

## *Виды неопределенностей и методы их разрешения.*

Существует несколько видов неопределенностей

$$\left[ \frac{0}{0} \right], \left[ \frac{\infty}{\infty} \right], [0 \cdot \infty], [1^\infty], [\infty - \infty], [\infty^0], [0^0].$$

Неопределенность вида  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$  (бесконечность деленная на бесконечность).

Выражение под знаком предела представляет собой частное многочленов любой степени.

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

Для раскрытия такого вида неопределенности необходимо:

1. разделить все слагаемые числителя и знаменателя на переменную  $x$  в старшей степени;
2. рассмотреть предел каждого слагаемого.

При раскрытии неопределенности такого вида возможны три случая:

а). Степень многочлена числителя равна степени многочлена знаменателя.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 10x - 8}{x^2 + 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{10x}{x^2} - \frac{8}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2} + \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{10}{x} - \frac{8}{x^2}}{1 + \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}} = 3$$

На основании теоремы о пределе частного, суммы (разности) рассмотрим предел каждого слагаемого

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10}{x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{x^2} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x - 1}{3x^3 + x^2 + 5} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{3 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}} = \frac{2 + 0 - 0}{3 + 0 + 0} = \frac{2}{3};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 + 5x^2 - 1}{6x^4 + 5x^3 + 8} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^4}}{6 + \frac{5}{x} + \frac{8}{x^4}} = \frac{7 + 0 - 0}{6 + 0 + 0} = \frac{7}{6};$$

б). Степень многочлена числителя больше степени  
многочлена знаменателя

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 7}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{5x}{x^2} + \frac{7}{x^2}}{\frac{2x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}}{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} = \left[ \frac{3}{0} \right] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 6x^3 - 11x^2 + 5}{3x^4 + x^2 + 8x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^5}{x^5} + \frac{6x^3}{x^5} - \frac{11x^2}{x^5} + \frac{5}{x^5}}{\frac{3x^4}{x^5} + \frac{x^2}{x^5} + \frac{8x}{x^5}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{6}{x^2} - \frac{11}{x^3} + \frac{5}{x^5}}{\frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{8}{x^4}} = \left[ \frac{1}{0} \right] = \infty$$

В). Степень многочлена числителя меньше степени  
многочлена знаменателя

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 4x^3 + x^2}{4x^6 - 5x^5 + 3x^4 + x + 4} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^4}{x^6} + \frac{4x^3}{x^6} + \frac{x^2}{x^6}}{\frac{4x^6}{x^6} - \frac{5x^5}{x^6} + \frac{3x^4}{x^6} + \frac{x}{x^6} + \frac{4}{x^6}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{4 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^5} + \frac{4}{x^6}} = \frac{0}{4} = 0$$

Предел отношения двух многочленов при  $x \rightarrow \infty$  равен

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} 0 & \text{при } n < m \\ \frac{a_1}{a_2} & \text{при } n = m \\ \infty & \text{при } n > m \end{cases}$$

1. если степень многочлена числителя меньше степени многочлена знаменателя, то предел равен нулю.
2. если степень многочлена числителя равна степени многочлена знаменателя, то предел равен отношению коэффициентов при старшей степени переменной;
3. если степень многочлена числителя больше степени многочлена знаменателя, то предел равен бесконечности;

2. Неопределенность вида  $\left[ \frac{0}{0} \right]$  .

Метод раскрытия неопределенности такого вида зависит от выражения стоящего под знаком предела, как правило выделяют два частных случая:

а). выражение стоящее под знаком предела является рациональной функцией:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} = \left[ \frac{0}{0} \right]$$

Для решения задачи необходимо воспользоваться формулами сокращенного умножения:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad a^3 \mp b^3 = (a - b)(a^2 \pm ab + b^2).$$

Разложим числитель и знаменатель на множители:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} &= \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x^2 + 2x + 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^2 + 2x + 4} = \frac{2+2}{2^2 + 2 \cdot 2 + 4} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Если числитель и знаменатель дробно-рациональной функции являются многочленами второй степени, то для раскрытия неопределенности необходимо разложить и числитель и знаменатель на множители:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 2x - 3} = \left[ \frac{0}{0} \right]; \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$



Для решения задачи необходимо

1. Определить корни числителя и знаменателя

$$D = b^2 - 4ac \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \quad x_1 = -1 \quad x_2 = 5$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad x_1 = -1 \quad x_2 = 3$$

2. Разложить многочлен на множители

$$x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5) \quad x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 2x - 3} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x-5)}{\cancel{(x+1)}(x-3)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-5}{x-3} = \frac{3}{2}.$$

Рассмотрим пример:  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{3x^2 + 10x - 8}{x^2 + 5x + 4} = \left[ \frac{0}{0} \right]$

Вычислим корни многочлена числителя и знаменателя, разложим числитель и знаменатель на множители:

$$3x^2 + 10x - 8 = 0; \quad x_1 = -4; \quad x_2 = \frac{2}{3}.$$

$$x^2 + 5x + 4 = 0; \quad x_1 = -4; \quad x_2 = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{3x^2 + 10x - 8}{x^2 + 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{3(x+4)(x-\frac{2}{3})}{(x+4)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{3(x-\frac{2}{3})}{(x+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{3x-2}{(x+1)} = \frac{3(-4)-2}{-4+1} = \frac{14}{3}$$

б). выражение стоящее под знаком предела, содержит дробно-иррациональную функцию

В этом случае для раскрытия неопределенности умножают и числитель и знаменатель на выражение сопряженное к иррациональному выражению и используют формулу сокращенного умножения

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Например, знаменатель дроби является иррациональным выражением

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{8 - x}} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(\sqrt{x + 2} + \sqrt{8 - x})}{(\sqrt{x + 2} - \sqrt{8 - x})(\sqrt{x + 2} + \sqrt{8 - x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+2} + \sqrt{8-x})}{(x+2) - (8-x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+2} + \sqrt{8-x})}{x+2-8+x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+2} + \sqrt{8-x})}{2x-6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{(x-3)}(\sqrt{x+2} + \sqrt{8-x})}{2\cancel{(x-3)}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{8-x}}{2} = \frac{\sqrt{3+2} + \sqrt{8-3}}{2} = \sqrt{5}$$

Рассмотрим пример, когда числитель дроби является иррациональным выражением

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{x} &= \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x})(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})}{x(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+x - (2-x)}{x(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+x-2+x}{x(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Пример:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x+1}} = \left[ \frac{0}{0} \right]$$

В этом случае и числитель и знаменатель содержат иррациональные выражения.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x+1}} &= \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})(3 + \sqrt{2x+1})}{(3 - \sqrt{2x+1})(3 + \sqrt{2x+1})(2 + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4 - x)(3 + \sqrt{2x+1})}{(9 - (2x+1))(2 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4 - x)(3 + \sqrt{2x+1})}{(9 - 2x - 1)(2 + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4 - x)(3 + \sqrt{2x+1})}{(8 - 2x)(2 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4 - x)(3 + \sqrt{2x+1})}{2(4 - x)(2 + \sqrt{x})} = \\ &= \frac{3 + \sqrt{2 \cdot 4 + 1}}{2(2 + \sqrt{4})} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

## Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = 1 \quad \lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1,$$

Если выражение, стоящее под знаком предела содержит тригонометрические функции, то для раскрытия неопределенности используют формулу первого замечательного предела.

Формулы, используемые при решении

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

Рассмотрим пример

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{7x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{7 \cdot 2x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{7 \cdot 2x} = 2 \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{5x}{2}}{2 \sin^2 \frac{3x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{5x}{2}}{\sin^2 \frac{3x}{2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{5x}{2} \cdot \sin \frac{5x}{2} \cdot \frac{3x}{2} \cdot \frac{3x}{2} \cdot \frac{5x}{2} \cdot \frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2} \cdot \frac{5x}{2} \cdot \sin \frac{3x}{2} \cdot \sin \frac{3x}{2} \cdot \frac{3x}{2} \cdot \frac{3x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{25x^2}{\frac{4}{9x^2}} = \frac{25}{9}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x \cdot \operatorname{ctg} 7x = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x \cdot \frac{\cos 7x}{\sin 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 7x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot 3x \cdot 7x}{3x \cdot \sin 7x \cdot 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{7x} = \frac{3}{7}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} 5x \cdot \operatorname{ctg} 6x = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\cos 5x} \cdot \frac{\cos 6x}{\sin 6x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \cdot 5x \cdot 6x}{5x \cdot \sin 6x \cdot 6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{x^2} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 4x \cdot 4}{4x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x} = \left[ \frac{-}{0} \right] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 12x}{x \sin x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \left[ 1 - \cos 12x = 2 \sin^2 6x \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 6x}{x \sin x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 6x \cdot \sin 6x \cdot 6x \cdot 6x}{6x \cdot 6x \cdot x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{72x}{x} = 72$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x^2 \sin 5x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 3x \cos 3x}{x^2 \sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 3x \cdot 3x \cdot 5x}{3x \cdot \sin 5x \cdot 5x \cdot x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 3x}{5x \cdot x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{5x^2} = \infty$$

### 3. Неопределенность вида $\left[1^\infty\right]$

Для раскрытия неопределенностей такого вида применяется второй замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Рассмотрим пример:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{3x+4}\right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{3x}\right)^{x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x-3}{3x+4}\right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x}{3x}\right)^{x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\infty} = \infty$$

Пример:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+5}{3x-7} \right)^{2x-1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-7+7+5}{3x-7} \right)^{2x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-7}{3x-7} + \frac{12}{3x-7} \right)^{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{3x-7}{12}} \right)^{2x-1} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{3x-7}{12} \cdot \frac{12}{3x-7} \cdot (2x-1)} \right)^{\frac{3x-7}{12} \cdot \frac{12}{3x-7} \cdot (2x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{12(2x-1)}{3x-7}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{24x-12}{3x-7}} = e^8$$

*так как*  $\left[ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{24x-12}{3x-7} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{24}{3} = 8 \right]$

Пример:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 - 3}{2x^2 + 3} \right)^{\frac{2x^2-1}{3x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 + 3 - 3 - 3}{2x^2 + 3} \right)^{\frac{2x^2-1}{3x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 + 3}{2x^2 + 3} - \frac{6}{2x^2 + 3} \right)^{\frac{2x^2 - 1}{3x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-6}{2x^2 + 3} \right)^{\frac{2x^2 - 1}{3x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{2x^2 + 3}{-6}} \right)^{\frac{2x^2 - 1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{2x^2 + 3}{-6}} \right)^{\frac{2x^2 + 3}{-6} \cdot \frac{-6}{2x^2 + 3} \cdot \frac{2x^2 - 1}{3x}} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2(2x^2 - 1)}{x(2x^2 + 3)}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^2 - 1}{2x^3 + 3}} = e^{-\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x}} = e^{-0.M.} = 1$$

## Пример

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 - 5}{3x^2 + 7} \right)^{\frac{5x^4 - 2}{2x}} = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 + 7 - 7 - 5}{3x^2 + 7} \right)^{\frac{5x^4 - 2}{2x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{3x^2 + 7}{-12}} \cdot \frac{-12}{3x^2 + 7} \cdot \frac{5x^4 - 2}{2x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-60x^4 + 24}{6x^3 + 14x}} =$$

$$= \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-10x} = e^{+\infty} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-10x} = e^{-\infty} = 0 \end{cases}$$

Пример:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x-7}{5x-4} \right)^{6x^2+1} &= [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x-4+4-7}{5x-4} \right)^{6x^2+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x-4}{5x-4} + \frac{-3}{5x-4} \right)^{6x^2+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{-3}{5x-4} \right)^{\frac{5x-4}{-3}} \right]^{\frac{-3}{5x-4} \cdot (6x^2+1)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3(6x^2+1)}{5x-4}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-18x^2-3}{5x-4}} = \begin{cases} e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-18x}{5} \right)} = e^{-\infty} = 0 \\ e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{-18x}{5} \right)} = e^{\infty} = +\infty \end{cases} \end{aligned}$$



Пример:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\frac{2x}{1-x}} = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow 1} (1 + 1 - x)^{\frac{2x}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} (1 + (1 - x))^{\frac{2x}{1-x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[ (1 + (1 - x))^{\frac{1}{1-x}} \right]^{\frac{1-x}{1} \cdot \frac{2x}{1-x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} 2x} = e^2$$

Пример:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (7 - 2x)^{\frac{2}{x-3}} = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow 3} (1 + 6 - 2x)^{\frac{2}{x-3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} (1 + (6 - 2x))^{\frac{2}{x-3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \left[ (1 + (6 - 2x))^{\frac{1}{6-2x}} \right]^{\frac{6-2x}{1} \cdot \frac{2}{x-3}} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(3-x)}{1} \cdot \frac{2}{x-3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-4(x-3)}{x-3}} = e^{-4}$$

Пример:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 3) [\ln(x + 2) - \ln x]$

Для решения задач данного типа, необходимо преобразовать выражение стоящее под знаком предела, используя свойства логарифмической функции.

Решение.  $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$        $\ln a^k = k \ln a$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 3) [\ln(x + 2) - \ln x] = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 3) \ln \frac{x + 2}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{x+2}{x} \right)^{2x+3} \quad \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x} \right)^{2x+3} = [1^\infty] =$$

$$= \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x} \right)^{2x+3} = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{\frac{x}{2}} \right)^{\frac{x}{2}} \right]^{\frac{2}{x} \cdot (2x+3)} =$$

$$= \ln e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+6}{x}} = \ln e^4 = 4$$

4. Неопределенность вида  $[\infty - \infty]$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + 4x} - 3x)$$

*Замечание:* данный вид неопределенности возможен только при  $x \rightarrow +\infty$

Выражение, стоящее под знаком предела представляет собой разность бесконечно больших величин, для раскрытия неопределенности такого вида, необходимо умножить и разделить исходное выражение на сопряженное выражение и привести к виду

$$\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$$

Решение.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + 4x} - 3x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{9x^2 + 4x} - 3x)(\sqrt{9x^2 + 4x} + 3x)}{(\sqrt{9x^2 + 4x} + 3x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 + 4x - 9x^2}{\sqrt{9x^2 + 4x} + 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{\sqrt{9x^2 + 4x} + 3x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \\ & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{\sqrt{9x^2} + 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{3x + 3x} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

## *Задача о непрерывном начислении процентов*

Первоначальный вклад в банк составил  $Q_0$  денежных единиц.

Банк выплачивает ежегодно  $p\%$  годовых.

Определить размер вклада  $Q_t$  через  $t$  лет.

Решение.

1. *Простые проценты* – размер вклада ежегодно увеличивается на одну и ту же величину  $\frac{p}{100} Q_0$

За год 
$$Q_1 = Q_0 \left( 1 + \frac{p}{100} \right)$$

За два года 
$$Q_2 = Q_0 \left( 1 + \frac{2p}{100} \right)$$

За  $t$  лет 
$$Q_t = Q_0 \left( 1 + \frac{pt}{100} \right)$$

2. **Сложные проценты** – размер вклада ежегодно увеличивается в одно и то же число раз равное

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Таким образом

$$Q_1 = Q_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right) \quad Q_2 = Q_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \quad Q_t = Q_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$$

При начислении процентов  $n$  раз в году и ежегодном приросте  $p\%$  процент начисления за  $\frac{1}{n}$  - часть года составит

$$\frac{p}{n} \%$$



Размер вклада за  $t$  лет при  $nt$  начислениях составит

$$Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ Q_0 \left( 1 + \frac{p}{100n} \right)^{nt} \right]$$

Рассмотрим начисление процентов каждое полугодие ( $n=2$ ), квартал ( $n=4$ ), ежемесячно ( $n=12$ ), непрерывно ( $n \rightarrow \infty$ ).

Размер вклада за  $t$  лет составит

$$Q_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ Q_0 \left( 1 + \frac{p}{100n} \right)^{nt} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ Q_0 \left( 1 + \frac{1}{\frac{100n}{p}} \right)^{\frac{100n}{p} t} \right]^{\frac{pt}{100}} = Q_0 e^{\frac{pt}{100}}$$

$= e$

Полученная формула выражает показательный (экспоненциальный) закон роста вклада (при  $p > 0$ ).

*Замечание.* В практических финансово-кредитных операциях непрерывно начисление применяется редко.

Этот метод применяется при анализе сложных финансовых вопросов, таких как обоснование и выбор инвестиционных решений.