Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Физика космоса

кружок

Занятие 3

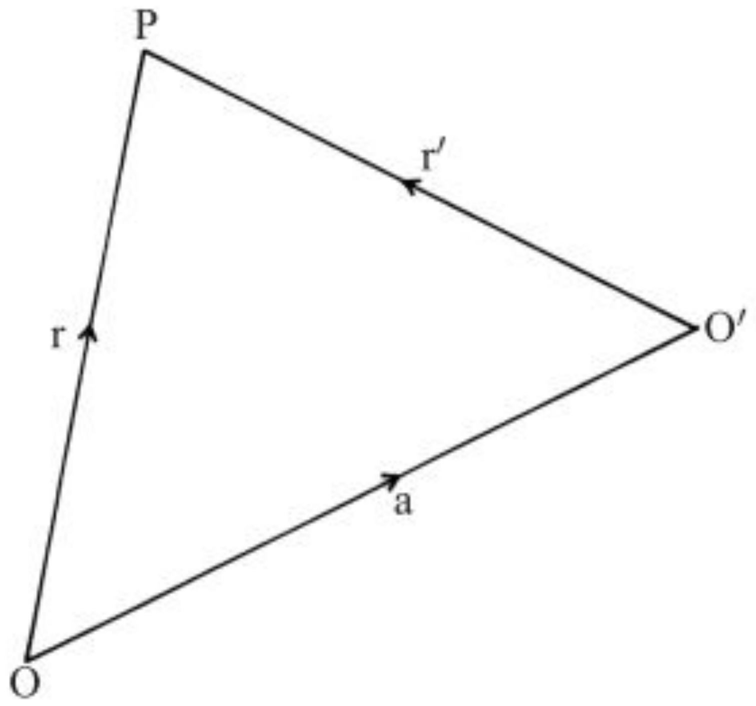
Космология Ньютона. Часть 1.

Москва

Космологический принцип

- Фундаментальные наблюдатели находятся в покое относительно «субстрата» Вселенной.
- Картина развивающейся во времени Вселенной называется космологической моделью.
- Космологический принцип. Вселенная
  - однородна
  - изотропна
- Следствием космологического принципа является существование универсального космического времени, т. к. все наблюдатели видят одну последовательность событий и могут по ним синхронизовать часы.

Космология Ньютона



По закону сложения радиус-векторов

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}$$

Тогда

$$\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r}') = \boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a})$$

По закону сложения скоростей

$$\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r}') = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{a})$$

Согласно принципу однородности

$$\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a})$$

Тогда

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{a})$$

Космология Ньютона

Согласно принципу однородности также

$$\rho(\boldsymbol{r}') = \rho(\boldsymbol{r}), \qquad p(\boldsymbol{r}') = p(\boldsymbol{r})$$

Тогда

$$\rho(\boldsymbol{r} - a) = \rho(\boldsymbol{r}), \qquad p(\boldsymbol{r} - a) = p(\boldsymbol{r})$$

Поскольку все точки выбраны произвольно, то r и a – тоже произвольные величины.
Т.е. характеристики Вселенной не зависят от точки наблюдения.

Космология Ньютона

Общее решение системы 3-х уравнений

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{a})$$

даётся выражением (9-ю уравнениями)

$$v_i(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}(t) x_k \qquad \text{при} \quad i = 1, 2, 3$$

Первое решение

$$v_1(x_1, x_2, x_3, t) = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + a_{13}(t)x_3$$

Однако условие изотропии требует, что бы

$$a_{ik} = 0, \qquad i \neq k$$

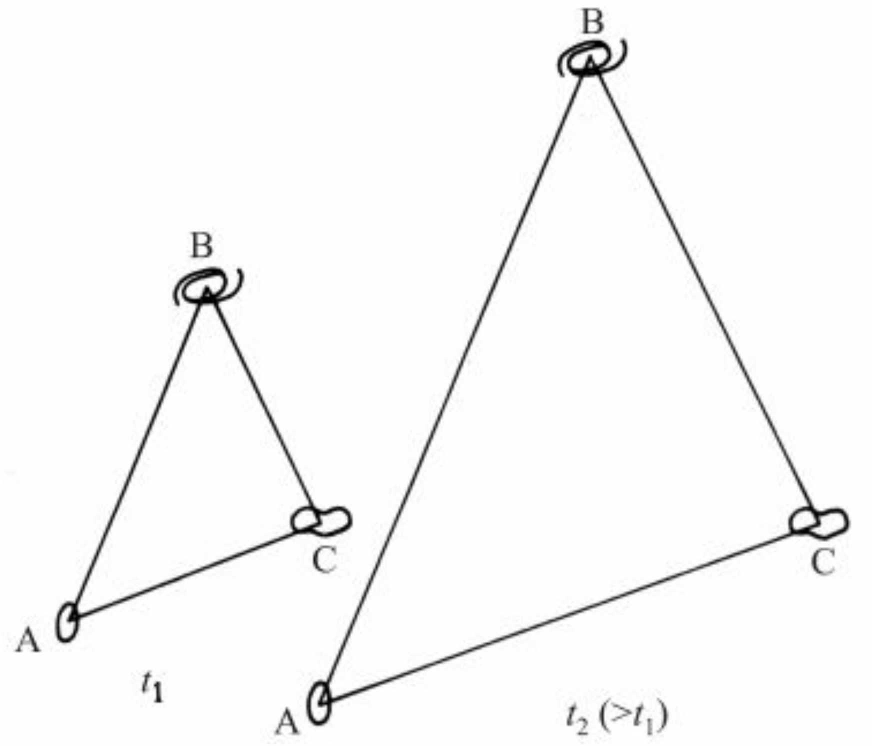
Диагональные элементы решения $a_{11} = a_{22} = a_{33} = H(t)$

Тогда из естественных рассуждений получает закон Хаббла

$$v_1 = H(t)x_1, \qquad v_2 H(t)x_2, \qquad v_3 = H(t)x_3$$

Однородна изотропная Вселенная может быть стационарной или сживаться/расширяться по закону $\boldsymbol{v} = H(t)r$

Космология Ньютона



Поскольку

$$\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$$

Постоянную Хаббла можно представлять как относительную скорость расширения или сжатия Вселенной

$$H(t) = \frac{1}{R(t)} \frac{dR(t)}{dt}$$

Тогда закон Хаббла имеет вид

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{1}{R(t)} \frac{dR}{dt} \boldsymbol{r}$$

Его решение

$$\boldsymbol{r} = R(t) \times \text{постоянный вектор} = \frac{R(t)}{R_0} \boldsymbol{r}_0$$

$$R_0 = R(t_0)$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 \text{ в момент } t = t_0$$

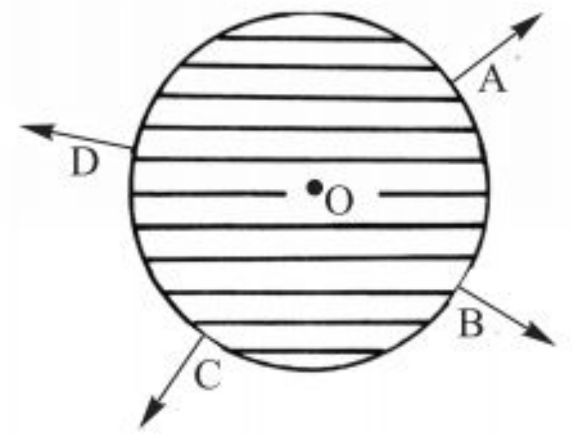
Космология Ньютона

Т.к. объем пропорционален 3-ей степени масштабного фактора, то плотность вещества (только нерелятивистского в данном приближении)

$$\rho(t) \propto R(t)^{-3}$$

или

$$\rho(t) = \rho_0 R_0^3 / R^3(t) \qquad \rho = \rho(t_0)$$



Сила, действующая на частицы на поверхности некоторого шара

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{4\pi G m \rho}{3}\boldsymbol{r}$$

Считаем, что все внешние силы скомпенсированы.
Для бесконечной Вселенной это утверждение доказывается в рамках ОТО (теорема Биркгофа)

Космология Ньютона

Выполняем подстановку в уравнение радиус-вектора

$$\boldsymbol{r} = \frac{R(t)}{R_0}\boldsymbol{r}_0$$

Тогда

$$\ddot{R}\frac{\boldsymbol{r}_0}{R_0} = -\frac{4\pi G\rho R\boldsymbol{r}_0}{3R_0}$$

$$\ddot{R} = -4\pi G\rho R/3$$

Проведём интегрирование с учётом распределения вещества $\rho(t) = \rho_0 R_0^3/R^3(t)$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3R} - kc^2$$

k - некоторая постоянная.

Это уравнение очень близко к уравнению общей теории относительности.

Теории относительности

Специальная теория относительности

Учитывает релятивистские эффекты.

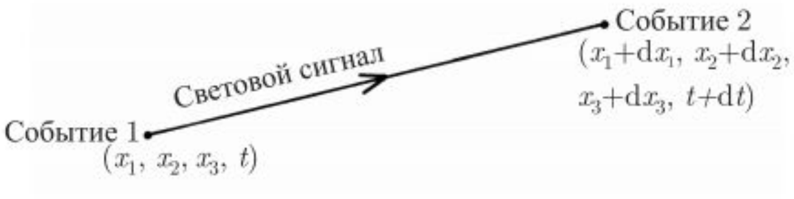
$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$$

Вводится понятие события в 4-х мерном пространстве

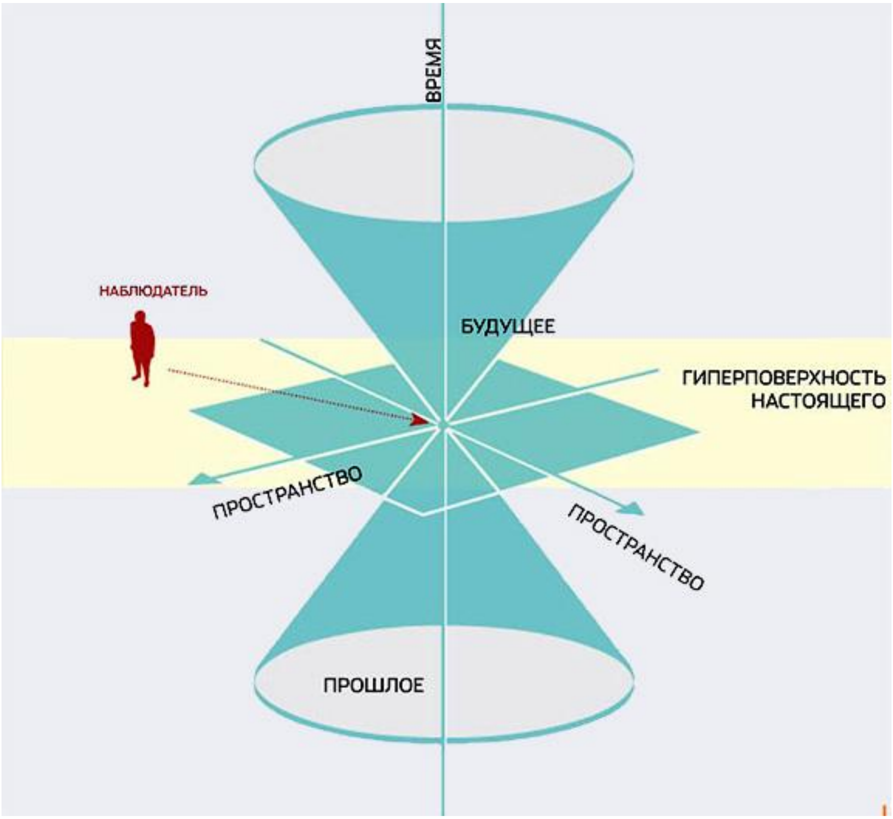
$$(x_1, x_2, x_3, t)$$

Расстояние – интервал – между двумя событиями

$$(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3, t + dt)$$



$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) = 0$$



Кривизна пространства