Виды неопределенностей и методы их разрешения.

Существует несколько видов неопределенностей

$$\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [0\cdot\infty], \left[1^{\infty}\right], [\infty-\infty], \left[\infty^{0}\right], \left[0^{0}\right].$$

Неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ (бесконечность деленная на бесконечность).

Выражение под знаком предела представляет собой частное многочленов любой степени.

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

Для раскрытия такого вида неопределенности необходимо:

1. разделить все слагаемые числителя и знаменателя на переменную ***x*** в старшей степени;
2. рассмотреть предел каждого слагаемого.

При раскрытии неопределенности такого вида возможны три случая:

а). Степень многочлена числителя равна степени многочлена знаменателя.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+10x-8}{x^2+5x+4}. =\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{10x}{x^2}-\frac{8}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{10}{x}-\frac{8}{x^2}}{1+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}=3$$

На основании теоремы о пределе частного, суммы (разности) рассмотрим предел каждого слагаемого

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10}{x}=0;\quad \lim_{x\to\infty}\frac{8}{x^2}=0;\quad \lim_{x\to\infty}\frac{5}{x}=0;\quad \lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=0.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x-1}{3x^3+x^2+5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{3+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}=\frac{2+0-0}{3+0+0}=\frac{2}{3};$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^4+5x^2-1}{6x^4+5x^3+8}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{7+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^4}}{6+\frac{5}{x}+\frac{8}{x^4}}=\frac{7+0-0}{6+0+0}=\frac{7}{6};$$

б). Степень многочлена числителя больше степени многочлена знаменателя

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+7}{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{7}{x^2}}{\frac{2x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}=\left[\frac{3}{0}\right]=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5+6x^3-11x^2+5}{3x^4+x^2+8x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^5}{x^5}+\frac{6x^3}{x^5}-\frac{11x^2}{x^5}+\frac{5}{x^5}}{\frac{3x^4}{x^5}+\frac{x^2}{x^5}+\frac{8x}{x^5}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{6}{x^2}-\frac{11}{x^3}+\frac{5}{x^5}}{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{8}{x^4}}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty$$

в). Степень многочлена числителя меньше степени многочлена знаменателя

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+4x^3+x^2}{4x^6-5x^5+3x^4+x+4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^4}{x^6}+\frac{4x^3}{x^6}+\frac{x^2}{x^6}}{\frac{4x^6}{x^6}-\frac{5x^5}{x^6}+\frac{3x^4}{x^6}+\frac{x}{x^6}+\frac{4}{x^6}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x^4}}{4-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^5}+\frac{4}{x^6}}=\frac{0}{4}=0$$

Предел отношения двух многочленов при $x \to \infty$ равен

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} 0 & при\ n < m \\ \dfrac{a_1}{a_2} & при\ n = m \\ \infty & при\ n > m \end{cases}$$

1. если степень многочлена числителя меньше степени многочлена знаменателя, по предел равен нулю.

2. если степень многочлена числителя равна степени многочлена знаменателя, то предел равен отношению коэффициентов при старшей степени переменной;

3. если степень многочлена числителя больше степени многочлена знаменателя, по предел равен бесконечности;

2. Неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Метод раскрытия неопределенности такого вида зависит от выражения стоящего под знаком предела, как правило выделяют два частных случая:

а). выражение стоящее под знаком предела является рациональной функцией:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-8}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

Для решения задачи необходимо воспользоваться формулами сокращенного умножения:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b) \quad a^3 \mp b^3=(a-b)\left(a^2 \pm ab+b^2\right).$$

Разложим числитель и знаменатель на множители:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-8}=\left[\frac{0}{0}\right] \quad =\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}\left(x^2+2x+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x^2+2x+4}=\frac{2+2}{2^2+2\cdot 2+4}=\frac{1}{3}.$$

Если числитель и знаменатель дробно-рациональной функции являются многочленами второй степени, то для раскрытия неопределенности необходимо разложить и числитель и знаменатель на множители:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}=\left[\frac{0}{0}\right]; \qquad ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$$

Для решения задачи необходимо

1. Определить корни числителя и знаменателя

$$D = b^2 - 4ac \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \qquad x_1 = -1 \qquad x_2 = 5$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \qquad x_1 = -1 \qquad x_2 = 3$$

2. Разложить многочлен на множители

$$x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x-5) \qquad x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 2x - 3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x-5)}{\cancel{(x+1)}(x-3)} = \lim_{x\to -1} \frac{x-5}{x-3} = \frac{3}{2}.$$

Рассмотрим пример: $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{3x^2 + 10x - 8}{x^2 + 5x + 4} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$

Вычислим корни многочлена числителя и знаменателя, разложим числитель и знаменатель на множители:

$$3x^2 + 10x - 8 = 0; \qquad x_1 = -4; \quad x_2 = \frac{2}{3}.$$

$$x^2 + 5x + 4 = 0; \qquad x_1 = -4; \quad x_2 = -1.$$

$$\lim_{x \to -4} \frac{3x^2 + 10x - 8}{x^2 + 5x + 4} = \lim_{x \to -4} \frac{3(x+4)(x - \frac{2}{3})}{(x+4)(x+1)} = \lim_{x \to -4} \frac{3(x - \frac{2}{3})}{(x+1)} =$$

$$= \lim_{x \to -4} \frac{3x - 2}{(x+1)} = \frac{3(-4) - 2}{-4 + 1} = \frac{14}{3}$$

б). выражение стоящее под знаком предела, содержит дробно-иррациональную функцию

В этом случае для раскрытия неопределенности умножают и числитель и знаменатель на выражение сопряженное к иррациональному выражению и используют формулу сокращенного умножения

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2.$$

Например, знаменатель дроби является иррациональным выражением

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+2}-\sqrt{8-x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+2}+\sqrt{8-x})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{8-x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{8-x})}=$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+2}+\sqrt{8-x})}{(x+2)-(8-x)} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+2}+\sqrt{8-x})}{x+2-8+x} =$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+2}+\sqrt{8-x})}{2x-6} = \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(\sqrt{x+2}+\sqrt{8-x})}{2\cancel{(x-3)}} =$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{8-x}}{2} = \frac{\sqrt{3+2}+\sqrt{8-3}}{2} = \sqrt{5}$$

Рассмотрим пример, когда числитель дроби является иррациональным выражением

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}{x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+x-(2-x)}{x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2+x-2+x}{x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Пример:

$$\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

В этом случае и числитель и знаменатель содержат иррациональные выражения.

$$\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})(3+\sqrt{2x+1})}{(3-\sqrt{2x+1})(3+\sqrt{2x+1})(2+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{(9-(2x+1))(2+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{(9-2x-1)(2+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{(8-2x)(2+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{2(4-x)(2+\sqrt{x})}=$$

$$=\frac{3+\sqrt{2\cdot 4+1}}{2(2+\sqrt{4})}=\frac{3}{4}$$

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=1 \qquad \lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1. \quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1,$$

Если выражение, стоящее под знаком предела содержит тригонометрические функции, то для раскрытия неопределенности используют формулу первого замечательного предела.

Формулы, используемые при решении

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2} \qquad \sin^2 x+\cos^2 x=1$$

$$2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$$

Рассмотрим пример

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{7x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{7\cdot 2x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{7\cdot 2x}=2\cdot\frac{1}{7}=\frac{2}{7}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{5x}{2}}{2\sin^2\frac{3x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{5x}{2}}{\sin^2\frac{3x}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{5x}{2}\cdot\sin\frac{5x}{2}\cdot\frac{3x}{2}\cdot\frac{3x}{2}\cdot\frac{5x}{2}\cdot\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}\cdot\frac{5x}{2}\cdot\sin\frac{3x}{2}\cdot\sin\frac{3x}{2}\cdot\frac{3x}{2}\cdot\frac{3x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{25x^2}{4}}{\frac{9x^2}{4}}=\frac{25}{9}$$

$$\lim_{x\to 0}\sin 3x\cdot ctg\,7x=\left[0\cdot\infty\right]=\lim_{x\to 0}\sin 3x\cdot\frac{\cos 7x}{\sin 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 7x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot 3x\cdot 7x}{3x\,\sin 7x\cdot 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{7x}=\frac{3}{7}$$

$$\lim_{x\to 0}tg\,5x\cdot ctg\,6x=\left[0\cdot\infty\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\cos 5x}\cdot\frac{cos\,6x}{\sin 6x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cdot 5x\cdot 6x}{5x\,\sin 6x\cdot 6x}=\lim_{x\to 0}\frac{5}{6}=\frac{5}{6}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg\,4x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{arctg\,4x\cdot 4}{4x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{4}{x}=\left[\frac{}{0}\right]=\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 12x}{x\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[1-\cos 12x=2\sin^2 6x\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 6x}{x\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 6x\cdot\sin 6x\cdot 6x\cdot 6x}{6x\cdot 6x\cdot x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{72x}{x}=72$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{x^2\sin 5x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 3x\cos 3x}{x^2\sin 5x}=\quad\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 3x\cdot 3x\cdot 5x}{3x\sin 5x\cdot 5x\cdot x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 3x}{5x\cdot x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6}{5x^2}=\infty$$

3. Неопределенность вида $\left[1^{\infty}\right]$

Для раскрытия неопределенностей такого вида применяется второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e, \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Рассмотрим пример:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{3x+4}\right)^{x+1} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{3x}\right)^{x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{3x+4}\right)^{x+1} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{3x}\right)^{x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\infty} = \infty$$

Пример:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{3x-7}\right)^{2x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-7+7+5}{3x-7}\right)^{2x-1} =$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-7}{3x-7}+\frac{12}{3x-7}\right)^{2x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x-7}{12}}\right)^{2x-1} =$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x-7}{12}}\right)^{\frac{3x-7}{12}\cdot\frac{12}{3x-7}\cdot(2x-1)} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{12(2x-1)}{3x-7}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{24x-12}{3x-7}} = e^{8}$$

$$\textit{так как}\left[\lim_{x\to\infty}\frac{24x-12}{3x-7}=\frac{\infty}{\infty}=\frac{24}{3}=8\right]$$

Пример:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3}{2x^2+3}\right)^{\frac{2x^2-1}{3x}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3-3-3}{2x^2+3}\right)^{\frac{2x^2-1}{3x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+3}-\frac{6}{2x^2+3}\right)^{\frac{2x^2-1}{3x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-6}{2x^2+3}\right)^{\frac{2x^2-1}{3x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\cfrac{1}{\cfrac{2x^2+3}{-6}}\right)^{\frac{2x^2-1}{2x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\cfrac{1}{\cfrac{2x^2+3}{-6}}\right)^{\frac{2x^2+3}{-6}\frac{-6}{2x^2+3}\cdot\frac{2x^2-1}{3x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2(2x^2-1)}{x(2x^2+3)}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x^2-1}{2x^3+3}} = e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}} = e^{-б.м.} = 1$$

Пример

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-5}{3x^2+7}\right)^{\frac{5x^4-2}{2x}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+7-7-5}{3x^2+7}\right)^{\frac{5x^4-2}{2x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x^2+7}{-12}}\right)^{\frac{3x^2+7}{-12}\cdot\frac{-12}{3x^2+7}\cdot\frac{5x^4-2}{2x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-60x^4+24}{6x^3+14x}}=$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-10x}=e^{+\infty}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to\infty}e^{-10x}=e^{-\infty}=0\end{cases}$$

Пример:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x-7}{5x-4}\right)^{6x^2+1}=\left[1^\infty\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x-4+4-7}{5x-4}\right)^{6x^2+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x-4}{5x-4}+\frac{-3}{5x-4}\right)^{6x^2+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-3}{5x-4}\right)^{\frac{5x-4}{-3}}\right]^{\frac{-3}{5x-4}\cdot(6x^2+1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3(6x^2+1)}{5x-4}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-18x^2-3}{5x-4}}=\begin{cases}e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-18x}{5}\right)}=e^{-\infty}=0\\ e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-18x}{5}\right)}=e^{\infty}=+\infty\end{cases}$$

Пример:

$$\lim_{x\to1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to1}(1+1-x)^{\frac{2x}{1-x}}=\lim_{x\to1}(1+(1-x))^{\frac{2x}{1-x}}=$$

$$=\lim_{x\to1}\left[(1+(1-x))^{\frac{1}{1-x}}\right]^{\frac{1-x}{1}\cdot\frac{2x}{1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to1}2x}=e^{2}$$

Пример:

$$\lim_{x\to3}(7-2x)^{\frac{2}{x-3}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to3}(1+6-2x)^{\frac{2}{x-3}}=$$

$$= \lim_{x \to 3} (1 + (6 - 2x))^{\frac{2}{x-3}} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \left[(1 + (6 - 2x)^{\frac{1}{6-2x}} \right]^{\frac{6-2x}{1} \cdot \frac{2}{x-3}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 3} \frac{2(3-x)}{1} \cdot \frac{2}{x-3}} = e^{\lim\limits_{x \to 3} \frac{-4(x-3)}{x-3}} = e^{-4}$$

Пример: $$\lim_{x\to\infty}(2x+3)\left[\ln(x+2)-\ln x\right]$$

Для решения задач данного типа, необходимо преобразовать выражение стоящее под знаком предела, используя свойства логарифмической функции.

$$\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b} \qquad \ln a^k = k\ln a$$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}(2x+3)\left[\ln(x+2)-\ln x\right]=\lim_{x\to\infty}(2x+3)\ln\frac{x+2}{x}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x+3} \ln = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x+3} = \left[1^{\infty}\right] =$$

$$= \ln \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{2x+3} = \ln \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{\frac{2}{x}\cdot(2x+3)} =$$

$$= \ln e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x+6}{x}} = \ln e^{4} = 4$$

4. Неопределенность вида $\left[\infty - \infty\right]$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+4x}-3x)$$

Замечание: данный вид неопределенности возможен только при $x \to +\infty$

Выражение, стоящее под знаком предела представляет собой разность бесконечно больших величин , для раскрытия неопределенности такого вида, необходимо умножить и разделить исходное выражение на сопряженное выражение и привести к виду $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

Решение. $$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+4x}-3x)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{9x^2+4x}-3x)(\sqrt{9x^2+4x}+3x)}{(\sqrt{9x^2+4x}+3x)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+4x-9x^2}{\sqrt{9x^2+4x}+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{9x^2+4x}+3x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{9x^2}+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{3x+3x}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Задача о непрерывном начислении процентов

Первоначальный вклад в банк составил $\boldsymbol{Q_0}$ денежных единиц.

Банк выплачивает ежегодно $\boldsymbol{p}$***%*** годовых.

Определить размер вклада $\boldsymbol{Q_t}$ через $\boldsymbol{t}$ лет.

Решение.

1. ***Простые проценты*** – размер вклада ежегодно увеличивается на одну и туже величину $\frac{p}{100}Q_0$

За год $$Q_1 = Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)$$

За два года $$Q_2 = Q_0\left(1+\frac{2p}{100}\right)$$

За ***t*** лет $$Q_t = Q_0\left(1+\frac{pt}{100}\right)$$

2. ***Сложные проценты*** – размер вклада ежегодно увеличивается в одно и то же число раз равное

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)$$

Таким образом

$$Q_1 = Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right) \quad Q_2 = Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 \quad Q_t = Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$$

При начислении процентов ***n*** раз в году и ежегодном приросте ***p%*** процент начисления за $\frac{1}{n}$ - часть года составит

$$\frac{p}{n}\%$$

Размер вклада за ***t*** лет при ***nt*** начислениях составить

$$Q = \lim_{n\to\infty}\left[Q_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}\right]$$

Рассмотрим начисление процентов каждое полугодие (***n=2)***, квартал (***n=4)***, ежемесячно (***n=12),*** непрерывно ($n \to \infty$).

Размер вклада за ***t*** лет составит

$$Q_t = \lim_{n\to\infty}\left[Q_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[Q_0\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{100n}{p}}\right)^{\frac{100n}{p}}}_{=\,e}\right]^{\frac{pt}{100}} = Q_0 e^{\frac{pt}{100}}$$

Полученная формула выражает показательный (экспоненциальный) закон роста вклада (при $p>0$).

Замечание. В практических финансово-кредитных операциях непрерывно начисление применяется редко.

Этот метод применяется при анализе сложных финансовых вопросов, таких как обоснование и выбор инвестиционных решений.