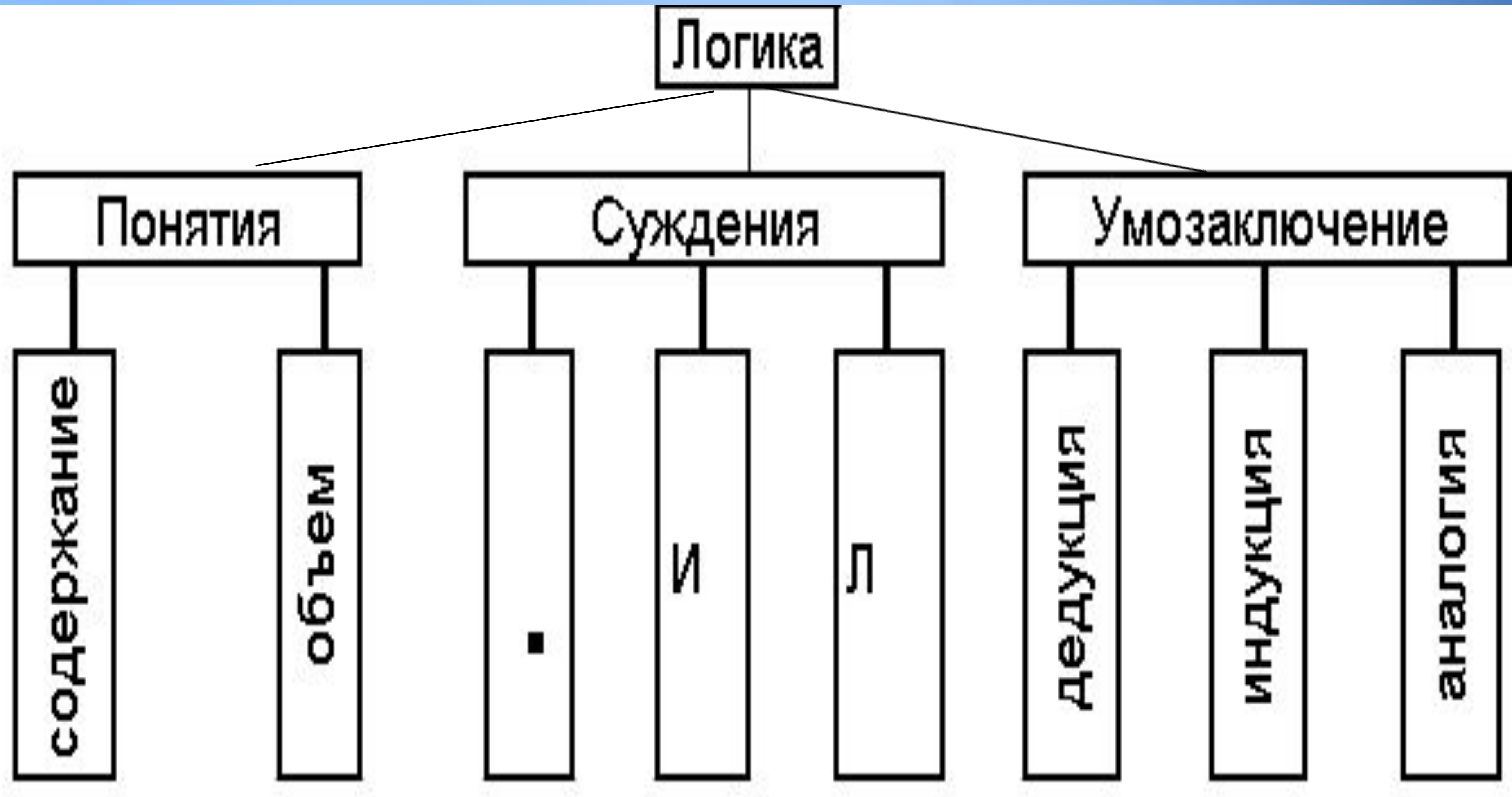
Уже в XIX веке стало понятно, что система Буля хорошо подходит для описания электрических переключательных схем. Ток в цепи может либо протекать, либо отсутствовать, подобно тому, как утверждение может быть либо истинным, либо ложным. А еще несколько десятилетий спустя, уже в XX столетии, ученые объединили созданный Джорджем Булем математический аппарат с двоичной системой счисления, заложив тем самым основы для разработки цифрового электронного компьютера.

- Логика, как наука развивается с IV в. до н. э. начиная с трудов Аристотеля. Именно он подверг анализу человеческое мышление, такие его формы, как *понятие, суждение, умозаключение.*

- **Логика** (от греч. “логос”, означающего “слово” и “смысл”) – **наука о законах, формах и операциях правильного мышления.**

- Ее основная задача заключается в нахождении и систематизации правильных способов рассуждения.

Основные формы абстрактного



Понятие – это форма мышления, в которой отражаются существенные признаки отдельного предмета или класса однородных предметов. Всякое понятие имеет содержание и объем

- Например, понятие “Черное море” – отражает единичный предмет, “Сиамская кошка” – отражает класс сиамских кошек.

Содержание понятия – совокупность существенных признаков множества, отраженных в этом понятии.

- Например, понятие “квадрат” – прямоугольник, который имеет равные стороны.

Объем понятия – множество предметов, которые мыслятся в понятии.

- Например, под объемом понятия “лев” подразумевается множество всех львов, которые существовали, существуют и будут существовать.

__Высказывание (суждение)__ – повествовательное предложение, о котором можно сказать истинно оно или ложно.

Бывают простые и сложные *(объединяют несколько простых).*

Высказывания		
Общие	**Частные**	**Единичные**
__Начинаются со слов:__ **все, всякий, каждый, ни один, любой…**	*__Начинаются со слов:__* **некоторые, большинство, многие…**	Например, А – первая буква алфавита.

Примеры высказываний

Истинное высказывание: «Буква «А» - гласная».

Ложное высказывание: «Компьютер был изобретен в середине XIX века».

Какие из предложений являются высказываниями?
Какие из высказываний истинные?

1. Какой длины эта лента? *Не высказывание*
2. Прослушайте сообщение. *Не высказывание*
3. Делайте утреннюю зарядку! *Не высказывание*
4. Назовите устройства ввода информации. *Не высказывание*
5. Кто отсутствует? *Не высказывание*
6. Париж – столица Англии. *Ложное высказывание*
7. Число 11 является простым. *Истинное высказывание*
8. 4+5=10 *Ложное высказывание*
9. Без труда не вытащишь и рыбку из пруда. *Истинное высказывание*
10. Сложите числа 2 и 5. *Не высказывание*
11. Некоторые медведи живут на Севере. *Истинное высказывание*
12. Все медведи – бурые. *Ложное высказывание*
13. Чему равно расстояние от Москвы до Ленинграда? *Не высказывание*
14. Сумма углов треугольника – 180 градусов. *Истинное высказывание*

№1. Какие предложения являются высказываниями?

1. Москва – столица РФ.
2. Алуштинский дворец (Ласточкино гнездо) находится в Крыму.
3. 5 – 9 + 8.
4. 5 – 9 + 8 = 4.
5. На юге Африки живут пингвины.

№2. Определите, какие из следующих предложений являются высказываниями, а какие нет. Какие из высказываний истинные, а какие нет?

1. Учить второй иностранный язык легче, чем первый.
2. Обязательно займись каким-либо видом спорта.
3. Переводчик должен знать хотя бы два языка.
4. Ты играешь в хоккей?
5. Отними от неизвестного числа 5 – и получишь 2.
6. К концу 11 класса хорошо выучу русский язык.

Умозаключение ***– это такая форма мышления посредством которой из одного или нескольких суждений с необходимостью выводится новое заключение о предметах реального мира.***

Умозаключения бывают:

Дедуктивные (от общего к частному) – Все ученики ходят в школу. Вася – ученик. Вася ходит в школу.

Индуктивные (от частного к общему) – Банан и персик – сладкие. Значит, все фрукты сладкие на вкус.

Аналогия – Наши коровы едят траву и дают молоко. В Австралии есть поля, коровы едят эту траву. Следовательно, австралийские коровы тоже дают молоко.

1. ВСЕ АНТИЛОПЫ СТРОЙНЫЕ.

2. СТРОЙНЫЕ ЖИВОТНЫЕ РАДУЮТ ГЛАЗ.

ВСЕ ________________ РАДУЮТ ГЛАЗ.

1. ВСЕ АНТИЛОПЫ СТРОЙНЫЕ.
2. СТРОЙНЫЕ ЖИВОТНЫЕ РАДУЮТ ГЛАЗ.

ВСЕ _АНТИЛОПЫ_ РАДУЮТ ГЛАЗ.

- *Логические величины – это понятия выражаемые словами Истина или Ложь.*
- *Логическая переменная – это символически выраженная логическая величина.*
- *Логическое выражение – это простое или сложное высказывание о котором можно сказать Истинно оно или Ложно.*

Формы мышления

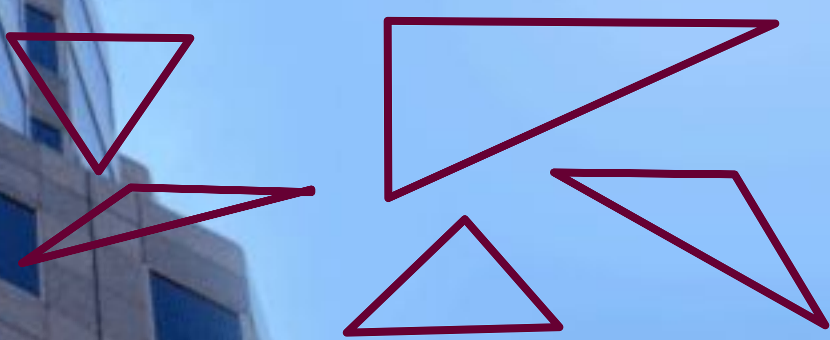
Понятие

Содержание

это все существенные признаки, отраженные в этом понятии

Например:

ТРЕУГОЛЬНИК



Объем

множество предметов, определяемых этим понятием

ВСЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ ВСЕХ ВИДОВ И РАЗМЕРОВ

Объем уменьшается

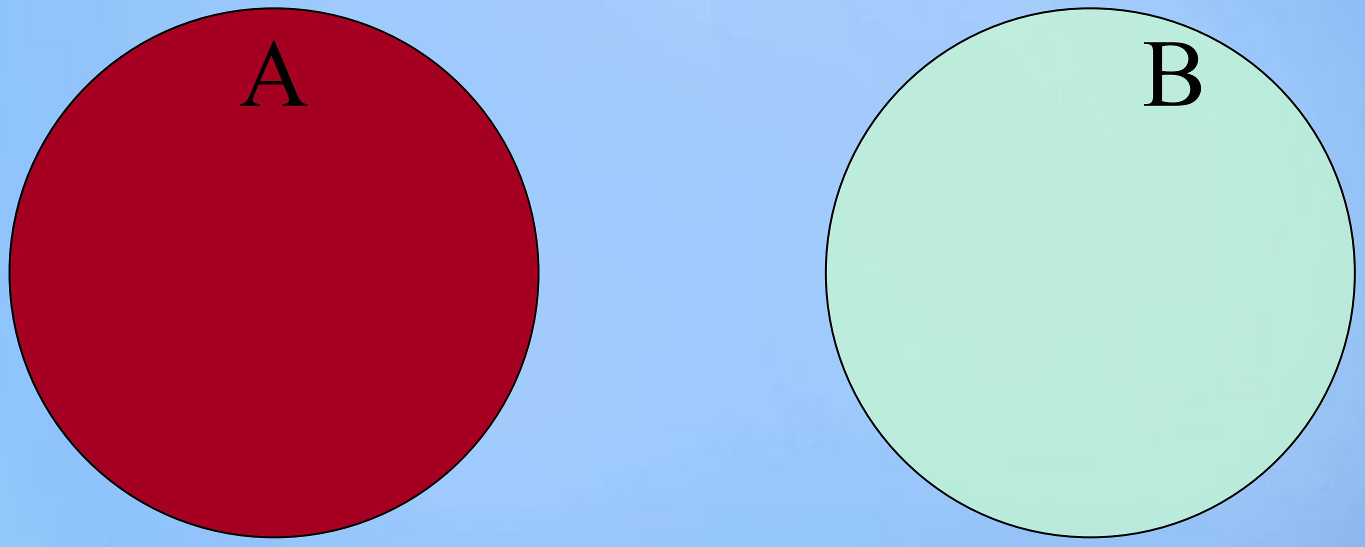
Объем растет

Содержание растет

Круги Эйлера

Отношения между понятиями по объему:

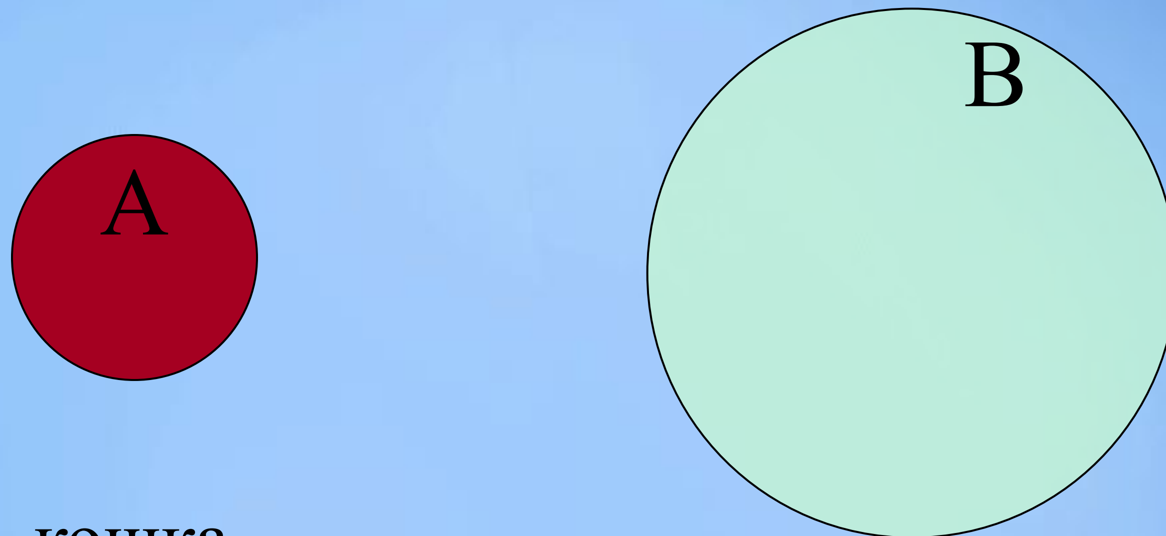
1. Тождество или совпадение объемов.



A – столица России

B – город Москва

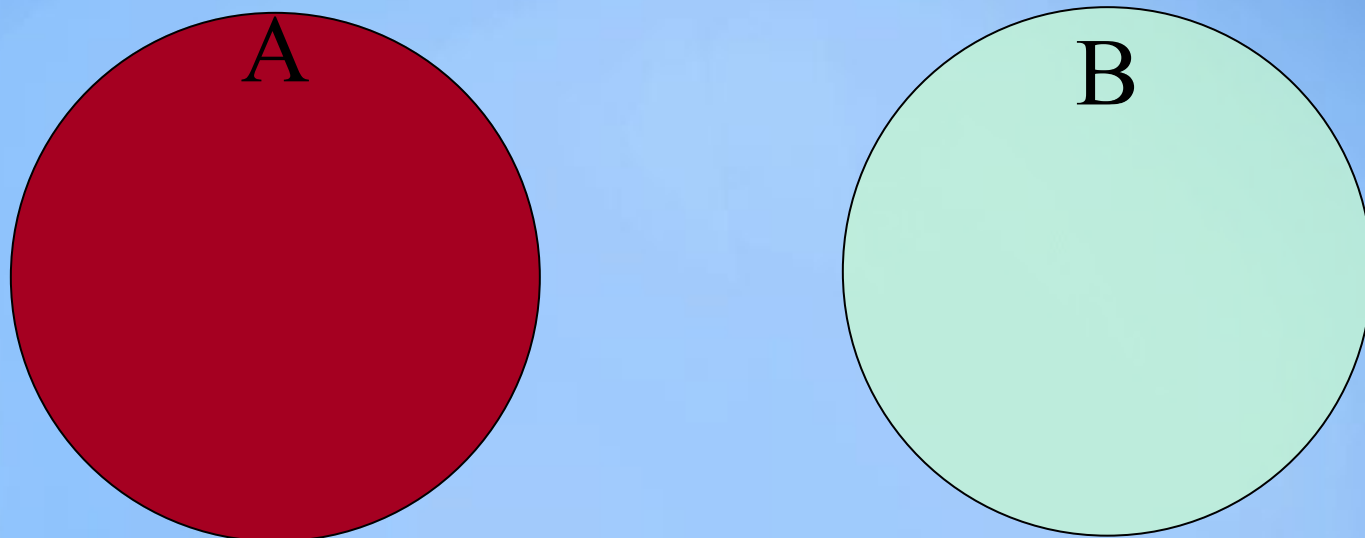
2. Подчинение или включение объемов.



A – кошка

B – живое существо

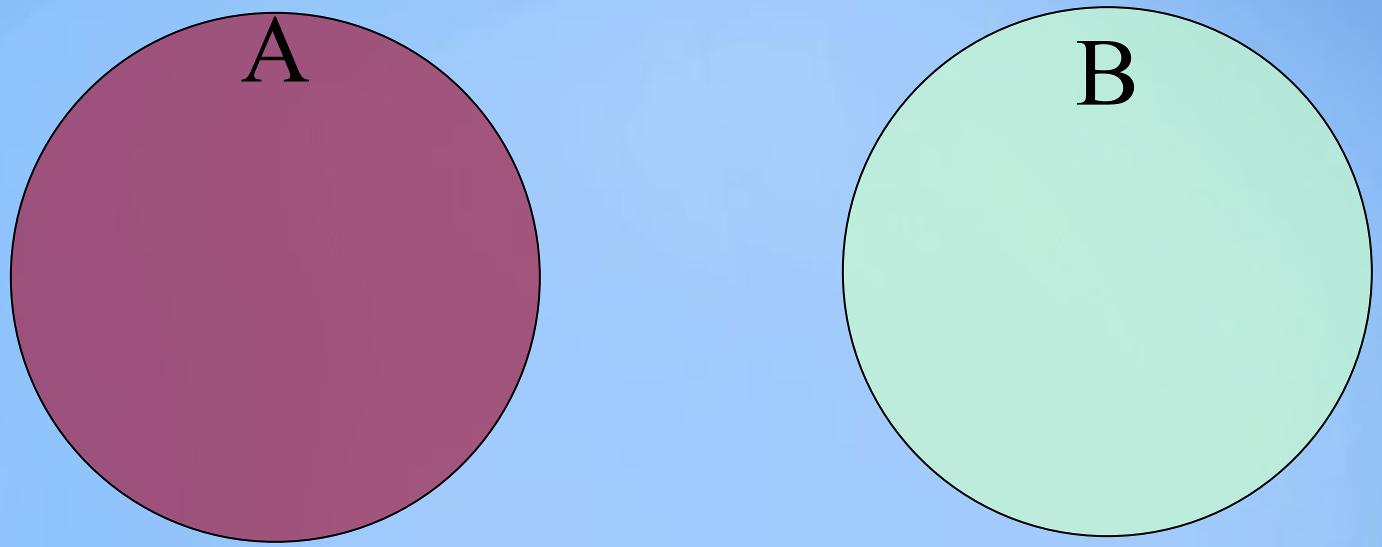
3. Исключение объемов.



А – стол

В – дружба

4. Пересечение или частичное совпадение объемов.



А – школьник

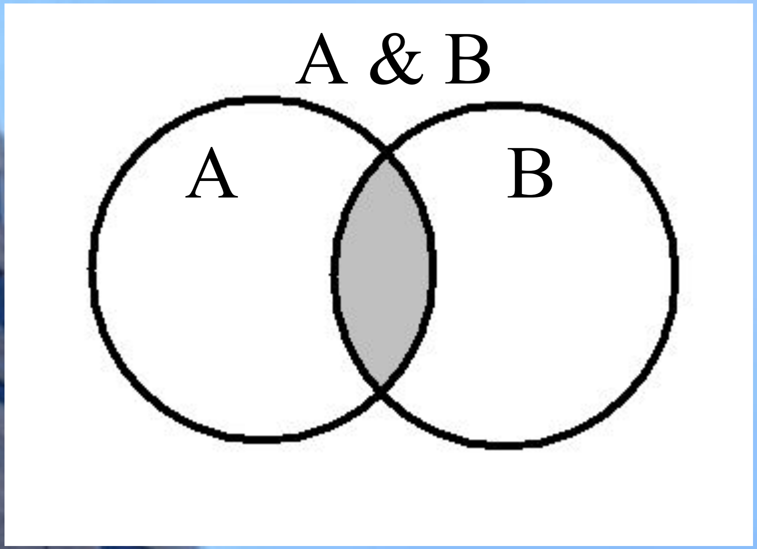
В – отличник

Логические операции

Конъюнкция
Логическое умножение

Обозначение: **И, & , $\wedge$**

Таблица истинности:



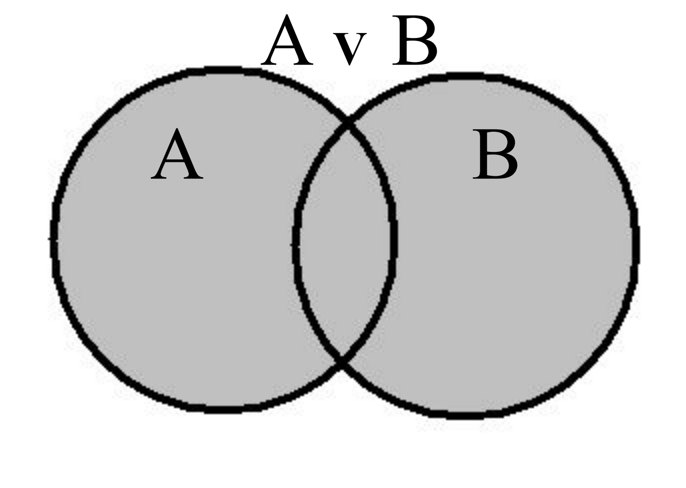
A	B	A & B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дизъюнкция

Логическое сложение

Обозначение: **ИЛИ, V ,+**

Таблица истинности



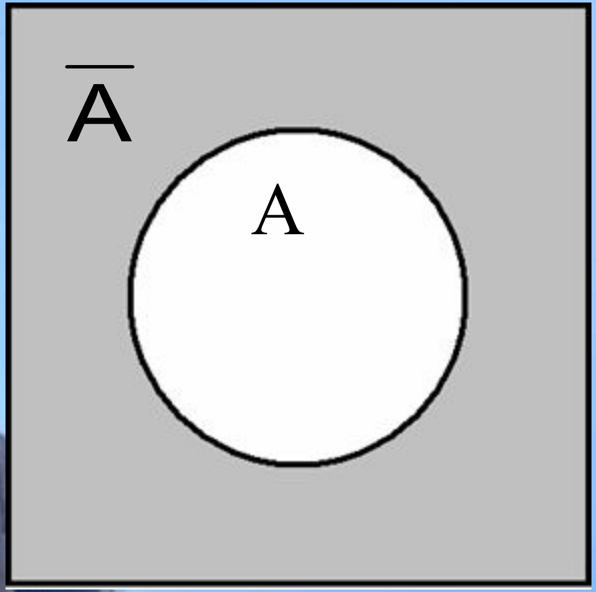
A	B	A **V** B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Инверсия
Логическое отрицание

Обозначение: **НЕ, ┐ , ‾**

Таблица истинности

A	┐A
0	1
1	0



Постройте отрицания приведенных ниже высказываний:

Вася купил мороженое.

(Вася не купил мороженое.)

Существует шестое чувство.

(Не существует шестого чувства.)

На улице идет дождь.

Сегодня рабочий день.

Денис сегодня был готов к уроку.

В школу привезли новые компьютеры.

Являются ли отрицанием следующие высказывания:

1. Он – мой друг. Он – мой враг.
2. Большой дом. Небольшой дом.
3. Большой дом. Маленький дом.
4. $X < 2$. $X > 2$.

Логическая операция ИМПЛИКАЦИЯ (логическое следование):

- в естественном языке соответствует обороту **если ..., то ...**;
- обозначение → .

Импликация - это логическая операция, ставящая в соответствие каждым двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда условие (первое высказывание) истинно, а следствие (второе высказывание) ложно.

A	B	A ⇒ B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Логическая операция ЭКВИВАЛЕНЦИЯ (равнозначность):

- в естественном языке соответствует оборотам речи **тогда и только тогда; в том и только в том случае**;
- обозначения $\Leftrightarrow$, **~** .

Эквиваленция – это логическая операция, ставящая в соответствие каждым двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания одновременно истинны или одновременно ложны.

A	B	A $\Leftrightarrow$ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Порядок выполнения логических операций:

1. Операции в скобках
2. Инверсия – не
3. Конъюнкция – и
4. Дизъюнкция – или
5. Импликация – если..., то
6. Эквивалентность – тогда и только тогда, когда

Логические операции

НЕ, $\overline{\ \ }$, $\neg$	**Инверсия**, **логическое отрицание**
И, $\wedge$, and, &, *, ·	**Конъюнкция**, **логическое умножение**
ИЛИ, $\vee$, or, +	**Дизъюнкция**, **логическое сложение**
$\rightarrow$	**Импликация**, **логическое следование**
=, $\leftrightarrow$	**Эквивалентность**, **логическое равенство**

ИСТИНА – 1

ЛОЖЬ - 0

Таблица истинности определяет значение сложного высказывания при всех возможных значениях простых высказываний

Каждое составное высказывание можно выразить в виде формулы (логического выражения), в которую войдут логические переменные, обозначающие высказывания, и знаки логических операций, обозначающие логические функции.

Инверсия - логическое отрицание

Логическое отрицание делает истинное высказывание ложным и, наоборот, ложное – истинным.

От лат. inversio - переворачиваю

В переводе на естественный язык
«Не А»
«Неверно, что А»

Таблица истинности функции логического отрицания

A	$F=\bar{A}$
0	1
1	0

ИСТИНА – 1

ЛОЖЬ - 0

Пример: Даны высказывания

А – «Число 10 – четное» = ИСТИНА

В – «Число 10 – отрицательное» = ЛОЖЬ

С – «Луна – спутник Земли» = ИСТИНА

Не А – «Неверно, что число 10 – четное» = ЛОЖЬ

Не В – «Неверно, что число 10 – отрицательное» = ИСТИНА

Не С – «Неверно, что Луна – спутник Земли» = ЛОЖЬ

Конъюнкция - логическое умножение

езультат логического умножения является истинным огда и только тогда, когда истинны все входящие в его простые высказывания.

От лат. conjunctio - связываю

Таблица истинности функции логического умножения

A	B	F=A*B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

И , ⋀ , and, &, *, ·

В переводе на естественный язык

«и А, и В» ***«как А, так и В»***

«А вместе с В» ***«А несмотря на В»***

«А, в то время как В»

Пример: Даны высказывания

А – «Число 10 – четное» = ИСТИНА

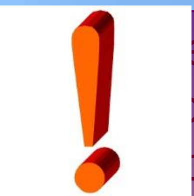
В – «Число 10 – отрицательное» = ЛОЖЬ

С – «Число 10 кратно 2» = ИСТИНА

А и В – «Число 10 – четное и отрицательное» - ЛОЖЬ

А и С – «Число 10 как четное, так и кратно 2» - ИСТИНА

Дизъюнкция - логическое сложение



езультат логического сложения является истинным
огда, когда истинно хотя бы одно из входящих в него
ростых высказываний.

От лат. disjunctio – различаю

Таблица истинности функции логического сложения

A	B	F=A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

В переводе на естественный язык «А или В»

Пример: Даны высказывания

А – «Число 10 – четное» = ИСТИНА

В – «Число 10 – отрицательное» = ЛОЖЬ

С – «Число 10 - простое» = ЛОЖЬ

А или В – «Число 10 – четное или отрицательное» - ИСТИНА

А или С – «Число 10 четное или простое» - ИСТИНА

В или С – «Число 10 отрицательное или простое» - ЛОЖЬ

ИЛИ, $\vee$, or, +

Импликация - логическое следование

езультат логического следования является ложным огда и только тогда, когда из истины следует ложь.

От лат. implicatio – тесно связывать

Таблица истинности функции логического следования

A	B	$F = A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

А – условие, В - следствие

В переводе на естественный язык

«если А, то В» ***«В, если А»***

«Когда А, тогда В»

«А достаточно для В»

«А только тогда, когда В»

Пример: Даны высказывания

А – «Число 10 – четное» = ИСТИНА

В – «Число 10 – отрицательное» = ЛОЖЬ

С – «Число 10 - простое» = ЛОЖЬ

А $\rightarrow$ **В** – «Если число 10 – четное, то оно - отрицательное» - ЛОЖЬ

А $\rightarrow$ **С** – «Число 10 простое, если четное» - ЛОЖЬ

«Если число делится на 10, то оно делится на 5» ИСТИНА

Эквивалентность - логическое равенство

езультат логического равенства является истинным
огда и только тогда, когда оба высказывания
дновременно либо истинны, либо ложны.

От лат. aeguivalens – равноценное

Таблица истинности функции логического равенства

A	B	F=A ↔ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

=, ↔

В переводе на естественный язык
«А эквивалентно В»
«А тогда и только тогда, когда В»

Пример: Даны высказывания

А – «Число 10 – четное» = ИСТИНА

В – «Число 10 – отрицательное» = ЛОЖЬ

С – «Число 10 - простое» = ЛОЖЬ

А ↔ В – «Число 10 – четное, тогда и только тогда, когда оно - отрицательное» - ЛОЖЬ

В ↔ С – «Число 10 такое же простое, как и отрицательное» ИСТИНА

Значение логической функции определяется с помощью таблиц истинности

умножения:

A	B	F=A&B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

сложения:

A	B	F=A v B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

отрицания:

A	F=$\overline{A}$
0	1
1	0

импликации :

A	B	F=A→B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

эквивалентности:

A	B	F=A↔B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1