Секрет обучения заключается в уважении к ученику (Ральф Эмерсон).

Линейная алгебра

Лекция 2

Агаев Рафиг Пашаевич
(доктор физико-математических наук)

Определитель матрицы

- Квадратные матрицы. Степень матрицы. Многочлен от матрицы.
- Система линейных уравнений. Случай n=2.
- Определитель матрицы.
- Определение определителя.
- Разложение Лапласа по строкам и столбцам.
- Основные свойства определителя.
- Определитель и элементарные операции.
- Задачи.

Несколько слов о квадратных матрицах

1) Матрица квадратная, если число строк равно числу столбцов.

2) В отличие от других матриц ее можно возвести в степень.

Пусть $A_n = [a_{ij}]_{n\times n}$ – квадратная матрица,

I_n – единичная матрица.

$$A^0 = I,\ A^1 = A,\ A^2 = AA\ \ldots A^k = AA^{k-1} = A^{k-1}A.$$

Если задан многочлен

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_1 x + a_0,$$

то можно определить

$$f(A) = a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + a_1 A + a_0 I_n.$$

Пример. $f(x) = x^2 - 2x - 1,\quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$

$$f(A) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 - 2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - I = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

О перестановке в двух словах

- Определение 1. Всякое расположение n натуральных чисел $1, 2, \ldots, n$ в некотором определенном порядке называется перестановкой.

Две перестановки друг под другом – это подстановка. Например,

$$\begin{pmatrix} 1\ 4\ 5\ 3\ 2\ 6 \\ 6\ 4\ 3\ 5\ 1 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 1. (2, 4,3,1,6,5) – перестановка шести чисел 1,2,3,4,5,6.

(5,2,3,1,4) – перестановка пяти чисел 1,2,3,4,5.

Заметим, что в перестановке должны присутствовать все n чисел и общее число различных перестановок из n чисел равно n!

Определение 2. Если в перестановке поменять местами два числа, а остальные оставим на месте, то получится новая перестановка и это преобразование называется транспозицией.

Пример 2.

(2, 4,3,1,6,5)→ (2, 6,3,1,4,5) или же (2, 4,3,1,6,5) →(2,4,1,3,6,5).

Из одной перестановки из n чисел можно перейти к другой перестановке из тех же чисел при помощи нескольких транспозиций.

О перестановке в двух словах

- Определение 3. Говорят, что в данной перестановке числа i и j составляют инверсию, если i>j, но в перестановке i стоит раньше j

Наконец вводим самое главное.

Определение 4. Перестановка называется **четной**, если ее элементы составляют четное число инверсий, и **нечетной** – в противоположном случае.

Пример 3. (4,5,1,3,6,2) – перестановка шести чисел является четной. Поскольку, ее элементы составляют 6 инверсий.

Каждая транспозиция меняет четность перестановки.

____

{Также, чтобы прийти из (4,5,1,3,6,2) к (1,2 3,4 ,5 ,6) нужно четное число транспозиций. Здесь их 4: (4,5,1,3,6,2) →

(1,5,4,3,6,2) →(1,2 ,4 ,3 ,6 ,5) →(1, 2,3 ,4 ,6 ,5) →(1,2 3,4 ,5 ,6). }

Перестановка для матриц

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим произведение ее трех элементов, таким образом: в произведение из каждой строки и каждого столбца входит только один элемент:

например, $a_{11}a_{23}a_{32}$ или же $a_{13}a_{21}a_{32}$.

В произведении первые индексы идут по возрастанию.

Рассмотрим вторые индексы в этих двух произведениях:

(1,3,2) и (3,1,2).

Перестановка (1,3,2) - нечетная: число инверсий равно 1, только один случай, когда 3>2, но идет раньше нее.

а перестановка (3,1,2) – четная: два случая, когда 3>1 и 3>2, но в перестановке идет раньше 1 и 2.

В определитель член $(a_{1k_1}a_{2k_2}, \dots, a_{nk_n})$ входят со знаком плюс, если перестановка $(k_1, \dots, k_n)$ – четная, со знаком минус – в противном случае.

Для чего нужен определитель квадратной матрицы? Как он определяется? А как же он вычисляется?

- Определитель определяется для квадратной матрицы!

Определитель матрицы используется при решении многих прикладных задач. **Например,** при решении системы уравнений, которой у нас посвящена отдельная лекция.

Определение 1. Для квадратной матрицы $A = [a_{ij}]$ определителем называется сумма

$$\det A = \sum_{\sigma} \left(\operatorname{sgn} \sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \right), \qquad \text{(D1)}$$

σ где пробегает множество всех $n!$ перестановок из n чисел $\{1, \dots, n\}$ и $\operatorname{sgn} \sigma$ есть знак перестановки σ, т.е. это $+1$ либо -1 в зависимости от того, четно или нечетно число транспозиций (т.е. перемен местами какой либо пары чисел), необходимое для того, чтобы от расположения $\{1, 2, \dots, n\}$ перейти к σ. Каждое произведение

$$a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

входит в определитель со знаком плюс (+), в случае четной перестановки $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$, и со знаком минус ($-$), в случае нечетной.

Но, определитель вычисляется не по его определению, а другими, более простыми методами, чем и мы займемся сегодня.

Система лин. уравнений

- $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Эту систему можно записать в матричной форме

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

где

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи, а именно, когда n=2 и n=3.

Система с двумя переменными, *n*=2

- $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{2\times 1}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{2\times 1}.$$

Далее предполагаем, что **деление на число возможно.**

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}/a_{11}x_2 = b_1/a_{11} \\ x_1 + a_{22}/a_{21}x_2 = b_2/a_{21}. \end{cases}$$

Находим x_2:

$$x_2 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad (1)$$

$$x_1 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \qquad (2)$$

$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ - **определитель** матрицы A.

Продолжение

- Заметим, что числители выражений (1) и (2), соответственно равны

$$A' = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}, A'' = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}_{2\times 2}.$$

$$x_1 = \frac{\det A'}{\det A}, \qquad x_2 = \frac{\det A''}{\det A}.$$

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

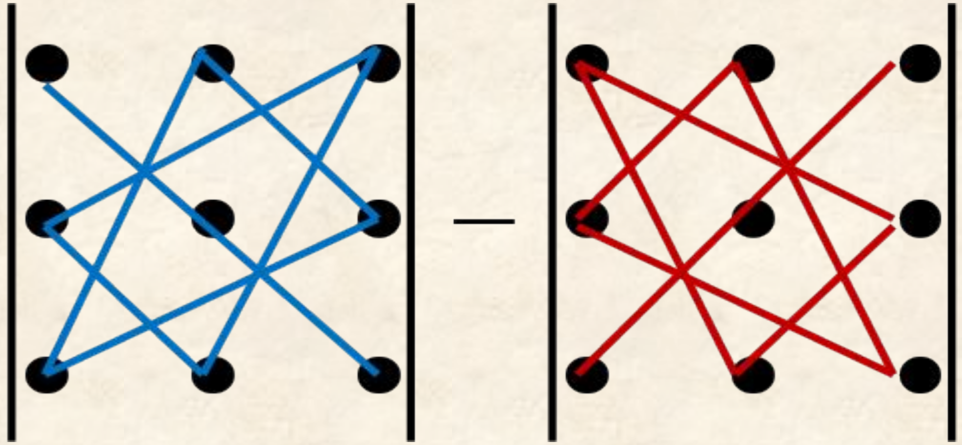
Для случая n=3.

- $$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Внизу схематически указано правило вычисления определителя третьего порядка: слева (синие линии и треугольники) – правило вычисления положительных членов, а справа (красные линии и треугольники) – отрицательных. Умножаются элементы, находящиеся на диагоналях или на вершинах треугольниках.



Минор и алгебраическое дополнение матрицы

- Рассмотрим квадратную матрицу A порядка n и набор индексов $\alpha \subseteq \{1, \dots, n\}$. Подматрицу $\mathrm{A}(\alpha, \alpha)$, лежащую в строках и столбцах с номерами из α называют **главной подматрицей** и обозначают через $\mathrm{A}(\alpha)$.

Определение 2. Определитель любой квадратной подматрицы матрицы A называется **минором** матрицы A. Если подматрицы главная, то и минор называется **главным**.

Если a_{ij} – элемент матрицы, то через M_{ij} обозначают подматрицу (n-1)-го порядка, получающуюся после вычеркивания i-й строки и j–го столбца матрицы A порядка n. Определитель матрицы $\det M_{ij}$ часто называют дополнительным минором, или просто минором элемента a_{ij} , т.е. минор (n-1)-го порядка.

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ часто называют **алгебраическим дополнением** элемента a_{ij}.

Все-таки, как вычислить определитель для любого n

- **Разложение Лапласа.** Определитель матрицы $A = [a_{ij}]$ можно ввести, используя индукцию. Предположим, что уже известно, что такое определитель **матриц порядка** $n-1$. Пусть M_{ij} - подматрицы, получаемые после удаления i-й строки, и j-го столбца. Тогда для всех $i \le n,\ j \le n$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det M_{ij}, \qquad \text{(L1)}$$

или же

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \qquad \text{(L1)}'$$

и это число по определению есть определитель матрицы A порядка n.

Левая часть равенства (1) представляет **собой разложение Лапласа** по i–й строки, а правая - по j–му столбцу матрицы A.

Пример вычисления определителя

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+0 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-2) +$$

$$+0 + 1 \cdot 2 \cdot 7 = 12.$$

Основные свойства определителя

a) Если все элементы i-го столбца (строки) матрицы n-го порядка представлены в виде суммы двух слагаемых;

$$a_{ji} = a_{ji} + a'_{ji}, \qquad\qquad i = 1, \dots, n,$$

то определитель равен сумме двух определителей, у которых все столбцы (строки), кроме i-го, такие же, как в заданной матрице, а i-й столбец (строка) в одном из слагаемых состоит из элементов a_{ji}, а в другом – из элементов a'_{ji}:

$$\det[A_1, \dots, A_{i-1}, A_i + A'_i, A_{i+1}, \dots, A_n] =$$

$$\det[A_1, \dots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \dots, A_n] + \det[A_1, \dots, A_{i-1}, A'_i, A_{i+1}, \dots, A_n]$$

Доказательство свойства а) непосредственно следует из формулы (D1) или же разложения Лапласа (L1).

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2+3 & 4 \\ 0 & 2-1 & 5 \\ 1 & 1+1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 13 = 12.$$

Основные свойства определителя

b) Если все элементы некоторого столбца (строки) матрицы умножить на число c, то сам определитель умножится на c:

$$\det[A_1, \ldots, A_{i-1}, cA_i, A_{i+1}, \ldots, A_n] = c \det[A_1, \ldots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n]$$

Доказательство пункта б) непосредственно следует из формулы (D1) или же (L1).

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 \cdot 4 & -1 \cdot 4 & 5 \cdot 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 13 = 52.$$

Основные свойства определителя

c) От перестановки двух столбцов (строк) матрицы, определитель меняет знак:

$$\det[A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n] = -\det[A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots, A_n]$$

Доказательство. В самом деле, всякий член исходного определителя имеет вид

$$a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \ldots a_{n\sigma_n}. \qquad (1)$$

которому соответствует подстановка

$$\begin{pmatrix} 1, \ldots, i, \ldots, j, \ldots, n \\ \sigma_1, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_j, \ldots, \sigma_n \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Члену (1) в транспонированном определителе соответствует подстановка

$$\begin{pmatrix} 1, \ldots, j, \ldots, i, \ldots, n \\ \sigma_1, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_j, \ldots, \sigma_n \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Одной транспозицией можно перейти с одной подстановкой к другой, поэтому у них разные знаки четности.

d) Определитель единичной матрицы порядка n равен 1: $\det I_n = 1$.

Доказательство пункта d) следует из определения определителя (D1). Поскольку в (D1) только один член отличен от нуля, который равен произведению n единиц.

Другие свойства определителя

1) Если у матрицы два столбца (строки) совпадают, то ее определитель равен нулю:

$$\det[A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_{j-1}, B, A_{j+1}, \dots, A_n] = 0$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2) Если один из столбцов (или строк) матрицы состоит из нулей, то определитель равен нулю.

$$\det[A_1, \dots, A_{i-1}, \mathbf{0}, A_{i+1}, \dots, A_n] = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3) Определитель матрицы, содержащие два пропорциональные столбца (строки), равен нулю:

$$\det[A_1, \dots, A_{i-1}, cA_j, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n] = 0.$$

Основные свойства определителя

4) Если к столбцу (строке) матрицы добавить другой столбец (строку), умноженный на число c, то определитель не изменится:

$$\det[A_1, \ldots, A_{i-1}, A_i + cA_j, A_{i+1}, \ldots, A_n] = \det[A_1, \ldots, A_n]$$

Пример. $\begin{vmatrix} 1 & 3+t*a & a \\ 1 & 3+t*b & b \\ -1 & 2+t*c & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ 1 & 3 & b \\ -1 & 2 & c \end{vmatrix}.$

5) Если матрицу порядка n умножить на число k, то определитель умножится на k^n.

$$\begin{vmatrix} a*k & f*k & g*k \\ b*k & e*k & h*k \\ c*k & d*k & j*k \end{vmatrix} = k^n \begin{vmatrix} a & f & g \\ b & e & h \\ c & d & j \end{vmatrix}.$$

6) Если один столбец (строка) матрицы является линейной комбинацией других, то определитель равен нулю.

Об определителе произведения двух матриц

- Следующую важную теорему мы приведем без доказательства.

Теорема. $\det AB = \det A \det B$.

Доказательство теоремы приведем для случая n=2.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Об определителе произведения двух матриц

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= b_{11}b_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} - b_{21}b_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{11}b_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$+ b_{21}b_{22} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= (\det A)\,(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})$$

$$= \det A \det B.$$

Свойства определителя

Теорема. $\det A = \det A^{\mathrm{T}}$.

Доказательство следует из определения определителя (формула D1).

В самом деле, всякий член исходного определителя имеет вид

$$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)}. \qquad (1)$$

которому соответствует подстановка

$$\begin{pmatrix} 1, \dots, n \\ \sigma(1), \dots, \sigma(n) \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Однако транспонированный определитель также содержит член (1), но при этом все множители в (1) для транспонированного определителя принадлежат разным строкам и столбцам, и имеет вид

$$a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\dots a_{\sigma(n)n}. \qquad (3)$$

которому соответствует подстановка

$$\begin{pmatrix} \sigma(1), \dots, \sigma(n) \\ 1, \dots, n \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Подстановки (2) и (4) имеют одну и ту же четность. Поэтому в определитель и его транспонирование (1) и (3) входят одним и тем же знаком.

Примеры вычисления определителей спец. вида

Следующая матрица называется нижней треугольной.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} a_{22} \det \begin{bmatrix} a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \cdots = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

Примеры вычисления определителей спец. вида

- Матрица A называется трехдиагональной, если $a_{ij} = 0$, при $|i-j|>1$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & & \\ & a_{32} & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & & & & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

$$\det A(\{1,2,\ \ldots,\ k+1\}) = \\ = a_{k+1,k+1} \det A(\{1,\ \ldots,\ k\}) - a_{k+1,k}\, a_{k,k+1} \det A(\{1,\ \ldots,\ k-1\}), \\ k = 2,\ \ldots,\ n-1.$$

Некоторые примеры

1.

$$A = \begin{bmatrix} 0\,1\,1 \ldots 1\,1 \\ 1\,1\,1 \ldots 1\,1 \\ 1\,0\,1 \ldots 1\,1 \\ \vdots\;\vdots\;\vdots\;\;\vdots\;\;\vdots\;\vdots \\ 1\,0\,0 \ldots 1\,1 \\ 1\,0\,0 \ldots 0\,1 \end{bmatrix}$$

a

Пример

Доказать, что

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & bc + a(a+b+c) - 1(ab+ac+bc) \\ 1 & b & ac + b(a+b+c) - 1(ab+ac+bc) \\ 1 & c & ab + c(a+b+c) - 1(ab+ac+bc) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & bc + a^2 + ab + ac - ab - ac - bc \\ 1 & b & ac + b^2 + ab + ac - ab - ac - bc \\ 1 & c & ab + c^2 + ab + ac - ab - ac - bc \end{vmatrix}$$

Пример

Доказать, что

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\frac{1}{x^2y^2z^2}\begin{vmatrix} 0 & xyz & xyz & xyz \\ x & 0 & xz^2 & xy^2 \\ y & yz^2 & 0 & x^2y \\ z & y^2z & x^2z & 0 \end{vmatrix} = \frac{xyz\cdot xyz}{x^2y^2z^2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Задание 2

1) Вычислить следующие определители. 1.1)

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$; (c) $\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}$; (d) $\begin{vmatrix} a^2+ab+b^2 & a^2-ab+b^2 \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$;

(e) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$; (f) $\begin{vmatrix} \sin\alpha+\sin\beta & \cos\beta+\cos\alpha \\ \cos\beta-\cos\alpha & \sin\alpha-\sin\beta \end{vmatrix}$.

1.2) (a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 5 & -8 & 1 \end{vmatrix}$; (c) $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$;

2) Вычислить многочлен $f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 5$ от матрицы A т.е. $f(A) = A^3 - 7A^2 + 13\,I$, если

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Задачи 2

3) Согласно определению, определитель равен сумме n! членов, составлена следующим образом: 1) членами служат всевозможные произведение n элементов матрицы, взятых по одному в каждой строке и в каждом столбце; 2) знак произведения зависит от четности перестановки (см. слайды данной лекции). Пользуясь только первым условием вычислить следующие определители.

[их] **3.1.17.** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$ **3.1.18.** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$

4) Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Задача 2

5) Пусть для матрицы X выполняется условие

$$X + X^2 = -I_n.$$

Найти $\det X$.

6)

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}; \text{(b)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 2 \end{vmatrix}; \text{(c)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Задачи

7) Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

8) [dem] Вычислить определитель порядка n, приведением их к треугольной форме

3.67. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

3.68. $$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}.$$

Слайд 1

9) [дем] Вычислить определитель порядка n методом рекуррентных соотношений:

3.71. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$. **3.72.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$.