

Винеровский процесс

Определение 2.5. Если $\xi(t, \omega)$, $t \in T = [0, \infty)$, — n -мерный случайный процесс, то его называют **винеровским процессом**, выходящим из $\mathbf{0}$, если выполнены три условия:

1) $\xi(0, \omega) \equiv \mathbf{0}$;

2) для любых $N > 1$ и $t_k \in T$, $k = \overline{1, N}$, таких, что $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N$, случайные векторы $\xi(t_1, \omega)$, $\xi(t_2, \omega) - \xi(t_1, \omega)$, \dots , $\xi(t_N, \omega) - \xi(t_{N-1}, \omega)$ являются независимыми;

3) для любых $t_1, t_2 \in T$, таких, что $0 \leq t_1 < t_2$, случайный вектор $\xi(t_2, \omega) - \xi(t_1, \omega)$ распределен по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $(t_2 - t_1)\sigma^2 I_n$, где $I_n \in M_n(\mathbb{R})$ — единичная матрица.

Строгий математический анализ броуновского движения дал Н. Винер в 1923 г. Эвристически броуновское движение можно объяснить следующим образом. Рассмотрим отдельную частицу, погруженную в жидкость, обозначив через $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $\xi_3(t)$ ее координаты в момент времени $t > 0$. Будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$ она находится в начале координат, т.е. $\xi_k(0) = 0$, $k = 1, 2, 3$. Движение частицы на любом конечном временном интервале является результатом изменения импульса (количества движения) вследствие практически бесконечно большого числа независимых друг от друга соударений с молекулами жидкости. Поэтому естественно считать, что применима центральная предельная теорема [XVI]. Кроме того, можно допустить, что:

а) смещения частицы в ортогональных направлениях происходят независимо;

б) $\xi_k(t)$, $k = 1, 2, 3$, распределены по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2(t)$;

в) смещение частицы в каждом k -ом ортогональном направлении на различных непересекающихся временных интервалах $0 < t_1 < \dots < t_N$ представляется независимыми случайными величинами $\xi_k(t_1)$, $\xi_k(t_2) - \xi_k(t_1)$, \dots , $\xi_k(t_N) - \xi_k(t_{N-1})$;

г) смещение частицы в каждом k -ом ортогональном направлении на временном интервале $(t, t+h)$, равное $\xi_k(t+h) - \xi_k(t)$, имеет ту же функцию распределения, что и смещение $\xi_k(h) - \xi_k(0)$, где $\xi_k(0) \equiv 0$.

Отметим также, что дисперсия $\sigma^2(t) = \mathbf{D}[\xi_k(t)]$ обладает любопытным свойством:

$$\sigma^2(t) = \sigma^2 t, \quad t \geq 0,$$

где постоянную σ^2 интерпретируют как **коэффициент диффузии**. Действительно, согласно допущению в), случайные величины $\xi_k(t)$ и $\xi_k(t+h) - \xi_k(t)$ являются независимыми. Поэтому

$$\mathbf{D}[\xi_k(t+h)] = \mathbf{D}[\xi_k(t)] + \mathbf{D}[\xi_k(t+h) - \xi_k(t)],$$

или

$$\sigma^2(t+h) \equiv \sigma^2(t) + \mathbf{D}[\xi_k(t+h) - \xi_k(t)].$$

А так как, согласно допущению г),

$$\mathbf{D}[\xi_k(t+h) - \xi_k(t)] = \mathbf{D}[\xi_k(h)],$$

то

$$\sigma^2(t+h) \equiv \sigma^2(t) + \sigma^2(h),$$

откуда и следует отмеченное свойство (см. пример 2.3). Заметим, что этот результат является следствием из рассмотренных свойств процессов с ортогональными приращениями.

Замечание 2.1. Если в определении винеровского процесса условие $\xi(0, \omega) \equiv 0$ заменить условием $\xi(0, \omega) \equiv x$, где $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, то получим определение винеровского процесса, выходящего из точки x .

Замечание 2.2. Если $\xi(t, \omega)$, $t \in T$, — винеровский процесс с коэффициентом диффузии σ^2 , то случайный процесс $\xi(t, \omega)/\sqrt{\sigma^2}$, $t \in T$, называют **стандартным винеровским процессом**. Для любых $t_1, t_2 \in T$, таких, что $0 < t_1 < t_2$, случайный вектор $\xi(t_2, \omega)\sqrt{\sigma^2} - \xi(t_1, \omega)\sqrt{\sigma^2}$ распределен по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $(t_2 - t_1)I_n$. #

Следует также отметить два характерных свойства винеровских процессов.

1. Винеровский процесс является *процессом со стационарными приращениями*.

2. Если $\xi(t, \omega)$, $t \in T$, — винеровский процесс и σ^2 — его коэффициент диффузии, то для любых $t_1, t_2 \in T$, таких, что $0 \leq t_1 < t_2$, ковариационная функция равна

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = t_1 \sigma^2 I_n,$$

так как винеровский процесс является *процессом с независимыми приращениями*.